المتميز

رقم 21

بطاقات منهجية في

# الرياضيات

Hard_equation

# الأعداد المركبة

3 AS

وفق البرنامج الرسمي

Mathématique

BAC

دار الكتب العلمية
للطباعة والنشر والتوزيع

# الأعـداد المركبـة

**1 - تعريف :** نسمي عددا مركبا كل عدد $z$ يكتب على الشكل $z = x + iy$ حيث $x$ و $y$ عددان حقيقيان و $i^2 = -1$ .

**ملاحظات :**

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ : $C$ .
- العدد الحقيقي $x$ يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب $z$ و نرمز له بالرمز $Re(z)$.
- العدد الحقيقي $y$ يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب $z$ و نرمز له بالرمز $Im(z)$ .
- إذا كان $y = 0$ نقول أن العدد المركب $z$ حقيقي .
- إذا كان $x = 0$ نقول أن العدد المركب $z$ تخيلي صرف ( بحت ).
- يكون العدد المركب $z$ معدوما جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما أي $z = 0$ يعني أن $x = 0$ و $y = 0$ .
- الكتابة $z = x + iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب $z$

**2 - تساوي عددين مركبين :**

يكون عددان مركبان $z$ و $z'$ متساويان إذا و فقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي .

لدينا : $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

$z = z'$ يعني أن : $x = x'$ و $y = y'$ .

**التمثيل الهندسي لعدد مركب :**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

كل عدد مركب $z = x + iy$ مع $x$ و $y$ عددان حقيقيان و $i^2 = -1$ يرفق بالنقطة $M$ إحداثياتها $(x ; y)$، النقطة $M$ تسمى صورة العدد المركب $z$ و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب $z$ .


- كل نقطة $M$ هي صورة عدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، نقول أن $z$ لاحقة النقطة $M$ و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.
- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل.
- محور التراتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هي لاحقة نقطة من محور التراتيب.
- المستوي يسمى المستوي المركب.

**3 - العمليات في مجموعة الأعداد المركبة :**

- **مجموع و جداء عددين مركبين :**

$z$ عدد مركب حيث : $z = x + iy$ مع $x$ و $y$ عددان حقيقيان و $i^2 = -1$ و $z'$ عدد مركب حيث : $z' = x' + iy'$ مع $x'$ و $y'$ عددان حقيقيان و $i^2 = -1$.

مجموع العددين $z$ و $z'$ هو العدد المركب $z + z' = x + x' + (y + y')\,i$

جداء العددين $z$ و $z'$ هو العدد المركب $z \times z' = xx' - yy' + (xy' + x'y)\,i$

أمثلة : $(3+2i)+(-5-3i)=(3-5)+(2-3)i=-2-i$

$(3+2i)\times(-5-3i)=-15-9i-10i+6=-9-19i$

**التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين :**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

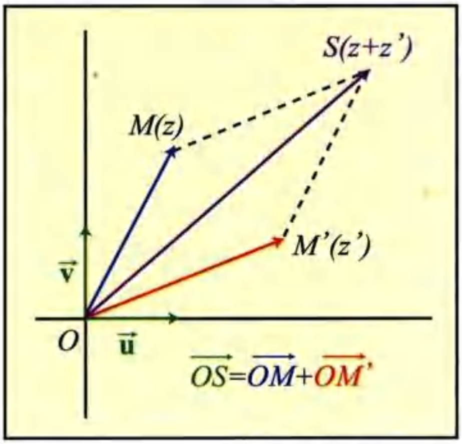
$z$ عدد مركب حيث : $z = x + i\,y$

و $z'$ عدد مركب، حيث : $z' = x' + i\,y'$

مجموع العددين $z$ و $z'$ هو لاحقة النقطة $S$ حيث :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}'$$

$\overrightarrow{OS}$ هي محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM}'$ .




**لاحقة شعاع ، لاحقة مرجح :**

خاصية : المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ .

$A$ و $B$ نقطتان من المستوي ، $Z_A$ لاحقة $A$ و $Z_B$ لاحقة $B$.

$Z_A\,Z_B$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ .

$\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$ ، $G$ مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ .

$\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$ هي لاحقة النقطة $G$.

