



سنة الثالثة ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | تقني رياضي | رياضيات

مسائل [22 مسألة]

في الدوال اللوغارتمية

مرفقة بحلول مفصلة

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[21 ديسمبر 2021]

المسائل:

فهرس المحتويات:

المسألة رقم 01 : المسألة الحل	المسألة رقم 02 : المسألة الحل
المسألة رقم 03 : المسألة الحل	المسألة رقم 04 : المسألة الحل
المسألة رقم 05 : المسألة الحل	المسألة رقم 06 : المسألة الحل
المسألة رقم 07 : المسألة الحل	المسألة رقم 08 : المسألة الحل
المسألة رقم 09 : المسألة الحل	المسألة رقم 10 : المسألة الحل
المسألة رقم 11 : المسألة الحل	المسألة رقم 12 : المسألة الحل
المسألة رقم 13 : المسألة الحل	المسألة رقم 14 : المسألة الحل
المسألة رقم 15 : المسألة الحل	المسألة رقم 16 : المسألة الحل
المسألة رقم 17 : المسألة الحل	المسألة رقم 18 : المسألة الحل
المسألة رقم 19 : المسألة الحل	المسألة رقم 20 : المسألة الحل
المسألة رقم 21 : المسألة الحل	المسألة رقم 22 : المسألة الحل

♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥



01

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$$

1 ادرس تغيرات الدالة g

2 احسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

3 ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

4 بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x + 1)^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5 بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثيها

6 مثل بيانياً المنحنى (C_f)



02

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x \ln x - x - 1$$

- 1 ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها
 - 2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0; +\infty[$ حيث: $3.5 < \alpha < 3.6$
 - 3 استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$

- 1 احسب نهايات الدالة f ، ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسيا
- 2

أ/ بيّن أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ب/ استنتج تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

- 3 اثبت أن $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$ ، ثم أعط حصر $f(\alpha)$
- 4 اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1
- 5 مثل بيانيا كلا من (T) و (C_f)

(III) نعتبر المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة $y = mx + \frac{3}{2}$

- 1 بيّن أن المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة، يطلب تعيين إحداثياتها
- 2 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$f(x) = y_{(\Delta_m)}$$

(IV) لتكن الدالة h المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = -\frac{\ln(x-1)}{x}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

- 1 تحقق أن $h(x) + 1 = f(x - 1)$
- 2 استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة تحويل نقطي يطلب تعيينه



03

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} + x & ; x \in \mathbb{R}_-^* - \{-1\} \\ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} & ; x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ونسُمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$ ، فسر النتيجة هندسياً.

2 ادرس تغيرات الدالة f .

3

أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_-^* - \{-1\}$.

4 حل المعادلة: $f(x) = 0$ في المجال $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ ، ماذا تسنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

5 بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-2; -\frac{3}{4}[$.

6 مثل بيانياً (Δ) و المنحنى (C_f) .

7 نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$f(x) = -(m^2 - e) \dots (E)$$

- ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

(I) دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = -x^2 - 2 + 2 \ln x$$

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

ب/ علما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^n}\right) = 0$ ، بيّن أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3 احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = -x + 5 - 2 \frac{\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1

أ/ احسب نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2

أ/ برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 5$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f)

3

أ/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $4.3 < \alpha < 4.4$

ب/ برّر أن $\ln \alpha = \frac{-\alpha^2 + 5\alpha}{2}$

4 بيّن أنه يوجد مماس (T) لـ (C_f) يوازي (Δ) ، ثم اكتب معادلة له

5 ارسم كل من (Δ) ، (T) و (C_f)

6 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة: $(5 - m)x - 2 \ln x = 0$

05

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	1	$\sqrt{3}$...
$f'(x)$...	0	...		0	+
$f(x)$		$-\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$				$+\infty$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.1 علما أن الدالة f فردية:أ/ عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .ب/ بيّن أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -\infty$ وأن: $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$ وأن $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$ ج/ أكمل جدول تغيرات الدالة f السابق.2 نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$.• مثّل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحنى (C_f) . نأخذ: $f(\sqrt{3}) \cong 3$ و $(\sqrt{3}) \cong 1.7$ 3 نفرض أن عبارة الدالة f هي من الشكل:

$$f(x) = ax + b + \ln\left(c + \frac{2}{x-1}\right)$$

حيث: a, b, c أعداد حقيقية.- باستعمال نتائج الجدول أعلاه، بيّن أن: $a = 1, b = 0, c = 1$.4 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0 \dots (E)$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty; 1[$ كما يلي:

$$g(x) = \ln(f(x))$$

• ادرس تغيرات الدالة g



06

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$$

- 1 احسب نهاية الدالة g عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها.
- 2 ادرس تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 3

أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$

ب/ تحقق أن $0.45 < \alpha < 0.46$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$$

و نسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$

- 1 احسب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$ ، ثم فسر النتائج هندسيا.
- 2 ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها
- 3 بيّن أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^\alpha}$ ، ثم استنتج حصرًا للعدد $f(\alpha)$
- 4 حل المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا
- 5 أنشئ المنحنى (C_f)

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$h(x) = \frac{|3 + \ln x|}{e^x}$$

- 1 اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة
- 2 أنشئ (C_h) المنحنى الممثل للدالة h في نفس المعلم السابق

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (\vec{i}, \vec{j}) .

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

2

أ/ بيّن أن لكل x من المجال $]0; 1]$ $(x - 1) + \ln x \leq 0$ وأن لكل x من المجال $[1; +\infty[$ $(x - 1) + \ln x \geq 0$.

ب/ بيّن أنه من أجل كل من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ والمنحنى (C_f) .

4 عين احداثيي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازياً للمستقيم (D) ، ثم اكتب معادلة المستقيم (T) .

5

أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها.

6 مثل بيانياً كلا من (D) ، (T) و (C_f) .

7 ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$f(x) = x - 2m$$

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)$$

1 احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3

أ/ احسب $g(0)$.

ب/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72 < \alpha < -0.71$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال: $]0; +\infty[\cup]-1; 0[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

ونسُمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسياً.

2

أ/ بين أنه من أجل كل x من D_f :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3 بيّن أن:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

ثم أعط حصر للعدد $f(\alpha)$ بالتدوير إلى 10^{-2} .

4 مثل بيانياً (C_f)

5 ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث: $m > 0$.

$$f(x) = \ln m \dots (E)$$



09

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = -1 + (x + 1)e + 2 \ln(x + 1)$$

1 ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.34 < \alpha < -0.33$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1

أ/ بين أن $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ واحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

ج/ ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

د/ ارسم المنحنى (C_f) . (نقبل أن $f(\alpha) \approx 3.16$).

2 نعتبر الدالة k المعرفة على $]-1; 1[$ بـ:

$$k(x) = f(-|x|)$$

(C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ/ بين أن الدالة k زوجية.

ب/ بين كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ، ثم ارسمه. (دون دراسة تغيرات الدالة k).

ج/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $k(x) = m$.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = \ln x + x - 3$$

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.2 < \alpha < 2.21$.

3 عين إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$.

2

أ/ احسب $f'(x)$ ، ثم ادرس اشارتها.

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 عين دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

4 بين أن:

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

5 حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

6 بأخذ: $f(\alpha) \cong -0.66$ ، مثل بيانها (C_f)

(I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = 2 \ln x - 1 - \frac{1}{x^2}$$

1 بيّن أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

2

أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.89 < \alpha < 1.9$

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $g(x)$

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = -x - 2 + \frac{3 + 2 \ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2

أ/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ب/ بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \frac{1}{\alpha}[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{\alpha}; +\infty[$. ثم شكل جدول تغيرتها

3

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)]$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4

أ/ بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1

ب/ اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة A

5 ارسم (T) ، (Δ) و (C_f) (نأخذ: $\frac{1}{\alpha} \approx 0.53$ و $\frac{1}{\alpha} = 0.73$). $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

(III) الدالة h معرفة على \mathbb{R}^* بـ:

$$h(x) = |x| + 2 - \frac{3 + \ln(x^2)}{|x|}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1 بيّن أن الدالة h زوجية.

2 تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $h(x) = -f(x)$

3 اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

(I) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $\ln x \rightarrow x$ في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 A نقطة من (C) فاصلتها m حيث m عد حقيقي موجب تماما
 و (T_m) مماس لـ (C) في النقطة A

①

أ/ اثبت أن معادلة المماس (T_m) $y = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m$.

ب/ تحقق أن المماس (T_e) للمنحنى (C) في النقطة $B(e; 1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم

② لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ ب:

$$g(x) = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m - \ln x$$

أ/ ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$

③ استنتج مما سبق أن (C) يقع تحت أي مماس له

(II)

①

أ/ استنتج أنه من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما m و x يكون:

$$\ln x \leq \ln m + \frac{x - m}{m}$$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m يكون:

$$\ln(m + 1) - \ln m \leq \frac{1}{m}$$

③ نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب:

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

①

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما صحة المتباينة $\ln x \leq x - 1$.

②

أ/ اثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا: $\ln(t + 1) \leq t$

ب/ بوضع $x = \frac{1}{t+1}$ ، اثبت أنه من أجل $t > -1$ يكون لدينا: $\frac{t}{1+t} \leq \ln(t + 1)$

ج/ استنتج أنه من أجل $t > -1$ صحة المتباينة $\frac{t}{1+t} \leq \ln(t + 1) \leq t$

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 + x^2 + \ln x$

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.

3 استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = -x + \frac{2 + \ln x}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 بين أنه من أجل كل x من D_f :

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 بين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$ ، ثم عين حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

4

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5 اثبت أن (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها.

6 مثل بيانيا كل من المستقيم (Δ) ، المماس (T) و (C_f) . علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين x_0 و x_1 حيث:

$$0.1 < x_0 < 0.2 \quad \text{و} \quad 1.5 < x_1 < 1.6$$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = -x + 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في المستوي السابق

1

أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال D_h : $h(x) = f(x+1) + 2$

ب/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

2 بين أن المنحنى (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه، ثم أنشئه

3 m وسيط حقيقي غير معدوم، (T_m) مستقيم معادلته: $y = \ln(|m|)x + 1$

أ/ برهن أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها.

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية: $(E) \quad h(x) = \ln(|m|)x + 1$

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = (\ln x)^3 + 1$$

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 حل المعادلة $g(x) = 0$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ يكون:

$$f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

3 استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = (\ln x)^2 + 1$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1 ادرس تغيرات الدالة h .

2 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

3 ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) .

4 بين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف يُطلب احداثيتها.

5 اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

6 احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

7 مثل بيانياً في نفس المعلم كلا من (C_f) ، (C_h) و (T) .

8 نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m (\ln x)^3 + e^m (\ln x) - \ln x - 2e^m = 0 \dots (E)$$

- ناقش بيانياً حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $+\infty \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ:

$$f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$.

2 بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 عين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

4

أ/ أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x) = \ln(x + a) + b$$

حيث a و b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب/ استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغارتمية النيبيرية، ثم ارسم (C) و (C_f) .

(II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x) - x$.

1 احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x)$ ، ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3

أ/ احسب $g(1)$ ، ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $+\infty \left[\frac{3}{2}; +\infty \right[$ حلا وحيدا α ، ثم تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

ب/ ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left] \frac{1}{2}; 5 \right]$ في المعلم السابق.

4 استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

5 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\alpha \left[1; +\infty \right[$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $\alpha \left[1; +\infty \right[$.

(III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي:

$$u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

1 عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$u_n = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$$

2 احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ مبينا المستقيبات المقاربة لـ (C_f) .

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 m عدد حقيقي موجب تماما. ولتكن النقط A_m زوات الفاصلة m ، والمستقيم (T_m) مماس (C_f) في النقط A_m .

أ/ اكتب بدلالة m معادلة المماس (T_m) .

ب/ عين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0; 0)$.

ج/ اكتب معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها.

3 مثل بيانيا المستقيمات (T_m) و (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي:

$$g(x) = \frac{(\ln|x|)^2}{x}$$

1 بيّن أن الدالة g فردية.

2 بيّن أنه يمكن رسم (C_g) منحنى الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه.

(I) الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = -1 + x + 2 \ln x$$

1 ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2 احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{-1 + (x - 2) \ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2

أ/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب/ عيّن اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3 ليكن (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة: $\ln x \mapsto x$ على المجال $]0; +\infty[$.

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ) .

4 بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β ، ثم تحقق أن:

$$0.5 < \alpha < 0.6 \text{ و } 2.9 < \beta < 3$$

5 ارسم (Γ) ثم (C_f)

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right)$$

ونسُمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ بين أن:

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right)$$

ج/ استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3

أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) والمنحنى (C_f) .

4/ بين أن ω نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) تنتمي إلى (C_f) .

5/ اكتب معادلة للمماس (T) عند المبدأ.

6/ مثل بيانياً كلا من (D) ، (T) و (C_f) .

7/ m وسيط حقيقي حيث: $m > 0$.

ناقش بيانياً حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) حيث:

$$x - \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{me^x + 2m}\right) = 0 \dots (E)$$

(I) و الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = (x + 1)(x + e) - e(x \ln x)$$

• احسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \ln(x + 1) + \frac{e \ln x}{x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ب/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(x + 1)^2}$$

ج/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 اكتب معادلة للمماس (T) لمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

3

أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α

ب/ تحقق أن $0.7 < \alpha < 0.8$.

4 (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة $\ln(x + 1) \mapsto x$ على المجال $]0; +\infty[$

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x + 1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب/ ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

ج/ ارسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f) .

5 m وسيط حقيقي، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = \frac{1+e}{2}x - m$ حلين متميزين.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2

أ/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$.

ب/ تحقق من أن $1.31 < \alpha < 1.32$.

3 استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 بين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

3 شكل جدول تغيرات الدالة f .

4 بين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$

5 استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(III) نسمي (C_h) التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$h(x) = \ln x$$

ولتكن النقطة A ذات الاحداثيات $(0; 2)$ و M نقطة من المنحنى (C_h) فاصلتها x_m .

1 بين أن المسافة AM تُعطى بـ:

$$AM = \sqrt{f(x)}$$

2 نعتبر الدالة k المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$k(x) = \sqrt{f(x)}$$

أ/ برهن أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ برهن أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h) ، يُطلب تعيين احداثيتها.

ج/ برهن أن: $AB = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$

3 هل المستقيم (AB) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (C_h) في النقطة B ؟ برر اجابتك.

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; 1[$ بـ: $g(x) = 2 - x + \ln x$

①

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; 1[$.

ب/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.15 < \alpha < 0.16$.

② استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; 1[$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{1 - 2x + \ln x}{x - 1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① احسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = \frac{1-2x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1}$)

ثم فسر النتيجةين بيانيا

②

أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

ب/ بين أن الدالة f متزايدة تماما على $\left]1; \frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

③ ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2$.

④ ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) ، (يُعطى $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \approx -1.8$).

⑤ عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)| = m$ حلين متميزين.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على D حيث: $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 بين أن الدالة f فردية، ثم فسر ذلك بيانياً.

2 احسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور الترتيب.

3

أ/ بين أنه من أجل كل x من D :

$$f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$.

4 بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

5 انشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

6 m وسيط حقيقي، ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$(2 - 3|m|)x + 3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

الحلول (مقترحة) :

فهرس المحتويات:

المسألة رقم 01 : المسألة الحل	المسألة رقم 02 : المسألة الحل
المسألة رقم 03 : المسألة الحل	المسألة رقم 04 : المسألة الحل
المسألة رقم 05 : المسألة الحل	المسألة رقم 06 : المسألة الحل
المسألة رقم 07 : المسألة الحل	المسألة رقم 08 : المسألة الحل
المسألة رقم 09 : المسألة الحل	المسألة رقم 10 : المسألة الحل
المسألة رقم 11 : المسألة الحل	المسألة رقم 12 : المسألة الحل
المسألة رقم 13 : المسألة الحل	المسألة رقم 14 : المسألة الحل
المسألة رقم 15 : المسألة الحل	المسألة رقم 16 : المسألة الحل
المسألة رقم 17 : المسألة الحل	المسألة رقم 18 : المسألة الحل
المسألة رقم 19 : المسألة الحل	المسألة رقم 20 : المسألة الحل
المسألة رقم 21 : المسألة الحل	المسألة رقم 22 : المسألة الحل

♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(u)}{u^n} \right] = 0$$

② تبين أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل بجوار $+\infty$.

③ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

دراسة إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} -\ln(x+1) = 0 &\Rightarrow e^{\ln(x+1)} = e^0 \\ &\Rightarrow x+1 = 1 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

- المنحنى (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1; 0[$
- المنحنى (C_f) يقطع (Δ) في $O(0; 0)$
- المنحنى (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; +\infty[$

④ تبين أنه: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x+1} (x+1) - \ln(x+1) \\ &= \frac{x^2 + 1 + 2x - 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1} [g(x)] &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= +\infty \end{aligned}$$

- حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + 2 + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(2x+2)(x+1) + 1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 + 1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 3}{x+1} \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

تعريفها.

- جدول التغيرات:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

② حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

- استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نجد:

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

① حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته

$$x = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$$

5 تبين أن يقبل نقطة انعطاف: (C_f)

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{(2x + 2 + \frac{1}{x+1})(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^4} \\
 &= \frac{(2(x+1) + \frac{1}{x+1})(x+1) - 2(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^3} \\
 &= \frac{2(x+1)^2 + 1 - 2x^2 + 4x + 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \\
 &= \frac{3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3}
 \end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^3 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

$$3 - 2\ln(x+1) = 0 \Rightarrow 2\ln(x+1) = 3$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x+1 = e^{\frac{3}{2}}$$

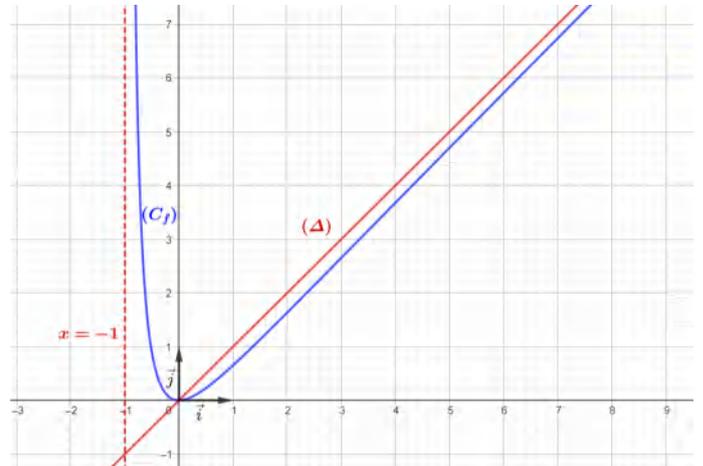
$$\Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} - 1$$

لدينا الدالة f'' تنعدم وتغير اشارتها، ومنه (C_f) يقبل نقطة

انعطاف فاصلتها $(e^{\frac{3}{2}} - 1)$

6 التمثيل البياني:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = -1$
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معدلته $x = 0$

2

أ/ تبين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{x+1 - x \ln x}{x(x+1)^2} \\ &= -\frac{x+1 - x \ln x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-x-1+x \ln x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة f :

لدينا: $x(x+1)^2 > 0$ على المجال $]0; +\infty[$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول التغيرات:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	1

3 اثبات أن $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha \ln \alpha - \alpha - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha \ln \alpha = \alpha + 1 \\ &\Rightarrow \ln \alpha = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha + 1} \\ &= 1 - \frac{\frac{\alpha + 1}{\alpha}}{\alpha + 1} \\ &= 1 - \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

- استنتاج حصر $f(\alpha)$:

(I)

1 دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\ln x - 1 - \frac{1}{x} \right) \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\underbrace{x \ln x}_0 - x - 1 \right] = -1$$

- المشتقة:

$$g'(x) = \ln x + \frac{1}{x}x - 1 = \ln x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-1	-2	$+\infty$

2 تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة مستمرة ورتيبة على المجال $]3.5; 3.6[$

ولدينا: $g(3.5) \times g(3.6) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]3.5; 3.6[$

3 استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1 حساب نهايات الدالة f :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right) = 1$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معدلته

$y = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

المعادلة لا تقبل حلول	$m < -\frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حلا وحيدا $x_0 = 1$	$m = -\frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حلين	$-\frac{1}{2} < m < 0$	لما
المعادلة تقبل حلا وحيدا	$m \geq 0$	لما

(IV)

1 التحقق أن $h(x) + 1 = f(x - 1)$

$$h(x) + 1 = 1 - \frac{\ln(x - 1)}{x} = f(x - 1)$$

2 استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) :

$$h(x) + 1 = f(x - 1) \text{ لدينا:}$$

$$h(x) = f(x - 1) - 1 \text{ ومنه:}$$

إذن: (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه \vec{u} حيث:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

لدينا: $3.5 < \alpha < 3.6$

$$\frac{1}{3.6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3.5} \text{ ومنه:}$$

$$-\frac{1}{3.5} < -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{3.6} \text{ ومنه:}$$

$$1 - \frac{1}{3.5} < 1 - \frac{1}{\alpha} < 1 - \frac{1}{3.6} \text{ ومنه:}$$

$$0.71 < f(\alpha) < 0.72 \text{ إذن:}$$

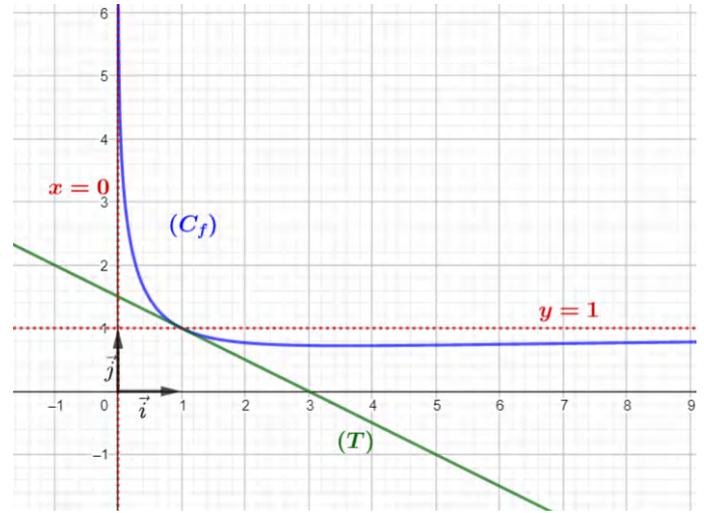
4 كتابة معادلة المماس (T) :

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 1) + 1$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

5 التمثيل البياني:



(III)

3 تبين أن المستقيمت (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة:

لدينا:

$$y_m = mx + \frac{3}{2}$$

$$\text{نأخذ } m = 0 \text{ نجد: } y_0 = \frac{3}{2}$$

إذن المستقيمت (Δ_m) تمر من الترتيبة $\frac{3}{2}$

$$\text{نأخذ } m = 1 \text{ نجد: } y_1 = x + \frac{3}{2}$$

لدينا:

$$y_1 = y_3 \Rightarrow x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 0$$

إذن المستقيمت (Δ_m) تمر من الفاصلة 0

ومنه المستقيمت (Δ_m) تمر بنقطة ثابتة $A(0; \frac{3}{2})$

4 المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x) = y_{(\Delta_m)}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] = 0$$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = -1$ بجوار $\pm\infty$

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = 1$ بجوار $-\infty$

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $y = 0$ بجوار $+\infty$

- حساب $f'(x)$:

لما $x \in \mathbb{R}_- - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-\left(-\frac{1}{x}\right)}{(\ln(-x))^2} + 1$$

$$= \frac{-1}{x(\ln(-x))^2} + 1$$

لاحظ أن $x < 0$ ومنه: $f'(x) > 0$

اذن:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$

لما $x \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$

$$f'(x) = -\left(\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right) - \left(-\frac{4\left(\frac{1}{x}\right)\ln x}{4(\ln x)^4}\right)$$

$$= -\frac{1}{x(\ln x)^2} + \frac{1}{x(\ln x)^4}$$

$$= \frac{-\ln x + 1}{x(\ln x)^3}$$

$$= \frac{-\ln x + 1}{[x(\ln x)^2] \ln x}$$

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $\frac{-\ln x + 1}{\ln x}$:

لدينا:

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ولدينا:

$$-\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

x	0	1	e	$+\infty$
$-\ln x + 1$	$+$	$+$	0	$-$
$\ln x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$

- جدول التغيرات:

① دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{\ln|x|} + x - 0}{x - 0} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \ln|x|} + \frac{x}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \ln(-x)} + 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{-x \ln(-x)} + 1 \right]$$

$$= -\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} [-x \ln(-x)] = 0^+$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليسار

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} - 0}{x - 0} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{2x(\ln x)^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \ln x} \left(1 - \frac{1}{2 \ln x} \right) \right]$$

$$= +\infty$$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليمين

- التفسير الهندسي:

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ومنه (C_f) يقبل

مماس عمودي معادلته $x = 0$

② دراسة تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right] = -\infty$$

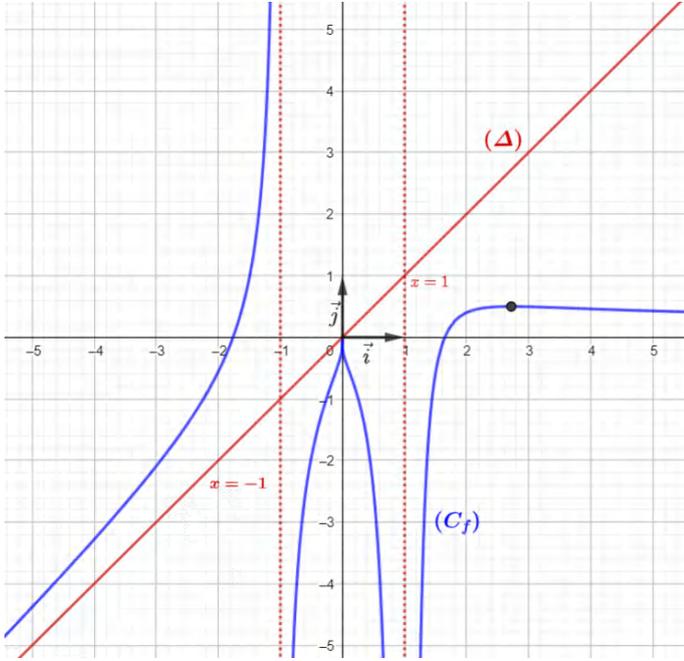
$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] = -\infty$$

6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = -1$ و $x = 1$ و $y = 0$
- نعين نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ)
- نُثَمِّ باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



7 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع

$$y_m = -(m^2 - e)$$

$$\text{لما } -(m^2 - e) < 0$$

$$\text{أي لما } m^2 - e > 0$$

$$\text{أي لما } m^2 > e$$

$$\text{أي لما } |m| > \sqrt{e}$$

$$\text{أي لما } m \in]-\infty; -\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[$$

المعادلة تقبل حلين موجبين وحلين سالبين.

$$\text{لما } -(m^2 - e) = 0$$

$$\text{أي لما } m^2 - e = 0$$

$$\text{أي لما } m^2 = e$$

$$\text{أي لما } |m| = \sqrt{e}$$

$$\text{أي لما } m \in \{-\sqrt{e}; \sqrt{e}\}$$

المعادلة تقبل حل موجب وحل معدوم وحل سالب .

$$\text{لما } 0 < -(m^2 - e) < \frac{1}{2}$$

$$\text{أي لما } -\frac{1}{2} < m^2 - e < 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0

3

أ/ تبين أن (C_f) يقبل (Δ) كمقارب مائل بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \frac{1}{\ln(-x)} - x \right] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) على المجال

$$\mathbb{R}^* - \{-1\}$$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{1}{\ln(-x)}$$

لدينا:

$$\ln(-x) = 0 \Rightarrow -x = e^0$$

$$\Rightarrow -x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1	0
$f(x) - y$	$+$	$-$	$-$

• (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[$

• (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-1; 0[$

4 حل المعادلة: $f(x) = 0$ في المجال $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2 \ln x - 1}{2(\ln x)^2} = 0$$

لدينا: $2(\ln x)^2 > 0$ ومنه:

$$2 \ln x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 1$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{e}$$

- الاستنتاج:

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة \sqrt{e}

5 تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة:

لدينا الدالة f مستمرة ومنتزيدة على المجال

$$]-1.77; -1.76[$$

ولدينا: $f(-1.77) = -0.01$ و $f(-1.76) = 0.008$

$$\text{أي: } f(-1.77) \times f(-1.76) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبلا حلا وحيدا في المجال $]-1.77; -1.76[$

أي لما: $m \in \left] -\sqrt{e - \frac{1}{2}}; \sqrt{e - \frac{1}{2}} \right[$
 المعادلة تقبل حل وحيد سالب

أي لما $e - \frac{1}{2} < m^2 < e$

أي لما $\sqrt{e - \frac{1}{2}} < |m| < \sqrt{e}$

أي لما $|m| > \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ و $|m| < \sqrt{e}$

أي لما $-\sqrt{e} < m < \sqrt{e}$

و $m \in \left] -\infty; -\sqrt{e - \frac{1}{2}} \right[\cup \left] \sqrt{e - \frac{1}{2}}; +\infty \right[$

أي لما: $m \in \left] -\sqrt{e - \frac{1}{2}}; -\sqrt{e} \right[\cup \left] \sqrt{e}; \sqrt{e + \frac{1}{2}} \right[$

المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

• لما $-(m^2 - e) = \frac{1}{2}$

أي لما: $m^2 - e = -\frac{1}{2}$

أي لما: $|m| = \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ أي $m^2 = e - \frac{1}{2}$

أي لما: $m = -\sqrt{e - \frac{1}{2}}$ و $m = \sqrt{e - \frac{1}{2}}$

المعادلة تقبل حل مضاعف وحل سالب

• لما $-(m^2 - e) > \frac{1}{2}$

أي لما: $m^2 - e < -\frac{1}{2}$

أي لما: $m^2 < e - \frac{1}{2}$

أي لما: $|m| < \sqrt{e - \frac{1}{2}}$

أي لما: $-\sqrt{e - \frac{1}{2}} < m < \sqrt{e - \frac{1}{2}}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ لأن}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - 2 \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2 + 2 \ln x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

②

أ/ برهان أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 5] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2 \frac{\ln x}{x} \right] = 0$$

إذن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{-2 \ln x}{x}$$

لدينا: $x > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$\begin{aligned} -2 \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	+	0	-

• (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]0; 1[$

• (C_f) يقطع (Δ) لما $x = 1$ أي في النقطة $A(1; 4)$

• (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]1; +\infty[$

③

أ/ تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]4.3; 4.4[$

$$\text{ولدينا: } f(4.3) \times f(4.4) < 0$$

$$\text{لأن: } f(4.4) \approx -0.07 \text{ و } f(4.3) \approx 0.02$$

(I)

①

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

ب/ تبين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{x^2}_{+\infty} \left(-1 - \frac{2}{\underbrace{x^2}_0} + 2 \frac{\ln x}{\underbrace{x^2}_0} \right) \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

② دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x + \frac{2}{x} \\ &= \frac{-2x^2 + 2}{x} \\ &= \frac{2(1 - x^2)}{x} \end{aligned}$$

لدينا: $x > 0$ لما $x \in D_g$ إذن الإشارة من البسط

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$x = -1$ مرفوض لأنه خارج المجال D_g ، إذن:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	-3	$-\infty$

③ حساب $g(1)$ ، ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$:

$$g(1) = -3$$

لدينا الدالة g تبلغ قيمة حدية عظيمة عند $(1; -3)$

إذن الدالة g سالبة تماما على \mathbb{R}_+^*

(II)

①

أ/ حساب نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-x + 5 - 2 \frac{\ln x}{\underbrace{x}_{-\infty}} \right) = +\infty$$

6 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}(5 - m)x - 2 \ln x = 0 &\Rightarrow -2 \ln x = -(5 - m)x \\ \Rightarrow -\frac{2 \ln x}{x} &= -(5 - m) \\ \Rightarrow -\frac{2 \ln x}{x} &= -5 + m \\ \Rightarrow -\frac{2 \ln x}{x} + 5 &= m \\ \Rightarrow -\frac{2 \ln x}{x} - x + 5 &= -x + m \\ \Rightarrow f(x) &= -x + m\end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع

$$y_m = -x + m$$

- لما $m < 5 - 2e^{-1}$ المعادلة لا تقبل حلول
- لما $m = 5 - 2e^{-1}$ المعادلة تقبل حل وحيد
- لما $e < m < 5$ المعادلة تقبل حلين
- لما $m \geq 5$ المعادلة تقبل حل وحيد

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث: $4.3 < \alpha < 4.4$

$$\text{ب/ تبرير أن } \ln \alpha = \frac{-\alpha^2 + 5\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned}f(\alpha) = 0 &\Rightarrow -\alpha + 5 - 2 \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} &= \frac{\alpha - 5}{2} \\ \Rightarrow \ln \alpha &= \frac{-\alpha^2 + 5\alpha}{2}\end{aligned}$$

4 تبين أنه يوجد مماس (T) لـ (C_f) يوازي (Δ) :

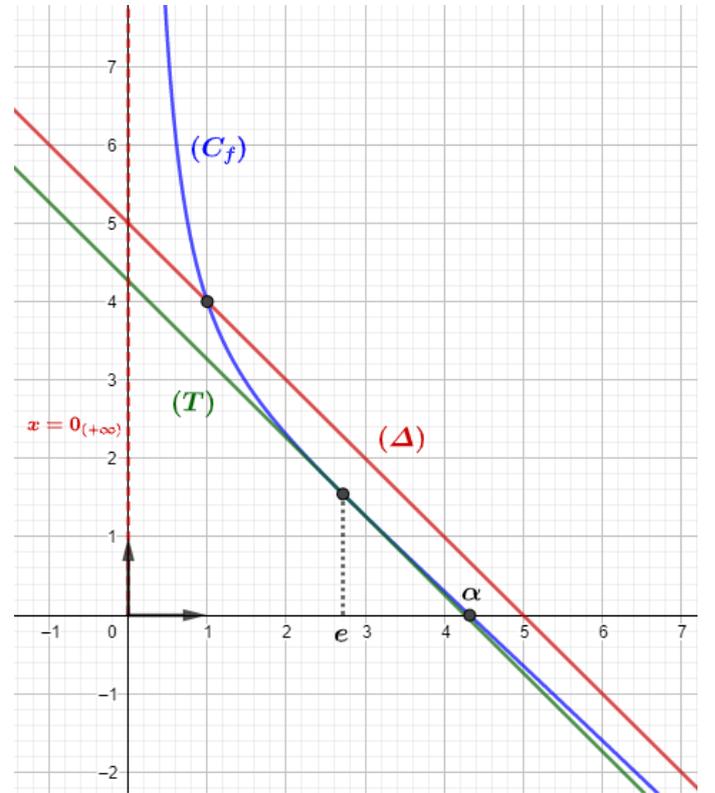
يوجد مماس يوازي (Δ) معناه: $f'(a) = -1$

$$\begin{aligned}f'(a) = -1 &\Rightarrow \frac{-a^2 - 2 + 2 \ln a}{a^2} = -1 \\ \Rightarrow -a^2 - 2 + 2 \ln a &= -a^2 \\ \Rightarrow -2 + 2 \ln a &= 0 \\ \Rightarrow \ln a &= 1 \\ \Rightarrow a &= e\end{aligned}$$

- كتابة معادلة لـ (T) :

$$\begin{aligned}y_{(T)} &= f'(e)(x - e) + f(e) \\ &= -1(x - e) - e + 5 - \frac{2}{e} \\ &= -x + 5 - 2e^{-1}\end{aligned}$$

5 ارسم كل من (Δ) ، (T) و (C_f) :



$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(-t)] \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} [-f(t)] \\
&= - \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)] \\
&\quad \underbrace{\lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)]}_{\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

- تبين أن: $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$

بنفس الفكرة السابقة (نضع $x = -t$) نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$$

- تبين أن: $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$

لدينا:

$$\begin{aligned}
f(-\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\
f(-\sqrt{3}) &= -f(\sqrt{3}) \\
\Rightarrow -f(\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\
\Rightarrow f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

ج/ اكمل جدول تغيرات الدالة f السابق:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-\sqrt{3})$		$+\infty$	$f(\sqrt{3})$	$+\infty$

حيث:

$$\begin{aligned}
f(-\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\
f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

② التمثيل البياني:

قبل أن نشرع في التمثيل البياني، نستخرج من جدول التغيرات المستقيمات المقاربة

لدينا:

- (C_f) يقبل مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$.
- (C_f) يقبل مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$.

(1)

①

أ/ تعيين إشارة $f'(x)$ مع التبرير:

نضع α, β, γ حيث:

x	$-\infty$	α	β	1	$\sqrt{3}$	γ
$f'(x)$	\dots	0	$-$		\dots	0
						$+$

لدينا الدالة f فردية، معناها:

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

ومنه:

$$-f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

لدينا من جدول التغيرات (المُعطى):

$$x \in]\alpha; \beta[\text{ لما } f'(x) < 0$$

$$-x \in]\alpha; \beta[\text{ لما } \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in]-\beta; -\alpha[\text{ لما } f'(x) < 0 \Leftrightarrow$$

ولدينا كذلك:

$$x \in]\sqrt{3}; \gamma[\text{ لما } f'(x) > 0$$

$$-x \in]\sqrt{3}; \gamma[\text{ لما } \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in]-\gamma; -\sqrt{3}[\text{ لما } f'(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt{3} \text{ ولدينا: } f'(x) = 0$$

$$-x = \sqrt{3} \text{ معناها } f'(-x) = 0$$

$$x = -\sqrt{3} \text{ ومنه}$$

$$\gamma = +\infty \text{ و } \beta = -1 \text{ و } \alpha = -\sqrt{3} \text{ ومنه:}$$

اذن:

$$x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[\text{ لما } f'(x) > 0$$

$$x \in]-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}[\text{ لما } f'(x) < 0$$

ب/ تبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -\infty$

لدينا من الجدول السابق: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$

نضع $x = -t$

(الدالة f فردية أي: $f(-t) = -f(t)$)

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{-t \rightarrow -\infty} [f(-t)]$$

$$-\frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)}+\frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}+1)}=0$$

$$\Rightarrow c(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}+1)=c(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)$$

$$\Rightarrow c(4+2\sqrt{3})-2\sqrt{3}-2=c(4-2\sqrt{3})+2\sqrt{3}-2$$

$$\Rightarrow c(4+2\sqrt{3})-c(4-2\sqrt{3})-4\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow c(4\sqrt{3})=4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{c=1}$$

نعوض قيمة c في (*) نجد:

$$a-\frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)}=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2}$$

$$\Rightarrow a=\frac{2}{4-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a=1}$$

ولدينا:

$$f(\sqrt{3})=\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}+b+\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)=\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow b+\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)=\ln(2+\sqrt{3})$$

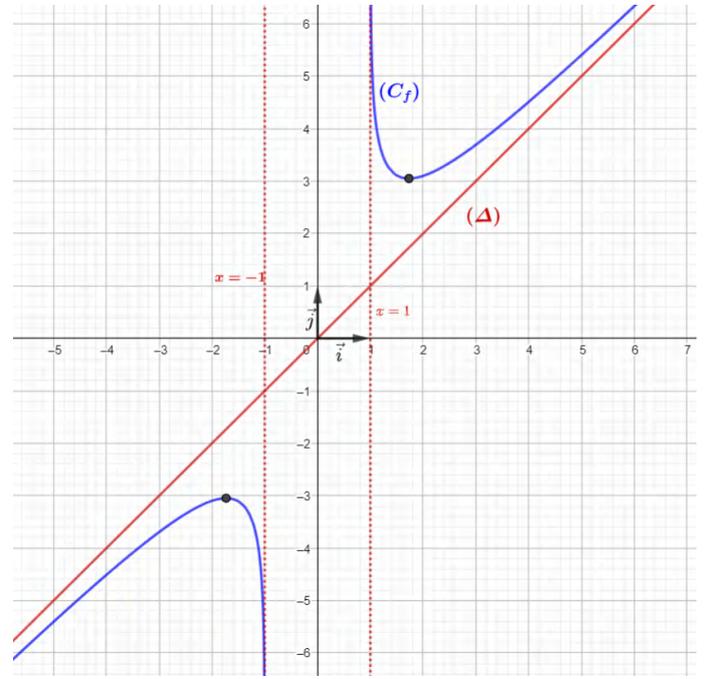
$$\Rightarrow b=\ln(2+\sqrt{3})-\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}}\right)$$

$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}\right)$$

$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b=\ln\left(\frac{2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$$



③ تبين أن: $a=1$, $b=0$ و $c=1$:

لدينا:

$$f'(x)=a+\frac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{c+\frac{2}{x-1}}$$

$$=a-\frac{\frac{2}{(x-1)^2}}{\frac{c(x-1)+2}{x-1}}$$

$$=a-\frac{\frac{2}{x-1}}{c(x-1)+2}$$

$$=a-\frac{2}{c(x-1)^2+2(x-1)}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} f'(\sqrt{3})=0 \\ f'(-\sqrt{3})=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-\frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)}=0 \\ a-\frac{2}{c(-\sqrt{3}-1)^2+2(-\sqrt{3}-1)}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-\frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)}=0 \dots (*) \\ a-\frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}+1)}=0 \dots (**) \end{cases}$$

بطرح (*) من (**): نجد:

أي لما: $m \in]f(-\sqrt{3}); f(\sqrt{3})[$

المعادلة لا تقبل حلول

• لما $m = f(\sqrt{3})$

للمعادلة حل مضاعف هو $x = \sqrt{3}$

• لما $m > f(\sqrt{3})$

أي لما $m \in]f(\sqrt{3}); +\infty[$

للمعادلة حلان موجبان

(II) دراسة تغيرات الدالة g :

لدينا: $g(x) = \ln(f(x))$

نلاحظ أن: $g(x) = k \circ f = k(f(x))$

حيث: $k(x) = \ln x$

- حساب النهايات:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x)] = +\infty$

اذن: $\lim_{x \rightarrow 1} [g(x)] = +\infty$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x)] = +\infty$

اذن: $\lim_{x \rightarrow 1} [g(x)] = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

لدينا: $f(x) > 0$ لما $x \in]1; +\infty[$

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\sqrt{3})$	$+\infty$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{b=0}$$

4 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{xe^m - xe^x - e^m - e^x}{e^m - e^x} = 0$$

$$\Rightarrow xe^m - xe^x - e^m - e^x = 0$$

$$\Rightarrow e^m(x-1) - e^x(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow e^m(x-1) = e^x(x+1)$$

$$\Rightarrow e^m = e^x \left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m = \ln \left[e^x \times \left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right]$$

$$\Rightarrow m = \ln(e^x) + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(\frac{x+1+1-1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى

$$(C_f) \text{ مع المستقيمات ذات المعادلة } y_m = m$$

ومنه:

• لما $m < f(-\sqrt{3})$

أي لما: $m \in]-\infty; f(-\sqrt{3})[$

للمعادلة حلان سالبان

• لما $m = f(-\sqrt{3})$

للمعادلة حل مضاعف هو $x = -\sqrt{3}$

• لما $f(-\sqrt{3}) < m < f(\sqrt{3})$

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 0$ بجوار $-\infty$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$
- ② دراسة اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(3 + \ln x) + \frac{1}{x}e^{-x} \\ &= e^{-x} \left(-3 - \ln x + \frac{1}{x} \right) \\ &= g(x)e^{-x} \end{aligned}$$

لدينا: $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

$$\textcircled{3} \text{ تبيين أن } \frac{1}{\alpha e^\alpha} = f(\alpha)$$

$$\text{لدينا: } g(\alpha) = 0$$

$$\text{ومنه: } -3 - \ln \alpha + \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\text{إذن: } \ln \alpha = -3 + \frac{1}{\alpha}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= e^{-\alpha}(3 + \ln \alpha) \\ &= e^{-\alpha} \left(3 - 3 + \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= e^{-\alpha} \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha e^\alpha} \end{aligned}$$

- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

$$\text{لدينا: } 0.45 < \alpha < 0.46$$

$$\text{ومنه: } 1.57 < e^\alpha < 1.58$$

$$\text{ومنه: } 0.63 < \frac{1}{e^\alpha} < 0.64 \dots (*)$$

$$\text{لدينا: } 0.45 < \alpha < 0.46$$

$$\text{ومنه: } 2.17 < \frac{1}{\alpha} < 2.22 \dots (**)$$

بضرب (*) في (**): نجد:

$$1.38 < \frac{1}{\alpha e^\alpha} < 1.42$$

④ حل المعادلة $f(x) = 0$ ، وتفسير النتيجة هندسيا:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow e^{-x}(3 + \ln x) = 0 \\ &\Rightarrow 3 + \ln x = 0 \\ &\Rightarrow \ln x = -3 \\ &\Rightarrow x = e^{-3} \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة e^{-3}

(I)

① حساب نهاية الدالة g :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty \end{cases} \text{ لأن:}$$

② دراسة تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{x+1}{x^2} \right)$$

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لدينا: $g'(x) < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

③

أ/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في

المجال $]0; +\infty[$:

الدالة g مستمرة ورتيبة على $]0; +\infty[$ ، وصورة هذا المجال هي $] -\infty; +\infty [$ ، ومنه فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$

ب/ التحقق أن $0.45 < \alpha < 0.46$:

$$\text{لدينا: } g(0.45) = 0.02 \text{ و } g(0.46) = -0.05$$

$$\text{أي } g(0.45) \times g(0.46) < 0$$

$$\text{إذن } 0.45 < \alpha < 0.46$$

ج/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II)

① حساب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$ ، وتفسير النتائج

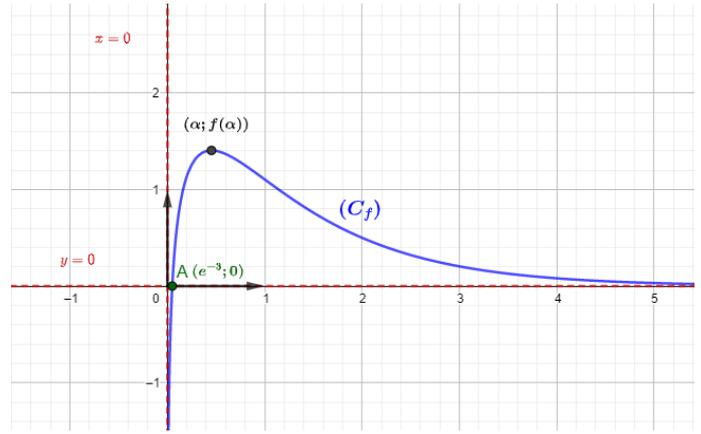
هندسيا:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x} \right) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