**ملاحظة** : تستعمل نفس الطريقة في حساب لاحقة مرجح عدة نقط.

## 4 - مقلوب عدد مركب :

**مبرهنة** : كل عدد مركب غير معدوم $z$ له مقلوب في $C$ يرمز له $\dfrac{1}{z}$.

**مرافق عدد مركب :**

**تعريف** :

$z$ عدد مركب حيث $z = x + i\,y$ مع $x$ و $y$ عددان حقيقيان و $i^2 = -1$ .

العدد المركب $x - i\,y$ و الذي نرمز له $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب $z$ .

أمثلة : $\overline{5+4i}=5-4i$ ، $\overline{-2-3i}=-2+3i$ ، $\overline{-4i}=4i$

**خواص مرافق عدد مركب :**

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z-\bar{z}=2i\,lm(z)$
- $z+\bar{z}=(\mathrm{Re}(z))^2+(lm(z))^2$

**المرافق و العمليات :**

$z$ عدد مركب و مرافقه $\overline{z}$ ، $z'$ عدد مركب و مرافقه $\overline{z'}$ .

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{zz'}=\overline{z}.\overline{z'}$
- $\overline{z^n}=\overline{z}^{\,n}$ . $(n\in N^*)$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ مع $z\neq 0$ .
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ مع $z'\neq 0$ .

## طويلة و عمدة عدد مركب :

### 1 - طويلة عدد مركب :

**تعريف** : عدد مركب حيث : $z=x+iy$ ($x$ و $y$ عددان حقيقيان).

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ .

**أمثلة :**

- $|2-5i|=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$
- $|-8-6i|=\sqrt{64+36}=10$
- $|-7i|=\sqrt{49}=7$

**ملاحظات** : إذا كان z عددا حقيقيا فإن طويلة $z$ هي القيمة المطلقة للعدد $z$.

- $z=0$ يعني $|z|=0$
- $|z|^2=x^2+y^2$

**التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب :**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ .

$z$ عدد مركب حيث $z=x+iy$ إذا كانت $M$ صورة $z$ فإن : $OM=|z|$

**خواص طويلة عدد مركب :**

**خواص** : من أجل كل عددين مركبين $z$ و $z'$ .

- $|\overline{z}|=|z|$
- $|-z|=|z|$
- $|z.z'|=|z|.|z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ مع $z'\neq 0$
- $|z^n|=|z|^n$
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ .(المتباينة الثلاثية).

**ملاحظة** : $A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما $Z_A$ و $Z_B$ على الترتيب : $AB=|z_B-z_A|$ .

### 2 - عمدة عدد مركب غير معدوم :

**تعريف** : $z$ عدد مركب غير معدوم حيث : $z=x+iy$ ($x$ و $y$ عددان حقيقيان).

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ لتكن $M$ صورة $z$ .

نسمي عمدة العدد المركب $z$ و نرمز $\arg(z)$ كل قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

ملاحظات :

كل عدد مركب غير معدوم $z$ له عدد غير منته من العمد.

إذا كان $\theta$ عمدة لـ $z$ فإن $\theta + 2k\pi \left(k \in Z\right)$ عمدة لـ $z$ .

و نكتب $\arg(z) \equiv \theta \left[2\pi\right]$ .

$A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما $Z_A$ و $Z_B$ على الترتيب.

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ أي $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = arg\,(Z_B) - arg\,(Z_A)$

$$arg(Z_B - Z_A) = (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB})$$

## الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم :

### 1 - تعريف و خواص :

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ تعلم نقطة $M$ بإحداثييها الديكارتية $(x;y)$ أو بإحداثييها القطبية $(r;\theta)$. حيث : $OM = r$ و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}) = \theta\,[\text{lr}]$

و لدينا $x = r\cos(\theta)$

و $y = r\sin(\theta)$ .

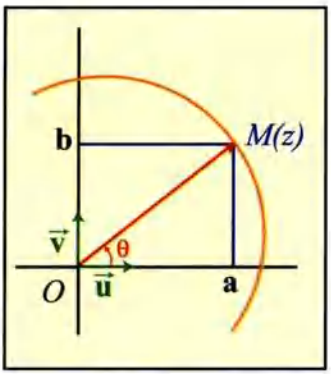
**تعريف :**

$z$ عدد مركب غير معدوم ، العدد Z يكتب على الشكل :

$$z = (cos(\theta) + i\,sin(\theta))$$

حيث : $r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$ ،

هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لـ : $Z$.