التفسير الهندسي:

5 إنشاء المنحنى (C_f) :



(III)

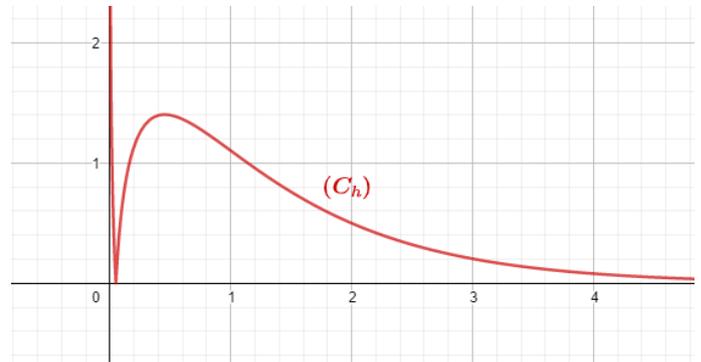
1 كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{|3 + \ln x|}{e^x} \\ &= \begin{cases} \frac{3 + \ln x}{e^x} ; & x \geq e^{-3} \\ -\frac{(3 + \ln x)}{e^x} ; & x < e^{-3} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x) ; & x \geq e^{-3} \\ -f(x) ; & x < e^{-3} \end{cases} \end{aligned}$$

2 إنشاء المنحنى الممثل للدالة h :

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq e^{-3}$

وينظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما $x < e^{-3}$



ج / تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

5 دراسة الوضع النسبي بين (D) و (C_f) :ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln x \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \frac{1}{2} \ln x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \ln x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

ومنه:

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$\frac{1}{2} \ln x - 1$	-	-	0	+
$f(x) - y$	+	0	-	+

• (C_f) فوق (D) لما: $x \in]0; 1[\cup]e^2; +\infty[$ • (C_f) يقطع (D) في النقطتين: $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ و $B\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$ • (C_f) تحت (D) لما: $x \in]1; e^2[$ 6 تعيين احداثيي النقطة ω :المماس (T) يوازي المستقيم (D) معناه:

$$f'(a) = 1 \Rightarrow \frac{a - 1 + \ln a}{a} = 1$$

$$\Rightarrow a - 1 + \ln a = a$$

$$\Rightarrow \ln a = 1$$

$$\Rightarrow a = e$$

ومنه:

$$(T): y = f'(e)(x - e) + f(e)$$

$$= x - e + e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}$$

$$= x$$

اذن المستقيم (T) مماس لـ (C_f) في النقطة $\omega(e; e)$

3

أ / حساب $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{-\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right)}_{-\infty} \right]$$

$$= +\infty$$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$.ب / حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{x}_{+\infty} + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right)}_{+\infty} \right]$$

$$= +\infty$$

4

أ / التبيين:

نضع: الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ ب:

$$h(x) = x - 1 + \ln x$$

لدينا:

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x}$$

لدينا: $h'(x) > 0$ ولدينا: $h(1) = 0$ ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نجد أن: لكل x من المجال $]0; 1]$:

$$(x - 1) + \ln x \leq 0$$

وأن لكل x من المجال $]1; +\infty[$: $(x - 1) + \ln x \geq 0$:ب / تبين أنه من أجل كل من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} \ln x$$

$$= \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

 $x > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة $h(x)$

أ/ تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x - (x - 1 + \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{x + 1 - x + 1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{2 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2 - \ln x)$

$$\begin{aligned} 2 - \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = 2 \\ &\Rightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

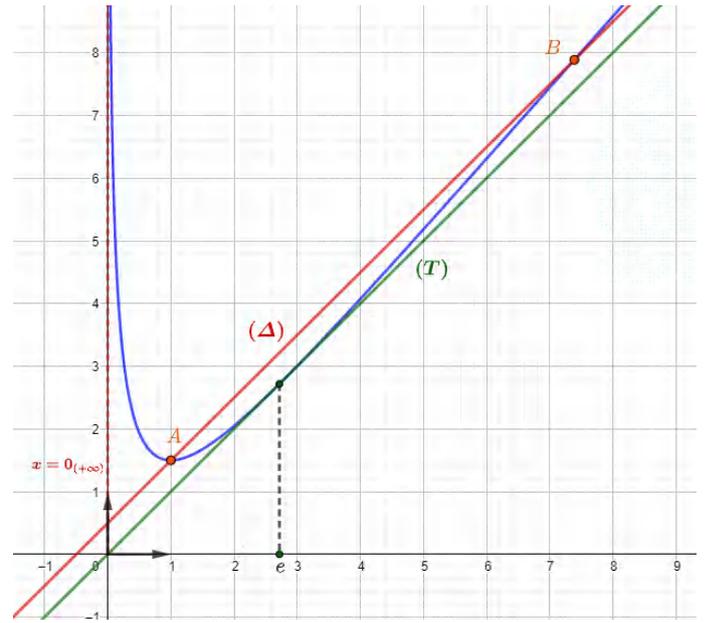
ومنه:

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

لدينا $f''(x)$ تنعدم وتغير اشارةها، ومنه (C_f) يقبل نقطة

انعطاف $B\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$

8 التمثيل البياني:



9 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع

$$y_m = x - 2m$$

ومنه:

$$m > 0 \quad \bullet \text{لما } -2m < 0 \text{ أي لما}$$

المعادلة لا تقبل حلول

$$m = 0 \quad \bullet \text{لما } -2m = 0 \text{ أي لما}$$

المعادلة تقبل حل مضاعف

$$-\frac{1}{4} < m < 0 \quad \bullet \text{لما } 0 < -2m < \frac{1}{2} \text{ أي لما}$$

المعادلة تقبل حلان

$$m = -\frac{1}{4} \quad \bullet \text{لما } -2m = \frac{1}{2} \text{ أي لما}$$

المعادلة تقبل حلان أحدهما مضاعف

$$m < -\frac{1}{4} \quad \bullet \text{لما } -2m > \frac{1}{2} \text{ أي لما}$$

المعادلة تقبل حلان

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.72; -0.71[$

ج / استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$:

x	-1	α	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	-

(II)

1 حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} [f(x)] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{x} \right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(x+1)}{x} \right] = 1$$

نهاية شهيرة ويمكن اثباتها بالعدد المشتق

نضع: $k(x) = \ln(x+1)$

ومنه: $k'(x) = \frac{1}{x+1}$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1) - 0}{x - 0} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{k(x) - k(0)}{x - 0} \right] = k'(0) = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 0$$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 0$

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

أ / تبين أنه من أجل كل x من D_f $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

(I)

1 حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -1} [g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x}{x+1} \right] = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة g :

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2 \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1-2x-2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط

$$-(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-\infty$

3

أ / حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

ب / تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين:

لدينا $h(0) = 0$

اذن منحنى الدالة g يقطع محور الفواصل في المبدأ

ولدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال

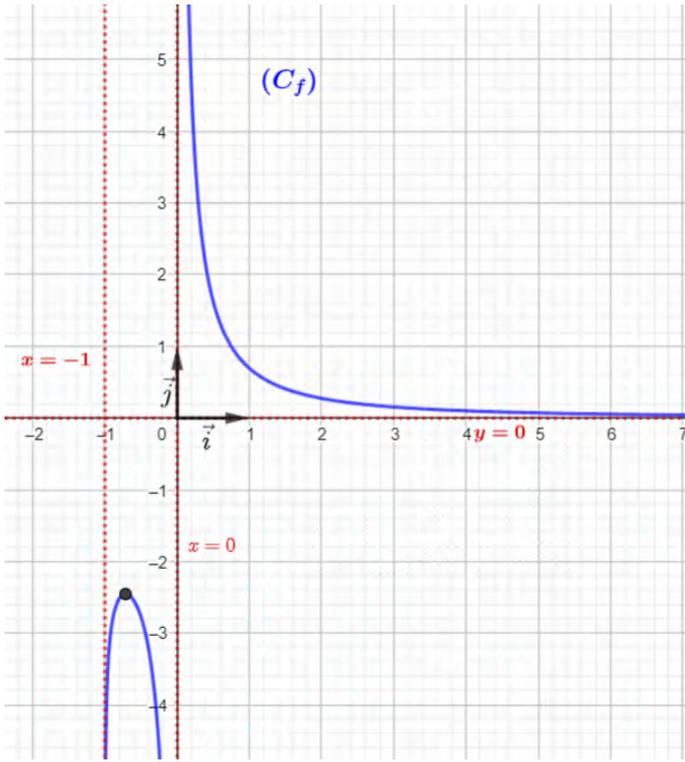
$]-0.72; -0.71[$

ولدينا $g(-0.72) \times g(-0.71) < 0$

لأن: $g(-0.72) = -0.02$ و $g(-0.71) = 0.02$

$$-2.56 < f(\alpha) < -2.43$$

③ التمثيل البياني:



④ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = \ln m$ وهي:

• لما $\ln m < f(\alpha)$ أي لما: $m < e^{f(\alpha)}$
للمعادلة حلان سالبان

• لما $\ln m = f(\alpha)$ أي لما: $m = e^{f(\alpha)}$
للمعادلة حل مضاعف

• لما $f(\alpha) < \ln m < 0$ أي لما: $e^{f(\alpha)} < m < 1$
المعادلة لا تقبل حلول

• لما $\ln m > 0$ أي لما: $m > 1$
للمعادلة حل وحيد موجب

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} x^2 - 2x \ln(x+1) \\ &= \frac{1}{x+1} x - 2 \ln(x+1) \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

ب / استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

x	-1	α	0	$+\infty$
g(x)	-	0	+	-
x^3	-	-	-	+
f'(x)	+	0	-	-
f(x)	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$	$+\infty$

② تبين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2 \ln(\alpha+1) \\ &\Rightarrow 2 \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{\alpha+1} \\ &\Rightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\ln(\alpha+1)}{\frac{\alpha^2}{\alpha}} \\ &= \frac{2(\alpha+1)}{\alpha^2} \\ &= \frac{1}{2\alpha^2(\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)} \end{aligned}$$

- حصر f(α):

لدينا:

$$\begin{aligned} -0.72 &< \alpha < -0.71 \\ 0.28 &< \alpha + 1 < 0.29 \dots (*) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$-1.44 < 2\alpha < -1.42 \dots (**)$$

بضرب (*) في (**): نجد:

$$\begin{aligned} -0.41 &< 2\alpha(\alpha+1) < -0.39 \\ -2.56 &< \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)} < -2.43 \end{aligned}$$

اذن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب/ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e}{(x+1)^2} \\ &+ \frac{\frac{1}{x+1}(x+1)^2 - 2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-e(x+1)^2 + (x+1) - 2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-e(x+1) + 1 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \\ &= -\frac{e(x+1) - 1 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{-g(x)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

ج/ دراسة اتجاه تغير الدالة:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $[-g(x)]$

لأن: $(x+1)^3 > 0$ لما $x \in D_f$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	3.16	0

د/ رسم المنحنى (C_f) :

- نرسم **المستقيم المقارب الأفقي** ذو المعادلة $y = 0$
- نرسم **المستقيم المقارب العمودي** ذو المعادلة $x = -1$
- نعين **النقطة α**
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نكمل رسم (C_f)

(I)

1 دراسة تغيرات الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

- تعيين النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1} g(x) &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= +\infty \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= e + \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{ex + e + 2}{x+1} > 0 \end{aligned}$$

ومنه:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2 تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$-0.34 < \alpha < -0.33$$

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$

ولدينا: $g(-0.34) \times g(-0.33) < 0$

لأن: $g(-0.33) \approx 0.02$ و $g(-0.34) \approx -0.04$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.34 < \alpha < -0.33$

3 استنتاج إشارة $g(x)$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1

أ/ تبين أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{x+1} \left(e + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$

- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

ج / المناقشة البيانية:

$$k(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_k) مع المستقيمات

ذات المعادلة $y_m = m$.

$$k(0) = f(0) = e$$

ومنه المناقشة:

لما $m < e$ المعادلة تقبل حلين متميزين

لما $m = e$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول: حل معدوم

وحل موجب وآخر سالب

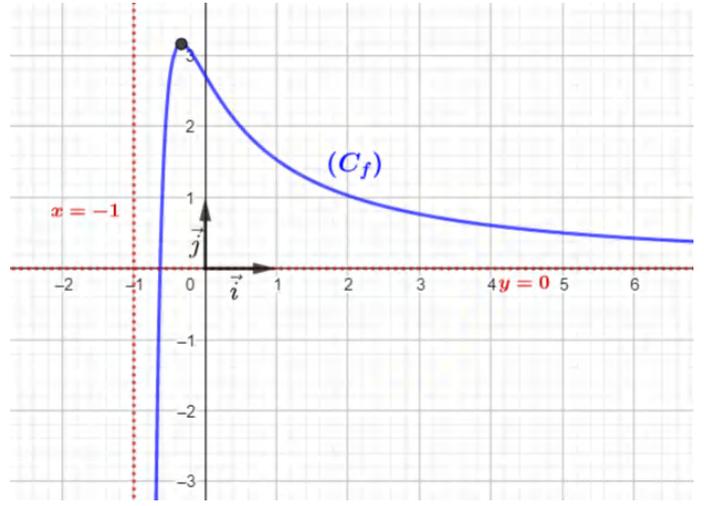
لما $e < m < f(\alpha)$ المعادلة أربع حلول: حلين موجبين

وأخرين سالبين

لما $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين مضاعفين أحدهما

موجب والآخر سالب

لما $m > f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول



2

أ / تبين أن الدالة k زوجية:

$$\begin{aligned} k(-x) &= f(-|-x|) \\ &= f(-|x|) \\ &= k(x) \end{aligned}$$

ومنه k دالة زوجية.

ب / تبين كيف يمكن استنتاج (C_k) انطلاقاً من (C_f) :

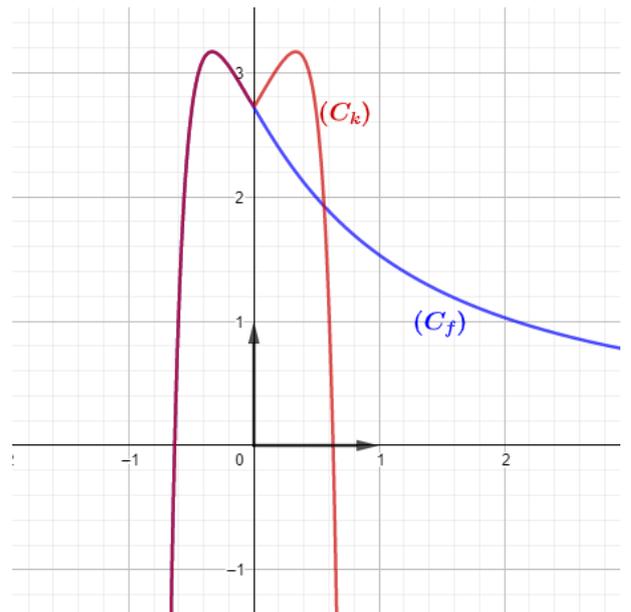
لدينا:

$$\begin{aligned} k(x) &= f(-|x|) \\ &= \begin{cases} f(-x) & ; x \in [0; 1[\\ f(-(-x)) & ; x \in]-1; 0[\end{cases} \\ &= \begin{cases} f(-x) & ; x \in [0; 1[\\ f(x) & ; x \in]-1; 0[\end{cases} \end{aligned}$$

ومنه (C_k) ينطبق على (C_f) في المجال $] - 1; 0[$

وبما أن الدالة k زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.