**ملاحظة** : إذا كان $z = x + iy$

$\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$ و $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r}$ .

**خاصية -1-** : يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطرويلة و عمدتان متوفقتان بترديد $2\pi$ .

**خاصية -2-** : إذا كان $z = \lambda(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ و كان $\lambda > 0$ فإن $|z| = \lambda$ و $\arg(z) = \theta$ .

### 2 - خواص عمدة عدد مركب غير معدوم :

**خواص** : $z$ و $z'$ عددان مركبان غير معدومين.

- $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)$ * $n \in N^*$.

**الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم :**

**1 - الشكل الأسي لعدد مركب طويلته 1 :**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ . $z_0$ عدد مركب طويلته 1 و $M_0$ صورته، لتكن $\theta$ عمدة لـ $z_0$ .

$z_0 = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$، لتكن $f$ الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي $\theta$ العدد المركب الذي طويلته 1 و $\theta$ عمدة ، أي $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ .

$\theta$ و $\theta'$ عددان حقيقيان لنحسب $f(\theta + \theta')$ و $f(\theta).f(\theta')$ .

أي : $f(\theta+\theta') = (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta')\cos(\theta))$

$$f(\theta).f(\theta') = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))\ (\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$$

أي : $f(\theta).f(\theta') = (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta')\cos(\theta))$

و نستنتج أن : $f(\theta+\theta') = f(\theta).f(\theta')$

بما أن الدالة الأسية تحول مجموع عددين إلى جداء صورتيهما تم التفكير في الترميز الأسي للعدد $z_0$ .

نضع : $z_0 = e^{i\theta}$.

**تعريف** : العدد المركب الذي طويلته 1 و $\theta$ عمدة له يكتب $e^{i\theta}$ . حيث $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

هذا الرمز يسمى ترميز أولر.

**2 - الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم :**

**تعريف** : العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و $\theta$ عمدة له يكتب $z = re^{i\theta}$.

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z .

**3 - قواعد الحساب على الشكل الأسي :**

**خواص** : $\theta$ و $\theta'$ عددان حقيقيان.

- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}.e^{i\theta'}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

**4 - دستور موافر :**

**خواص** : عدد مركب طويلته 1 و $\theta$ عمدة له من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

# المعادلات من الدرجة الثانية

**1 - تساوي عددين مركبين :**

**مبرهنة** : يكون عددان مركبان $z$ و $z'$ متساويين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الطويلة ، نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

$$z = z' \quad \text{معناه} \quad \begin{cases} |z| = |z'| \\ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$$

## 2 - الجذران التربيعيان لعدد مركب :

تعريف : w عدد مركب يسمى حلا المعادلة $z^2 = w$ في المجموعة C الجذرين التربيعي للعدد $w$.

أمثلة : – الجذران التربيعيان للعدد $3-4i$ هما $2-i$ و $-2+i$.

– الجذران التربيعيان للعدد 9- هما $3i$ و $-3i$ .

ملاحظة : كل عدد مركب غير معدوم يقبل جذرين تربيعيين متناظرين.

## 3 - المعادلات من الدرجة الثانية :

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2 + bz + c = 0$.......(1) حيث $c, b, a$ أعداد مركبة و $a \neq 0$

بوضع $\Delta = b^2 - 4ac$ نحصل على $az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ .

حل المعادلة $(1)$ يؤول إلى حل المعادلة $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

حل المعادلة $(1)$ يؤول إلى تعيين الجذرين التربيعيين للعدد $\Delta$ .

مبرهنة : لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2 + bz + c = 0$ حيث $c, b, a$ أعداد مركبة و $a \neq 0$ ، $\Delta = b^2 - 4ac$ مميزها.

- إذا كان $\Delta = 0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z = -\frac{b}{2a}$ .
- إذا كان $\Delta \neq 0$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين : $z' = \frac{-b - w}{2a}$ و $z'' = \frac{-b + w}{2a}$

حيث $w$ جذر تربيعي لـ $\Delta$ .