- رسم (C_k) :



$$= \frac{1}{x^2} (\ln x + x - 3)$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

③ تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha^2} = 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماس مواز لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات

الفاصلة α .

④ تبين أن: $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln \alpha + \alpha - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \ln \alpha = 3 - \alpha$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (\ln \alpha - 2)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (3 - \alpha - 2)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (1 - \alpha)$$

$$= \frac{(\alpha - 1)(1 - \alpha)}{\alpha}$$

$$= \frac{-\alpha(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

⑤ حل المعادلة $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right) (\ln x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = 0 \\ \ln x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \ln x = 2 \end{cases}$$

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [g(x)] = -\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

② تبين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومنتزعة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ولدينا: $g(2.2) \times g(2.11) < 0$

لأن: $g(2.2) = -0.01$ و $g(2.11) = 0.002$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث: $2.2 < \alpha < 2.21$

③ تعيين إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

① حساب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$$

②

أ/ حساب $f'(x)$ ، ودراسة اشارتها:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} (\ln x - 2) + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} (\ln x - 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

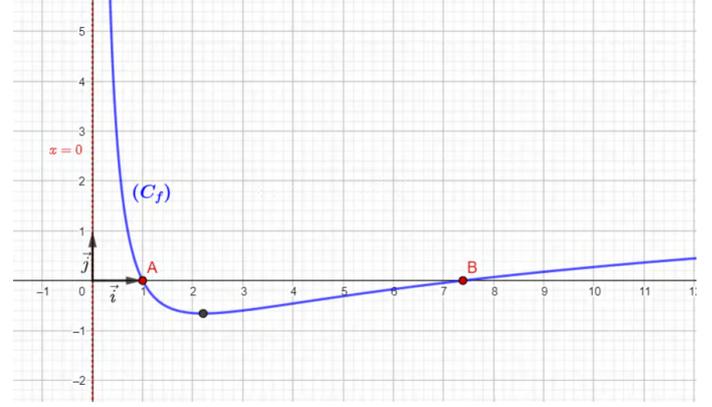
$$= \frac{1}{x^2} (\ln x - 2 + x - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين: $A(1; 0)$ و $B(e^2; 0)$.

6 التمثيل البياني:



$$= \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{x^2} - 1 + 2 \ln \frac{1}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} g \left(\frac{1}{x} \right)$$

ب/ تبين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \frac{1}{\alpha}]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{\alpha}; +\infty[$:

لدينا: $x \in]0; +\infty[$ لما $\frac{1}{x^2} > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g \left(\frac{1}{x} \right)$

لدينا:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

ومنه:

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f \left(\frac{1}{\alpha} \right)$	
	$-\infty$		$-\infty$

3

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 + \ln x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته:

$$y_{(\Delta)} = -x - 2$$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \frac{3 + \ln x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow 3 + \ln x = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = -3$$

$$\Rightarrow x = e^{-3}$$

ومنه:

x	0	e^{-3}	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	-	0	+

• (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; e^{-3}[$

• (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(e^{-3}; -e^{-3} - 2)$

(I)

1 تبين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = 2 \frac{1}{x} - \left(-\frac{2}{x^3} \right) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2 + 2}{x^3} > 0$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R}_+^*

2

أ/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا الدالة g مستمرة ورتبية على المجال $]0; +\infty[$

ولدينا: $g(1.9) \times g(1.89) < 0$

لأن: $g(-1.9) \approx -0.01$ و $g(1.9) \approx 0.01$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} (-x^2 - 2x + 3 + 2 \ln x) \right) = -\infty$$

التفسير الهندسي:

(C_f) قبل مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 0$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x - 2 + \frac{3}{\frac{x}{0}} + 2 \frac{\ln x}{\frac{x}{0}} \right) = -\infty$$

2

أ/ تبين أنه $f'(x) = \frac{1}{x^2} g \left(\frac{1}{x} \right)$:

$$f'(x) = -1 + \frac{2 \frac{1}{x} x - 3 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$= -1 + \frac{-1 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 1 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} (-x^2 - 1 - 2 \ln x)$$

(III)

1 تبين أن الدالة h زوجية:

$$\begin{aligned} h(-x) &= |-x| + 2 - \frac{3 + \ln((-x)^2)}{|-x|} \\ &= |x| + 2 - \frac{3 + \ln(x^2)}{|x|} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

2 التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$$:h(x) = -f(x) \quad]0; +\infty[$$

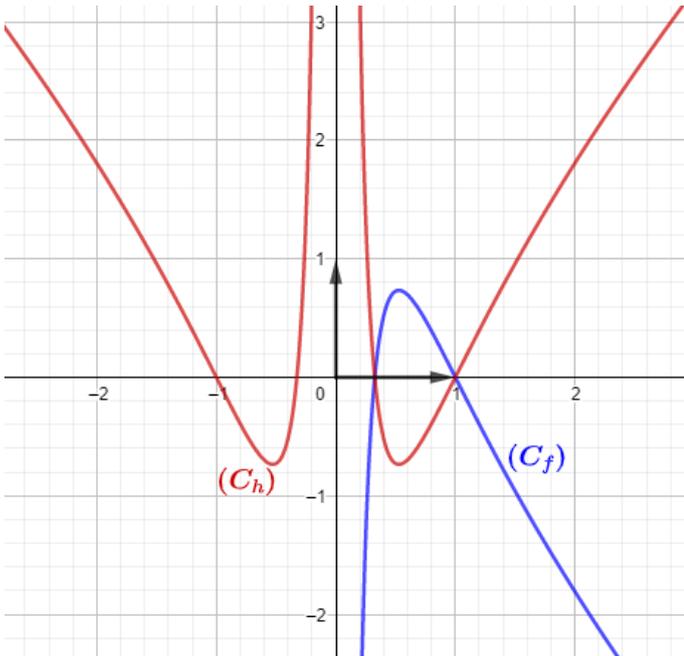
$$\begin{aligned} h(x) &= |x| + 2 - \frac{3 + \ln(x^2)}{|x|} \\ &= \begin{cases} x + 2 - \frac{3 + \ln(x^2)}{x} & ; x > 0 \\ -x + 2 - \frac{3 + \ln((-x)^2)}{-x} & ; x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\left(-x - 2 + \frac{3 + 2 \ln(x)}{x}\right) & ; x > 0 \\ -x + 2 + \frac{3 + 2 \ln(-x)}{x} & ; x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -f(x) & ; x > 0 \\ -x + 2 + \frac{3 + 2 \ln(-x)}{x} & ; x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3 شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) :

لما $x \in \mathbb{R}_+^*$:

(C_h) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب



• $x \in]e^{-3}; +\infty[$ لما (Δ) فوق (C_f)

4

أ/ تبين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1

لدينا:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 1 - 2 \ln x}{x^2}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(-2x - 2\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(-x^2 - 1 - 2 \ln x)}{x^4} \\ &= \frac{-2x^3 + 2x + 2x^3 + 2x + 4x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{4x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{4 \ln x}{x^3} \end{aligned}$$

لدينا: $x^3 > 0$ لما $x \in \mathbb{R}_+^*$

ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $\ln x$

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

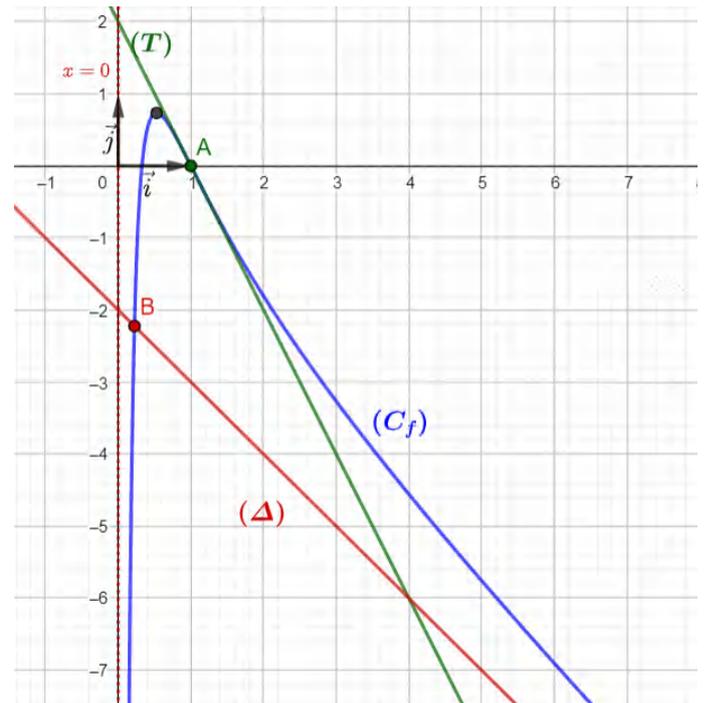
المشتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها

إذن (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها 1

ب/ كتابة معادلة مماس لـ (C_f) عند A :

$$\begin{aligned} y(T) &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= -2(x - 1) \\ &= -2x + 2 \end{aligned}$$

5 رسم (T) ، (Δ) ، و (C_f) :



x	0	m	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أنها تبلغ قيمة حدية دنيا موجبة 0

وعليه فالدالة g موجبة على $[0; +\infty[$

③ استنتاج مما سبق أن (C) يقع تحت أي مماس له:

ندرس الوضعية بين (C) و (T_m)

$$\begin{aligned} y_{(C)} - y_{(T)} &= \ln x - \left(\frac{1}{m}x - 1 + \ln m \right) \\ &= \ln x - \frac{1}{m}x + 1 - \ln m \\ &= - \left(-\ln x + \frac{1}{m}x - 1 + \ln m \right) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

إشارة الفرق عكس إشارة $g(x)$

وعليه فإن (C) يقع تحت أي مماس له

(II)

①

أ/ استنتاج أنه من أجل كل عددين حقيقيين موجبين

$$\ln x \leq \ln m + \frac{x-m}{m}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) \geq 0 &\Rightarrow \frac{1}{m}x - 1 + \ln m - \ln x \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{m}x - 1 + \ln m \geq \ln x \\ &\Rightarrow \frac{x-m}{m} + \ln m \geq \ln x \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما

$$\ln(m+1) - \ln m \leq \frac{1}{m}$$

(III)

①

أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$$

(I)

①

أ/ اثبات أن $y = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m$ معادلة لـ (T_m) :

لدينا: $f(x) = \ln x$

ومنه:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$y_{(T_m)} = f'(m)(x - m) + f(m)$$

$$= \frac{1}{m}(x - m) + \ln m$$

$$= \frac{1}{m}x - 1 + \ln m$$

ب/ التحقق أن المماس (T_e) للمنحنى (C) في النقطة

$B(e; 1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم:

لدينا:

$$y_{(T_e)} = \frac{1}{e}x - 1 + \ln e = \frac{1}{e}x$$

نعوض النقطة $O(0; 0)$ في معادلة المستقيم (T_e) نجد:

$$0 = \frac{1}{e}(0) \Rightarrow 0 = 0$$

إذن (T_e) يمر بمبدأ المعلم

②

أ/ دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{x} + \frac{\ln m}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) \right)$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

- دراسة إشارة $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{m} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-m}{mx} \end{aligned}$$

لدينا:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-m}{mx} = 0$$

$$\Rightarrow x - m = 0$$

$$\Rightarrow x = m$$

$$\text{ب/ اثبات أن: } \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$$

لدينا سابقا:

$$x - 1 \geq \ln x$$

$$\text{بوضع: } x = \frac{1}{1+t}$$

نجد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t} - 1 &\geq \ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \\ \Rightarrow \frac{1-1-t}{1+t} &\geq -\ln(1+t) \\ \Rightarrow \frac{-t}{1+t} &\geq -\ln(1+t) \\ \Rightarrow \frac{t}{1+t} &\leq \ln(1+t) \end{aligned}$$

$$\text{ج/ استنتاج صحة المتباينة } \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$$

لدينا سابقا:

$$\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \dots (*)$$

ولدينا أيضا:

$$\ln(t+1) \leq t \dots (**)$$

من (*) و (**): نجد أن:

$$\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$$

لدينا: $f'(x) > 0$ لما $x \in]0; +\infty[$

ومنه فالدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

ب/ استنتاج صحة المتباينة $\ln x \leq x - 1$

لدينا مما سبق

$$\frac{x-m}{m} + \ln m \geq \ln x$$

بأخذ $m = 1$ نجد:

$$x - 1 \geq \ln x$$

②

أ/ اثبات أن: $\ln(t+1) \leq t$

يكفي أن نثبت أن: $\ln(t+1) - t \leq 0$

نضع: $h(t) = \ln(t+1) - t$

لدينا: $h'(t) = \frac{1}{t+1} - 1 = \frac{-t}{t+1}$

لدينا: $t > -1$ لما $t+1 < 0$ ومنه إشارة $h'(t)$ من إشارة

$(-t)$

$$-t = 0 \Rightarrow t = 0$$

ومنه الدالة h متناقصة تماما لما $t > -1$

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		0	
	$-\infty$		$-\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نلاحظ أنها تبلغ قيمة حدية كبرى

قيمتها 0

وعليه فالدالة h سالبة على $] -1; +\infty[$

ومنه: $\ln(t+1) - t \leq 0$

وعليه: $\ln(t+1) \leq t$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \right] = 0 \text{ لأن}$$

② تبين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{\frac{1}{x}x - (2 + \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 - 1 - \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{x^2 + 1 + \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- جدول التغيرات:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

③ تبين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha^2 + 1 + \ln \alpha = 0 \\ &\Rightarrow \ln \alpha = -(\alpha^2 + 1) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha} \\ &= \frac{-\alpha^2 + 2 - (\alpha^2 + 1)}{\alpha} \\ &= \frac{-2\alpha^2 + 1}{\alpha} \\ &= 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right) \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} 0.32 < \alpha < 0.33 \\ -0.33 < -\alpha < -0.32 \dots (1) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} 0.32 < \alpha < 0.33 \\ 0.64 < 2\alpha < 0.66 \\ \frac{1}{0.66} < \frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{0.64} \end{aligned}$$

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 1}{x} \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

② تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا: الدالة g مستمرة ومنتزيدة على مجال تعريفها

ولدينا: $g(0.32) = -0.03$ و $g(0.33) = 0.0002$

أي: $g(0.33) \times g(0.32) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.

③ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

① حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} \right] = -\infty$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته:

$$x = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right] = -\infty$$

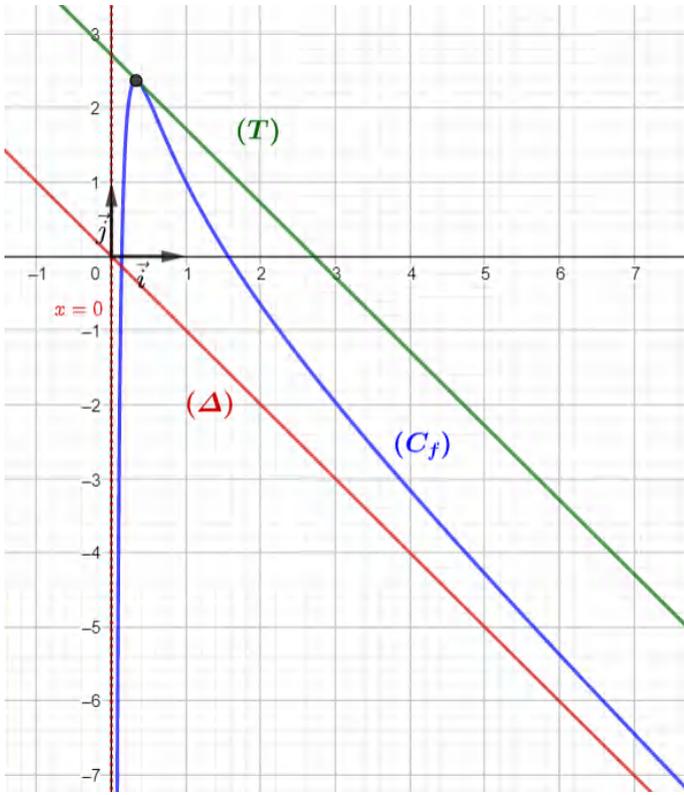
$$= -x + e^{-1} - e^{-1} + \frac{2 + \ln e^{-1}}{e^{-1}}$$

$$= -x + e$$

6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي: $x = 0$
- نعين x_0 و x_1 نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل: (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(III)

1

أ/ تبين أنه: $h(x) = f(x+1) + 2$

$$\begin{aligned} f(x+1) + 2 &= \\ &= -(x+1) + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} + 2 \\ &= -x - 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} + 2 \\ &= -x + 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ب/ تبين أن (D) مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$:

$$1.51 < \frac{1}{2\alpha} < 1.66 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$$1.18 < \frac{1}{2\alpha} - \alpha < 1.34$$

$$2.18 < 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right) < 2.34$$

إذن:

$$2.18 < f(\alpha) < 2.34$$

4

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} + x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 + \ln x}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2 + \ln x}{x}$$

لدينا $x > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$\begin{aligned} 2 + \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = -2 \\ \Rightarrow x &= e^{-2} \end{aligned}$$

ومنه:

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	+

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; e^{-2}[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة e^{-2} .
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]e^{-2}; +\infty[$

5 اثبات أن (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ) :

$$f'(a) = -1 \text{ معناه: } (\Delta) \text{ يوازي } (T)$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(a) = -1 &\Rightarrow -\frac{a^2 + 1 + \ln a}{a^2} = -1 \\ \Rightarrow a^2 + 1 + \ln a &= a^2 \\ \Rightarrow 1 + \ln a &= 0 \\ \Rightarrow \ln a &= -1 \\ \Rightarrow a &= e^{-1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

أ/ برهان أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة

يُطلب تعيينها:

نفرض أن النقطة $A(x_1; y_1)$ تنتمي إلى المستقيم (T_m)

ونبرهن أنها ثابتة:

لدينا: A تنتمي إلى (T_m) معناه:

$$y_1 = \ln(|m|) x_1 + 1$$

$$\Rightarrow \ln(|m|) x_1 - y_1 + 1 = 0 \dots (3)$$

المعادلة (3) عبارة عن كثير حدود متغيره $\ln(|m|)$ وينعدم اذا

انعدمت جميع معاملاته

أي:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -y_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

اذن: المستقيمات (T_m) تشمل النقطة $A(0; 1)$

ب/ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_h) مع

المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m = \ln(|m|) x + 1$$

ومنه:

• لما $\ln|m| = -1$ أي لما $|m| = e^{-1}$

أي لما $m \in \{-e^{-1}; e^{-1}\}$

المعادلة تقبل حلا وحيدا

• لما $\ln|m| < -1$ أي لما $|m| < e^{-1}$

أي لما $-e^{-1} < m < e^{-1}$

المعادلة تقبل حلا وحيدا

• لما $\ln|m| > -1$ أي لما $|m| > e^{-1}$

أي لما $m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[$

المعادلة تقبل حلان

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (-x + 1)] &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + 1 + \frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} - (-x + 1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x + 1} + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ

(C_h) في جوار $+\infty$

2

أ/ تبين أن المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f)

بتحويل بسيط يُطلب تعيينه:

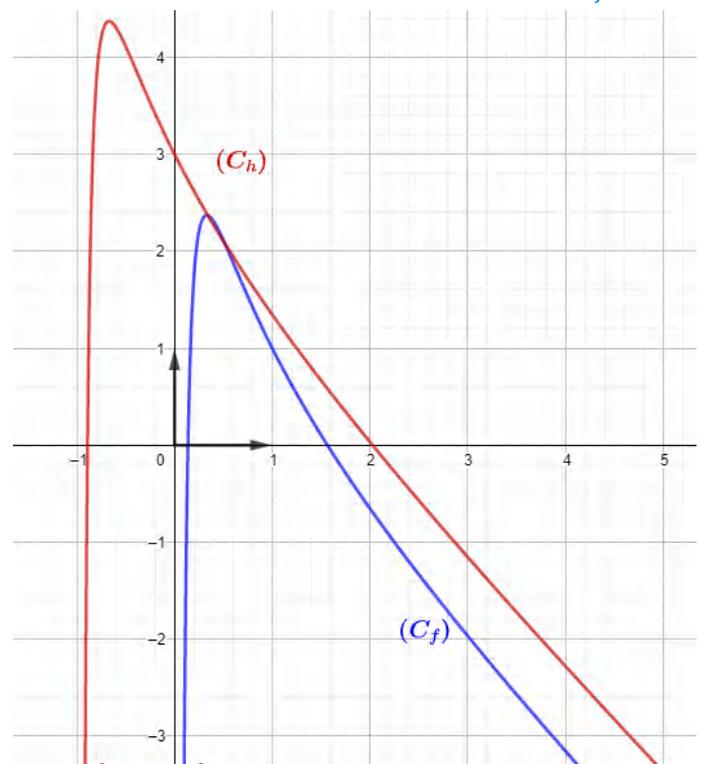
$$h(x) = f(x + 1) + 2$$

$$= f(x - (-1)) + 2$$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{u}(-1; 2)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h):

تمثيل (C_h) و (C_f):



(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 1$

② تبين أن $f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \frac{1}{x} \ln x - \left(\frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x)^2} \right) \\ &= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2} \\ &= 2 \left[\frac{(\ln x)^3 + 1}{x(\ln x)^2} \right] \\ &= \frac{2g(x)}{x(\ln x)^2} \end{aligned}$$

③ استنتاج إشارة $f'(x)$:

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

4

(III)

① دراسة تغيرات الدالة h :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)] = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} [h(x)] = +\infty$$

- دراسة $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{2}{x} \ln x$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه:

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول تغيرات الدالة h :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$		$+\infty$

1

② حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] =$$

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] = -\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3 \frac{1}{x} (\ln x)^2$$

لدينا: $g'(x) > 0$ و $g'(1) = 0$

ومنه

- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$

② حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow (\ln x)^3 + 1 \\ &\Rightarrow (\ln x)^3 = -1 \\ &\Rightarrow \ln x = -1 \\ &\Rightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة $g(x) = 0$ هي: $s = \{e^{-1}\}$

③ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

① حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = -\frac{2}{0^-} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = -\frac{2}{0^+} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته

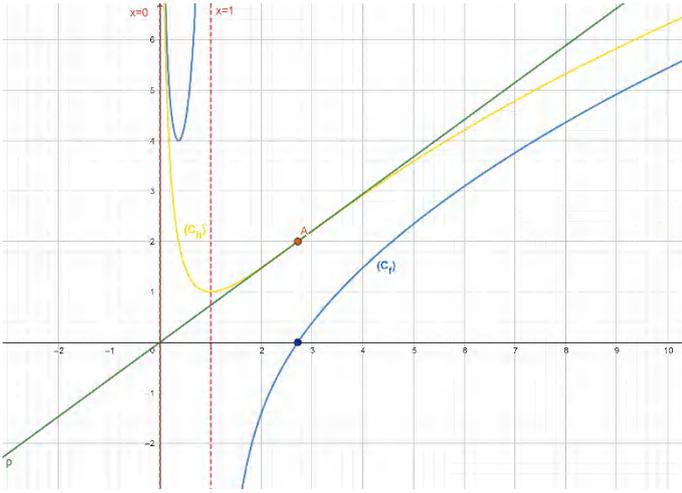
$$x = 0$$

- الاستنتاج:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة e .

7 التمثيل البياني:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 0$ و $x = 1$
- نرسم المماس (T)
- نعين نقطة انعطاف المنحنى (C_h)
- باستعمال جدول تغيرات الدالة h نرسم (C_h)
- نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



8 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned} e^m(\ln x)^3 + e^m \ln x - \ln x - 2e^m &= 0 \\ \Rightarrow e^m[(\ln x)^3 + \ln x - 2] &= \ln x \\ \Rightarrow e^m \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] &= 1 \\ \Rightarrow e^m[f(x)] &= 1 \\ \Rightarrow f(x) &= e^{-m} \end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هل فواصل نقط تقاطع المنحنى

$$y_m = e^{-m} \text{ مع المستقيمات ذات المعادلة } y_m = e^{-m}$$

$$\bullet \text{لما: } e^{-m} < 4 \text{ أي لما: } -m < \ln 4$$

$$\bullet \text{أي لما: } m > -\ln 4 \text{ المعادلة تقبل حل وحيد}$$

$$\bullet \text{لما: } e^{-m} = 4 \text{ أي لما: } -m = \ln 4$$

$$\bullet \text{أي لما: } m = -\ln 4$$

المعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف

$$\bullet \text{لما: } e^{-m} > 4 \text{ أي لما: } -m > \ln 4$$

$$\bullet \text{أي لما: } m < -\ln 4 \text{ المعادلة تقبل ثلاث حلول}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} - (\ln x)^2 - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{\ln x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) و (C_h) متقاربان بجوار $+\infty$

3 دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x)$:

$$f(x) - h(x) = \frac{2}{-\ln x}$$

لدينا:

$$-\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - h(x)$		+	-

• (C_f) فوق (C_h) لما $x \in]0; 1[$

• (C_f) تحت (C_h) لما $x \in]1; +\infty[$

4 تبين أن (C_h) يقبل نقطة انعطاف:

لدينا:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{-2}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x} \\ &= \frac{-2 \ln x + 2}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^2} (1 - \ln x) \end{aligned}$$

لدينا $\frac{2}{x^2} > 0$ ومنه الإشارة من $(1 - \ln x)$:

$$\begin{aligned} 1 - \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = 1 \\ &\Rightarrow x = e \end{aligned}$$

x	0	e	$+\infty$
$h''(x)$		+	-

لدينا $h''(x)$ انعدمت وغيرت اشارتها ومنه المنحنى (C_h)

يقبل نقطة انعطاف احداثيها $A(e; 2)$

5 كتابة معادلة المماس (T) في النقطة A :

$$\begin{aligned} (T): y &= h'(e)(x - e) + h(e) \\ &= \frac{2}{e} \ln e (x - e) + (\ln e)^2 + 1 \\ &= \frac{2}{e} x \end{aligned}$$

6 حساب $f(e)$:

$$f(e) = (\ln e)^2 + 1 - \frac{2}{\ln e} = 0$$

ب/ استنتاج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقاً من (C) منحني

الدالة اللوغارتمية النيبيرية:

$$h(x) = \ln x \quad \text{نضع:}$$

لدينا:

$$f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 + \ln 2$$

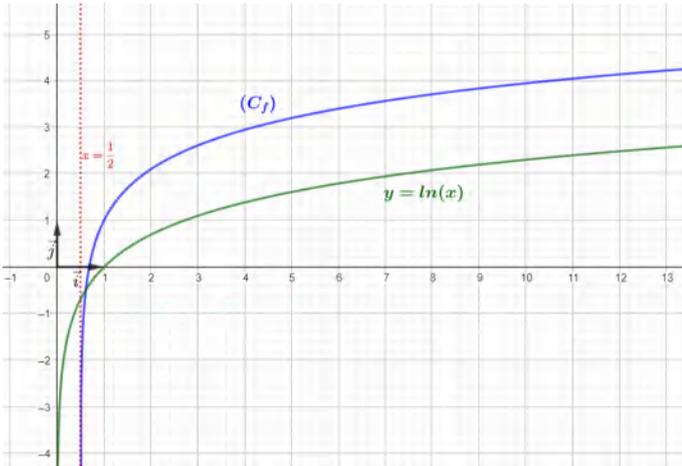
$$= h\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 + \ln 2$$

$$= h(x + a) + b$$

ومنه (C_f) هو صورة (C) بانسحاب شعاعه $\vec{v}(-a; b)$ أي:

$$\vec{v}\left(\frac{1}{2}; 1 + \ln 2\right)$$

- رسم (C) و (C_f) :



(II)

1 حساب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (x) = -\infty$$

- تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln(2x - 1) - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2x - 1)}{+\infty} \left(\frac{1 - x}{\frac{-1}{2}} + \frac{\ln(2x - 1)}{0} \right) \right]$$

$$= -\infty$$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة g على I :

(I)

1 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$$

2 تبين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال I :

$$f'(x) = \frac{2}{2x - 1} > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال I

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3 تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس

موازيًا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$:

$$f'(x_0) = 1 \Rightarrow \frac{2}{2x_0 - 1} = 1$$

$$\Rightarrow 2x_0 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيًا

للمستقيم (d) هي $x_0 = \frac{1}{2}$

4

أ/ اثبات أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على

الشكل: $f(x) = \ln(x + a) + b$:

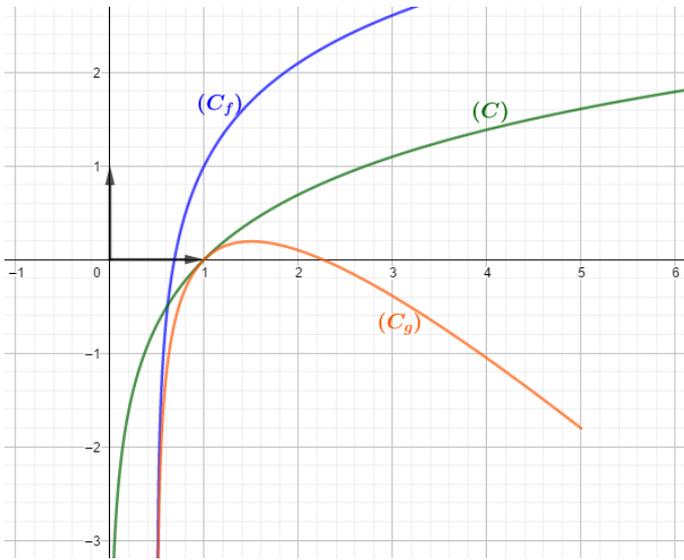
$$f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$$

$$= 1 + \ln\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= 1 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) + \ln 2$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 + \ln 2 \end{cases}$$



4 استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال I :

لدينا: $\begin{cases} g(1) = 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$ ومنه:

x	$\frac{1}{2}$	α	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	0

- تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = f(x) - x = g(x)$$

إذن:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]\frac{1}{2}; \alpha[\cup]1; +\infty[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = \{\alpha; 1\}$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]\alpha; 1[$

5 برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; \alpha[$:

فإنّ: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1; \alpha[$:

لدينا الدالة f متزايدة على $]1; \alpha[$

ولدينا: $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha$

وبما أن: $g(\alpha) = 0$

فإنّ: $0 = f(\alpha) - \alpha$

أي: $f(\alpha) = \alpha$

ولدينا: $f(1) = 1$

ومنه:

لما: $x \in]1; \alpha[$ يكون: $f(x) \in]1; \alpha[$

(III)

1 تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$u_n = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$$

$$u_n = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2 \Rightarrow f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= \frac{2x-1}{2} - 1 \\ &= \frac{2x-1}{2-2x+1} \\ &= \frac{2x-1}{-2x+3} \\ &= \frac{-2x+3}{2x-1} \end{aligned}$$