ملاحظة : إذا كان $z'$ و $z''$ حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب $z$ :

$$az^2 + bz + c = a(z - z')(z - z'')$$

مثال : حلا المعادلة $z^2 - z + 1 = 0$ هما : $z' = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z'' = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

# التحويلات النقطية

### تذكير حول التحويلات النقطية المألوفة :

**1 - الانسحاب :**

تعريف : الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة $M'$ من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ .

خواص : الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو الانسحاب الذي شعاعه $(-\vec{u})$ الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل أية نقطة صامدة و الانسحاب الذي شعاعه $\vec{0}$ هو التحويل الثابت.

الخاصة المميزة : صورة ثنائية (A , B) هي ثنائية (A' , B') تحقق $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ .

الانسحاب تقايس.

**2 - التحاكي :**

تعريف : $\Omega$ نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم التحاكي الذي مركزه $\Omega$ و نسبته k هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة $M'$ من المستوي حيث : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ . $k \in R^* - \{1\}$

خــواص :

إذا اختلفت M عن $\Omega$ فإن $M'$ تختلف عن $\Omega$ و النقط $\Omega$ ، M و $M'$ على استقامة واحدة.

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ يعني $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'}$ و نستنتج أن : التحاكي الذي مركزه $\Omega$ و نسبته k هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو التحاكي الذي مركزه $\Omega$ و نسبته $\frac{1}{k}$ .

**الخاصة المميزة** : صورة ثنائية (A , B) بالتحاكي الذي مركزه $\Omega$ و نسبته k هي الثنائية $(A', B')$ التي تحقق : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ .

نلاحظ أنه إذا كان $|k| \neq 1$ فإن $A'B' \neq AB$ و بالتالي فإن التحاكي ليس تقايسا.

**3 - الدوران :**

**تعريف** : $w$ نقطة من المستوي الموجه و $\theta$ عدد حقيقي.

الدوران الذي مركزه $\Omega$ و زاويته $\theta$ هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة $\Omega$ بنفسها و يرفق بكل نقطة M تختلف عن $\Omega$ النقطة $M'$ حيث : $\Omega M' = \Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$

خــواص :

الدوران الذي مركزه $\Omega$ و زاويته $\theta$ غير معدومة له نقطة صامدة و حيدة هي المركز $\Omega$ .

الدوران الذي مركزه $\Omega$ و زاويته $\theta$ تحويل تقابلي و تحويله العكسي هو الدوران الذي مركزه $\Omega$ و زاويته $(-\theta)$.

**الخاصة المميزة** : صورة كل ثنائية (A , B) بالدوران الذي مركزه $\Omega$ و زاويته $\theta$ هي ثنائية $(A', B')$ تحقق ما يلي : $A'B' = AB$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$ تبين هـذه النتيجة أن الدوران تقايس.

## الأعــداد المركبة و التحويلات النقطيــة

في كل ما يأتي المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقـة $z'$ حيث $z' = az + b$ مع $a \in R^*$ أو $a \in C$ و $|a| = 1$ ونكتب $f(M) = M'$ يعني $z' = az + b$ .

**1 - الحالـة الأولى** $a = 1$ :

$f(M) = M'$ يعني $z' = z + b$ ، و بالتالي $z' - z = b$ و بما أن $z' - z$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ فإن $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{U}$ حيث $\overrightarrow{U}$ صورة العدد المركب b و بالتالي التحويل $f$ هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{U}$ ذو اللاحقـة b.

**خاصيـة** : التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث : $z' = z + b$ (b عـدد مركب) هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{U}$ صورة b .

**2 - الحالـة الثانية** $a \in R^* - \{1\}$ .

**خاصيـة** : التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث $z' = az + b$ مع $a$ عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن $1$ و $b$ عـدد مركب ، هو التحاكي الذي مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ و نسبته $a$ .

**3 - الحالـة الثالثة** $a \in C$ و $|a| = 1$ .

**خاصية** : التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث $z' = az + b$ مع $a$ عدد مركب غير حقيقي طويلته $1$ و $b$ عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ، و زاويته $\arg(a)$ .