لدينا: $(2x-1 > 0)$ على المجال I

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(-2x+3)$:

$$-2x+3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

ومنه:

$$g'(x) > 0 \quad : x \in \left] \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[\quad \text{لما}$$

$$g'(x) < 0 \quad : x \in \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[\quad \text{لما}$$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		$g\left(\frac{3}{2}\right)$	

3

أ/ حساب $g(1)$:

$$g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$$

- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال

$$\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[\quad \text{حلا وحيدا } \alpha :$$

لدينا: الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$

$$\text{ولدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \times g\left(\frac{3}{2}\right) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل في المجال $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ حلا وحيدا α

- التحقق أنّ $2 < \alpha < 3$:

لدينا: $g(2) \times g(3) < 0$

لأنّ $g(2) \approx 0.1$ و $g(3) \approx -0.39$

ومنه $2 < \alpha < 3$ محققة

ب/ رسم (C_g) :

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ln\left(2\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - 1\right) \\
&= \ln 3^2 - \ln 2^3 \\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right) \\
&\Rightarrow \frac{n+1}{n} = \frac{9}{8} \\
&\Rightarrow 8n + 8 - 9n = 0 \\
&\Rightarrow -n = -8 \\
&\Rightarrow n = 8
\end{aligned}$$

② تعيين S_n :

لدينا:

$$\begin{aligned}
u_n &= f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\
&= 1 + \ln\left(\frac{1+1}{1}\right) + 1 + \ln\left(\frac{2+1}{2}\right) + \dots + 1 \\
&\quad + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= 1(n-1+1) + \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots \\
&\quad + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= n + \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \dots \times \frac{(n+1)}{n}\right) \\
&= n + \ln\left(\frac{2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n \times (n+1)}{2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n}\right) \\
&= n + \ln(n+1)
\end{aligned}$$

2

أ / كتابة معادلة المماس (T_m):

$$\begin{aligned}
y_{(T_m)} &= f'(m)(x - m) + f(m) \\
&= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) (x - m) + \frac{(\ln m)^2}{m} \\
&= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x - \frac{(2 - \ln m) \ln m}{m} + \frac{(\ln m)^2}{m} \\
&= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x + \frac{2(\ln m)^2 - 2 \ln m}{m} \\
&= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x + \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m}
\end{aligned}$$

ب / تعيين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ:(T_m) يشمل المبدأ معناه:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) (0) + \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m} \\
&\Rightarrow \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m} = 0 \\
&\Rightarrow 2 \ln m (\ln m - 1) = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} 2 \ln m = 0 \\ \ln m - 1 = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \ln m = 0 \\ \ln m = 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = e \end{cases}
\end{aligned}$$

ج / كتابة معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل

عليها:

$$(T_1): y = 0x + 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
(T_e): y &= \left(\frac{(2 - 1) \times 1}{e^2} \right) x + \frac{2(1 - 1)}{e} \\
&= \frac{1}{e^2} x \\
&= e^{-2} x
\end{aligned}$$

3 التمثيل البياني:

1

أ / حساب $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = +\infty$$

- تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right]$$

نضع $t = \ln x$ نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^2}{e^t} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^n}{e^t} \right] = 0 \text{ لأن}$$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته:

$$x = 0$$

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته:

$$y = 0$$

ب / دراسة اتجاه تغير الدالة f :- دراسة $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(2 \frac{1}{x} \ln x \right) (x) - (\ln x)^2}{x^2} \\
&= \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} \\
&= \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2}
\end{aligned}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:

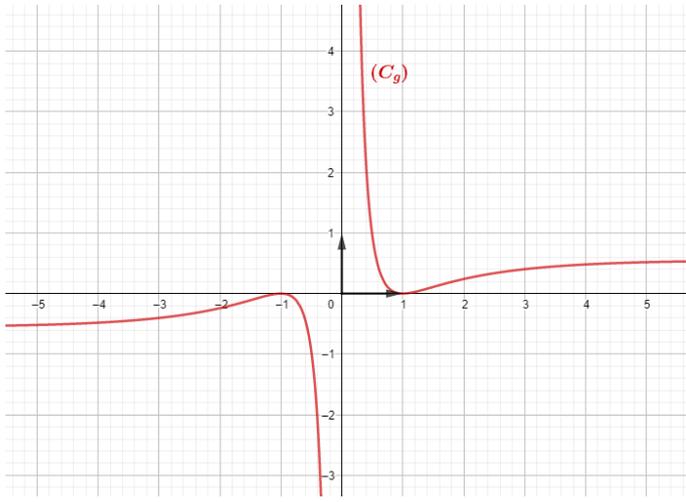
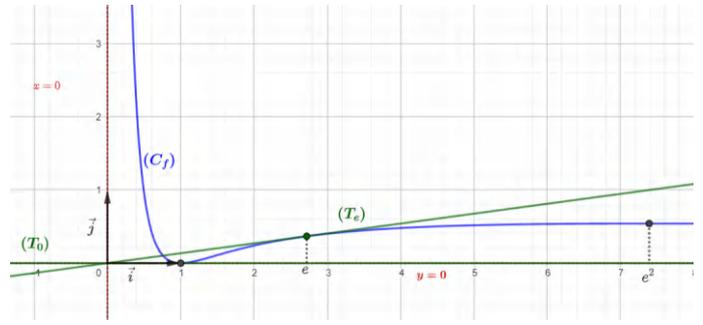
$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ لدينا:}$$

$$2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \text{ ولدينا:}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$2 - \ln x$	+	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$	↘	↗ $4e^{-2}$	↘ 0



(II)

1 تبين أن الدالة g فردية:

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(\ln|-x|)^2}{-x} \\ &= -\frac{(\ln|x|)^2}{x} \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة g فردية.

2 تبين أنه يمكن رسم (C_g) انطلاقاً من (C_f) :

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ \frac{(\ln(-x))^2}{x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ -\frac{(\ln(-x))^2}{-x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$: (C_g) ينطبق على (C_f)

ولما $x < 0$: (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة للمبدأ

- تمثيل (C_g)

ب/ تعيين اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $x^2 > 0$ لما $x \in \mathbb{R}_+^*$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة

$g(x)$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

3

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1 + (x-2) \ln x}{x} - \ln x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \ln x - 2 \frac{\ln x}{x} - \ln x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) و (Γ) متقاربان بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ) :

$$\begin{aligned} f(x) - \ln x = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{x} - \frac{2 \ln x}{x} = 0 \\ &\Rightarrow -1 - 2 \ln x = 0 \\ &\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f(x) - \ln x$	+	0	-

- (C_f) فوق (Γ) لما $x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}[$
- (C_f) يقطع (Γ) لما $x = e^{-\frac{1}{2}}$
- (C_f) تحت (Γ) لما $x \in]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$

4 تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:

لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]0; 1[$

(I)

1 دراسة اتجاه تغير الدالة g :

$$g'(x) = 1 + 2 \frac{1}{x} = \frac{1 + 2x}{x}$$

لدينا: $g'(x) > 0$ لما $x \in \mathbb{R}_+^*$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R}_+^*

2 حساب $g(1)$:

$$g(1) = -1 + 1 + 2 \ln 1 = 0$$

- استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال

$]0; +\infty[$:

بما أن الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0; +\infty[$

و $g(1) = 0$ فإن:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1 + \overbrace{x \ln x}^0 - 2 \ln x}{x} \right) = +\infty$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$

معادلته $x = 0$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \ln x - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

2

أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$\frac{g(x)}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln x + \frac{x-2}{x})x - (-1 + (x-2) \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{x \ln x + x - 2 + 1 - x \ln x + 2 \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x - 1 + 2 \ln x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

ومستمرة ومتزايدة على $[1; +\infty[$

وتقبل قيمة حدية دنيا سالبة هي -1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

إذن: (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين

- التحقق أن: $0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$:

• لدينا: $f(0.6) \times f(0.5) < 0$

لأن: $f(0.5) \approx 0.08$ و $f(0.6) \approx -0.47$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.5; 0.6[$

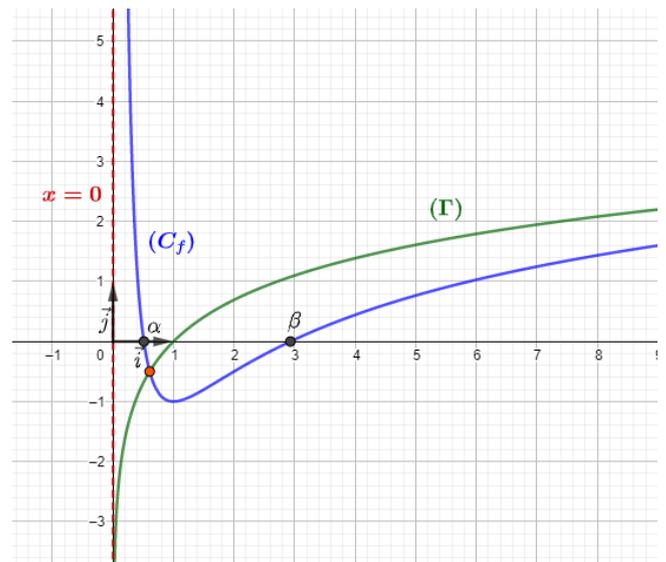
• لدينا: $f(2.9) \times f(3) < 0$

لأن: $f(2.9) \approx -0.01$ و $f(3) \approx 0.03$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا β في المجال $]2.9; 3[$

5 رسم (Γ) و (C_f) :



$$= \frac{e^x(2e^{2x} + 8e^x - 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)}$$

لدينا:

$$\begin{cases} e^x > 0 \\ (e^x + 2)(2e^{2x} + 1) > 0 \end{cases}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^{2x} + 8e^x - 1)$:

$$2e^{2x} + 8e^x - 1 = 0$$

$$\text{نضع } e^x = t \text{ أي } x = \ln t$$

فنجد:

$$2t^2 + 8t - 1 = 0$$

لدينا:

$$\Delta = 64 - 4(2)(-1) = 72 = (6\sqrt{2})^2$$

لدينا: $\Delta > 0$ ومنه:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-8 + 6\sqrt{2}}{4} = -2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ t_2 = \frac{-8 - 6\sqrt{2}}{4} = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \ln t_1 = \ln\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \\ x_2 = \ln t_2 \text{ (مرفوض)} \end{cases}$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\ln 2$	y_0	$+\infty$

حيث:

$$x_0 = \ln\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) ; y_0 = f\left(\ln\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right)$$

③

أ/ تبين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D):

لدينا:

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right)$$

$$= y + \varphi(x)$$

حيث:

①

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $y = -\ln 2$ معادلته:

$$\text{ب/ تبين أن: } f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2e^{2x}\left(1 + \frac{1}{2e^{2x}}\right)}{e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2e^{2x}}{e^x}\right) + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2e^{2x}}}{1 + \frac{2}{e^x}}\right)$$

$$= \ln(2e^x) + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right)$$

$$= \ln 2 + x + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right)$$

ج/ استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln 2 + \underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right)}_0 \right] = +\infty$$

② دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(4e^{2x}(e^x + 2) - e^x(2e^{2x} + 1))}{(e^x + 2)^2}$$

$$= \frac{4e^{2x}(e^x + 2) - e^x(2e^{2x} + 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)}$$

$$= \frac{4e^{3x} + 8e^{2x} - 2e^{3x} - e^x}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)}$$

ومنه لما $f(x) - y < 0 : x > -\ln 4$
 بنفس الطريقة نجد: لما $f(x) - y > 0 : x < -\ln 4$
 ومنه:

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

• (C_f) فوق (D) لما $x \in]-\infty; -\ln 4[$

• (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الاحداثيات:
 $(-\ln 4; -\ln 2)$

• (C_f) تحت (D) لما $x \in]-\ln 4; +\infty[$

④ تبين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى

(C_f) تنتمي إليه - أي إلى (C_f) -

نحدد أولاً نقطة تقاطع المستقيم المقارب المائل (D) ذو

المعادلة $y = x + \ln 2$ مع المستقيم المقارب الأفقي ذو

المعادلة $y = -\ln 2$.

لدينا:

$$\begin{cases} y = x + \ln 2 \\ y = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \ln 2 = -\ln 4 \\ y = -\ln 2 \end{cases}$$

ومنه نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي

$$\omega(-\ln 4; -\ln 2)$$

ولدينا: $f(-\ln 4) = -\ln 2$

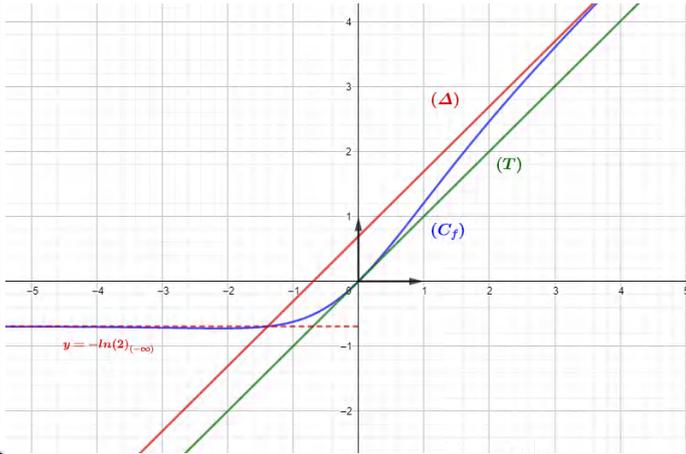
ومنه: $\omega \in (C_f)$

⑤ كتابة معادلة للمماس (T) عند المبدأ:

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مماس لـ (C_f) عند المبدأ.

⑥ التمثيل البياني:



① المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x - \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{me^x + 2m}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{m} \frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right)$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) \\ y = x + \ln 2 \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مقارب مائل لـ

(C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (D) و (C_f) :

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}e^{-2x} = 1 + 2e^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-x} \left(\frac{1}{2}e^{-x} - 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow e^{-x} = 4$$

$$\Rightarrow -x = \ln 4$$

$$\Rightarrow x = -\ln 4$$

لدينا:

$$x > -\ln 4$$

$$\Rightarrow -x < \ln 4$$

$$\Rightarrow e^{-x} < 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} < 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} - 2 < 0$$

$$\Rightarrow e^{-x} \left(\frac{1}{2}e^{-x} - 2\right) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} + 1 < 2e^{-x} + 1$$

لدينا: $2e^{-x} + 1 > 0$ إذن يمكن القسمة عليه

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1} < 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\frac{1}{2}e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1}\right) < 0$$

$$\Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{m}\right) + \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right)$$

$$\Rightarrow x = -\ln m + f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \ln m$$

اذن حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

$$y_m = x + \ln m \text{ :المعادلة ذات المعادلة}$$

وهي:

$$\bullet \text{ لما } \ln m < 0 \text{ أي } m < 1$$

المعادلة لا تقبل حلول

$$\bullet \text{ لما } \ln m = 0 \text{ أي لما } m = 1$$

للمعادلة حل مضاعف

$$\bullet \text{ لما } 0 < \ln m < \ln 2 \text{ أي لما } 1 < m < 2$$

للمعادلة حلان

$$\bullet \text{ لما } \ln m = \ln 2 \text{ أي لما } m = 2$$

للمعادلة حل مضاعف

$$\bullet \text{ لما } \ln m > \ln 2 \text{ أي لما } m > 2$$

للمعادلة حل وحيد

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$
		$-\infty$

② كتابة معادلة (T)

$$\begin{aligned} y_T &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= \frac{1+e}{2}(x-1) + \ln 2 \\ &= \frac{1+e}{2}x - \frac{1+e-2\ln 2}{2} \end{aligned}$$

③

أ/ تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة

وحيدة:

لدينا الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على \mathbb{R}_+^* وغيرت من إشارتها

إذن حتما تقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة

ب/ التحقق أن $0.7 < \alpha < 0.8$:

$$\text{لدينا: } f(0.8) \times f(0.7) < 0$$

لأن: $f(0.7) \approx -0.04$ و $f(0.8) \approx 0.25$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$

④

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e \ln x}{x+1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) و (Γ) متقاربان بجوار $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Γ) :

$$\begin{aligned} f(x) - \ln(x+1) = 0 &\Rightarrow \frac{e \ln x}{x+1} = 0 \\ &\Rightarrow e \ln x = 0 \end{aligned}$$

(I)

- حساب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = e$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$

- استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = e > 0$

إذن الدالة g موجبة تماما على $]0; +\infty[$

(II)

①

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

- تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x+1) + \frac{e \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right) = +\infty$$

ب/ تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{e}{x}(x+1) - e \ln x$$

$$= \frac{x+1 + \frac{e}{x}(x+1) - \frac{e(x \ln x)}{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x(x+1)}{x} + \frac{e}{x}(x+1) - \frac{e(x \ln x)}{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(x+1) + e(x+1) - e(x \ln x)}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(x+e) - e(x \ln x)}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

ج/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $x(x+1)^2 > 0$ لما $x \in]0; +\infty[$

5) تعيين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) =$

$$\frac{1+e}{2}x - m$$

حلل المعادلة $f(x) = \frac{1+e}{2}x - m$ هي فواصل نقط

تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = \frac{1+e}{2}x - m$

m ، ومنه:

$$-m < -\frac{1+e-2\ln 2}{2} \quad \text{لما:}$$

$$m > \frac{1+e-2\ln 2}{2} \quad \text{أي لما:}$$

المعادلة تقبل حلين متميزين

$$\Rightarrow \ln x = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

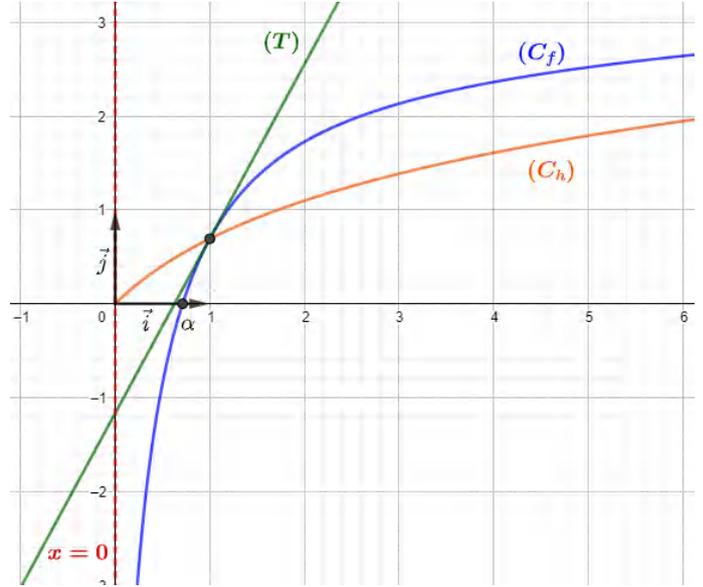
x	0	1	$+\infty$
$f(x) - \ln x$	-	0	+

• (C_f) فوق (Γ) لما $x \in]0; 1[$

• (C_f) يقطع (Γ) لما $x = 1$

• (C_f) تحت (Γ) لما $x \in]1; +\infty[$

ج / رسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f) :



2 تبيين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2 - \ln x) \\ &= 2x - \frac{2(2 - \ln x)}{x} \\ &= \frac{2(x^2 - 2 + \ln x)}{x} \\ &= \frac{2}{x} g(x) \end{aligned}$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

3 تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

4 تبيين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0 \\ &\Rightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2 \\ &= \alpha^2 + (2 - 2 + \alpha^2)^2 \\ &= \alpha^2 + \alpha^4 \\ &= \alpha^2(1 + \alpha^2) \end{aligned}$$

5 استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا $f(\alpha) > 0$ ومنه نجد:

x	0	$+\infty$
$f(x)$		+

(III)

1 تبيين أن المسافة AM تُعطى بـ $AM = \sqrt{f(x)}$:

لدينا M نقطة من (C_h) فاصلتها x_m أي تكتب على الشكل:
 $M(x; h(x))$ أي: $M(x; \ln x)$ ومنه المسافة AM تُعطى بـ:

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (-2 - \ln x)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2} \\ &= \sqrt{f(x)} \end{aligned}$$

2

(I)

1 دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [g(x)] &= -\infty \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

لدينا: الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ومنه:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 1}{x} \end{aligned}$$

لدينا $x > 0$ و $2x^2 + 1 > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2

أ/ تبيين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومنتزعة على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [g(x)] \times \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$:

ب/ التحقق من أن $1.31 < \alpha < 1.32$:

لدينا: $g(1.31) = -0.13$ و $g(1.32) = 0.02$

ولدينا: $g(1.31) \times g(1.32) < 0$ ، إذن $1.31 < \alpha < 1.32$

3 استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1 حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$$

أ / برهان أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير:

نلاحظ أن:

$$k(x) = (u \circ f)(x)$$

حيث:

$$u(x) = \sqrt{x}$$

لدينا الدالة u متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

والدالة f موجبة تماما على $]0; +\infty[$

اذن $(u \circ f)(x)$ متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ومنه للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$

ب / برهان أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h)

بما أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير في المجال $]0; +\infty[$

فإن الدالة k تبلغ قيمة حدية صغرى هي $x = \alpha$

ومنه المسافة أصغرية لما $x = \alpha$

إذن:

$$B(\alpha; \ln \alpha) \Leftrightarrow B(\alpha; 2 - \alpha^2)$$

ج / برهان أن: $AB = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2 - \alpha^2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} \\ &= \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} \\ &= |\alpha|\sqrt{1 + \alpha^2} \\ &= \alpha\sqrt{1 + \alpha^2} \end{aligned}$$

③ تبرير أن (AB) عمودي على المستقيم المماس لـ (C_h)

في النقطة B :

لدينا:

ميل المستقيم المماس لـ (C_h) في النقطة B هو:

$$h'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AB) هو:

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha - 0} \\ &= -\frac{\alpha^2}{\alpha} \\ &= -\alpha \end{aligned}$$

تذكر أنه:

◀ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 ▶

لدينا:

$$-\alpha \times \frac{1}{\alpha} = -1$$

ومنه المستقيم (AB) عمودي على مماس المنحنى (C_h) في

النقطة B .

$$= \frac{2 - \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

ب/ تبين أن الدالة f متزايدة تماما على $\left]1; \frac{1}{\alpha}\right]$

ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[$:

لدينا: $(x-1)^2 > 0$ لما $x \in]1; +\infty[$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا:

x	0	α	1
$g(x)$	-	0	+

لدينا: $g(x) = 0$ أي: $x = \alpha$

ومنه:

$$x = \frac{1}{\alpha} \text{ أي: } \frac{1}{x} = \alpha \text{ أي: } g\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$1 < x < \frac{1}{\alpha} \text{ أي: } \alpha < \frac{1}{x} < 1 \text{ أي: } g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

$$\frac{1}{\alpha} < x \text{ أي: } 0 < \frac{1}{x} < \alpha \text{ أي: } g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

ومنه:

x	1	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	
		$-\infty$	-2

③ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x + \ln x}{x-1} - (-2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 2x + \ln x + 2(x-1)}{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2x + \ln x + 2(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2x + \ln x + 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -1 + \ln x = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = 1$$

$$\Rightarrow x = e$$

x	1	e	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	-	0	+

(I)

①

أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; 1[$:

$$g'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$$

لدينا: $g'(x) > 0$ لما $x \in]0; 1[$

إذن الدالة g متزايدة تماما على $]0; 1[$

ب/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]0; 1[$

ولدينا: $g(0.15) \times g(0.16) < 0$

لأن $g(0.16) \approx 0.01$ و $g(0.15) \approx -0.05$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; 1[$

② استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0; 1[$:

x	0	α	1
$g(x)$	-	0	+

(II)

① حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(C_f) يقبل مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته: $x = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x} - 2 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right)$$

$$= -\frac{2}{1} = -2$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(C_f) يقبل مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = -2$

②

أ/ تبين أنه $f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{\left(-2 + \frac{1}{x}\right)(x-1) - (1 - 2x + \ln x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2x + 2 + 1 - \frac{1}{x} - 1 + 2x - \ln x}{(x-1)^2}$$

• طريقة أخرى:

لدينا: $|f(x)| = m$ يعني: $f(x) \geq 0$
وهذا يعني $m \geq 0$
ولدينا:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) ; x \geq 0 \\ -f(x) ; x \leq 0 \end{cases}$$

لدينا (C_f) يقع تحت حامل محور الفواصل
إذن: $|f(x)| = -f(x)$
ومنه:

$$|f(x)| = m \Rightarrow -f(x) = m \\ \Rightarrow f(x) = -m$$

حلل المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

$$y_m = -m$$

إذن: قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = -m$
حلين متميزين هي:

$$-m \in \left] f\left(\frac{1}{\alpha}\right); -2 \right[$$

أي:

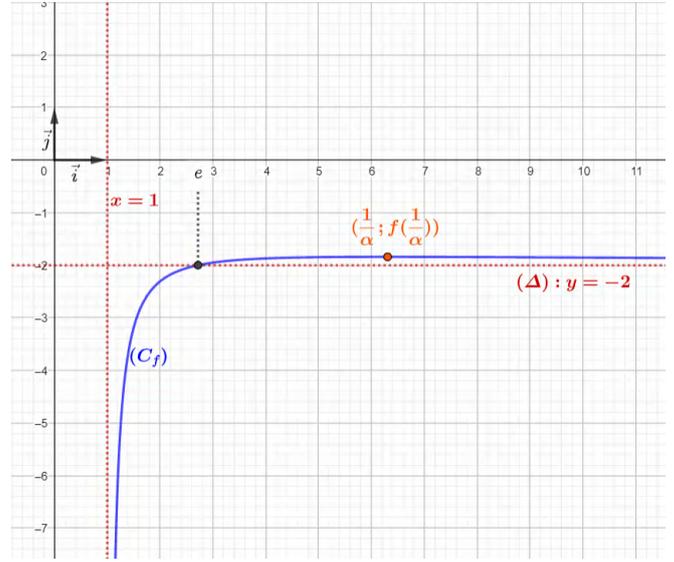
$$m \in \left] 2; -f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right[$$

• (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]1; e[$

• (C_f) يقطع (Δ) لما $x = e$

• (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]e; +\infty[$

4 رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) :



5 تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل

المعادلة $|f(x)| = m$ حلين متميزين:

$$h(x) = |f(x)|$$

ومنه:

$$|f(x)| = m \Rightarrow h(x) = m$$

حلل المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_h) مع

$$y_m = m$$

(C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

نرسم أولا (C_h) ثم نعين قيم الوسيط الحقيقي m حتى

تقبل المعادلة $h(x) = m$ حلين متميزين هي:

$$-f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < m < 2$$

أي:

$$m \in \left] 2; -f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right[$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 + 2$ وبما أن $x^2 + 2 > 0$ فـ

$$f'(x) > 0$$

وعليه:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ج/ تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$1.8 < \alpha < 1.9$$

لدينا: الدالة f مستمرة ومنتزعة على المجال D

$$\text{ولدينا: } f(1.8) \times f(1.9) < 0$$

$$\text{لأن: } f(1.8) \approx -0.05 \quad \text{و} \quad f(1.9) \approx 0.1$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

4/ تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم

مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - y_{(\Delta)}) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right) = 0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $\pm\infty$

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

لدينا:

$$\bullet \text{ لما } x \in]1; +\infty[$$

$$\frac{x-1}{x+1} > 1 \Rightarrow x-1 > x+1$$

$$\Rightarrow -2 > 0$$

وهذا مستحيل، وعليه $\frac{x-1}{x+1} < 1$ ومنه $\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) < 0$ في

المجال $]1; +\infty[$

ومنه (C_f) يقع تحت لما $x \in]1; +\infty[$

$$\bullet \text{ لما } x \in]-\infty; -1[$$

1/ تبين أن الدالة f فردية:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2}{3}(-x) + \ln \left(\frac{-x-1}{-x+1} \right) \\ &= -\frac{2}{3}x + \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \\ &= -\frac{2}{3}x - \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \\ &= -\left(\frac{2}{3}x + \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

- التفسير البياني:

(C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ

2/ حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{3} + \ln \left(\frac{x-1}{2} \right) \right) = -\infty$$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\frac{2}{3} + \ln \left(\frac{-2}{x+1} \right) \right) = +\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0^-$$

$$\bullet (C_f) \text{ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار } +\infty \text{ معادلته } x = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

3/

أ/ تبين أن: $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \right)}{\left(\frac{x-1}{x+1} \right)} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1} \\ &= \frac{2(x^2-1) + 6}{3(x^2-1)} \\ &= \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)} \end{aligned}$$

♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥

لا تنسونا من صالح دعائكم



زوروا في صفحتنا على فيسبوك:

#الخليل_للرياضيات

$$\frac{x-1}{x+1} > 1 \Rightarrow x-1 < x+1$$

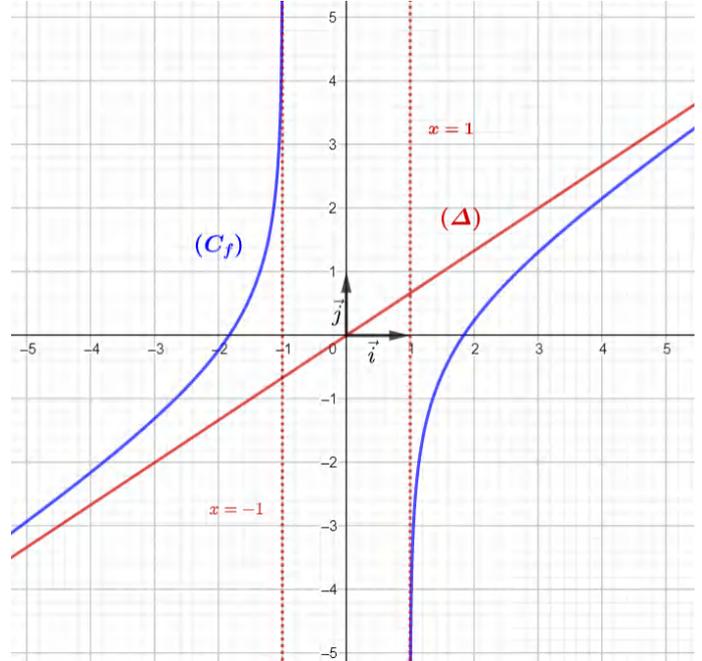
$$\Rightarrow -2 < 0$$

وهذا صحيح، وعليه $\frac{x-1}{x+1} > 1$

ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ في المجال $]-\infty; -1[$

ومنه (C_f) فوق تحت لما $]-\infty; -1[$.

5 انشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :



6 المناقشة البيانية:

$$(2 - 3|m|)x + 3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3|m|x + 3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow 2x + 3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 3|m|x$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = 3|m|x$$

$$\Rightarrow 3f(x) = 3|m|x$$

$$\Rightarrow f(x) = |m|x$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات

ذات المعادلة $y_m = |m|x$

$$\bullet \text{ لما } |m| < \frac{2}{3} \text{ أي لما } -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$$

$$\text{أي لما } m \in \left]-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right[$$

المعادلة تقبل حلين متميزين

$$\bullet \text{ لما } |m| \geq \frac{2}{3} \text{ أي لما } m \geq \frac{2}{3} \text{ أو } m \leq -\frac{2}{3}$$

$$\text{أي لما } m \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$$

المعادلة لا تقبل حلول