الخليل للرياضيات

سنة **ثالثة** ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | تقني رياضي | رياضيات | تسيير واقتصاد

مسائل

22 مسألة

في الدوال العددية

مرفقة بحلول مفصلة

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[15 أكتوبر 2021]

المسائل:

فهرس المحتويات:

المسألة رقم	01	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	02	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	03	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	04	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	05	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	06	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	07	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	08	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	09	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	10	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	11	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	12	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	13	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	14	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	15	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	16	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	17	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	18	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	19	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	20	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	21	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	22	:	المسألة	الحل

❤ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ❤

01 المسألة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

❶

أ/ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷

أ/ عين الأعداد الحقيقة c,b,a بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+b}{(x-1)^2}$$

ب/ مبررا إجابتك، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) والمستقيم (d) الذي معادلته $y=x-2$؟

ج/ حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d)، ولتكن A نقطة تقاطعهما.

❸ بين انه يوجد مماس (T) لـ (C_f) مواز للمستقيم (d).

❹ بيّن أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$، استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α.

❺ مثّل بيانيا المستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f).

❻ استنتج بيانيا حلول المعادلة $f(x)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي.

❼

أ/ نريد إيجاد نتيجة السؤال ❻ باستعمال الحساب، بيّن أن فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ هي حلول المعادلة (E) حيث:

$$(E):(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$$

ب/ جد حسب قيم m حلول المعادلة (E).

المسألة رقم: 02

مشاهدة الحل

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة g.

❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]-1.48; 1.47[$

ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

❶

أ/ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

❷

أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f).

ب/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

❸ بين أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

❹ مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f).

المسألة رقم: 03
مشاهدة الحل

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بجدول تغيراتها كما يلي:

x	$-\infty$	-2	-1		α	0	β	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	5	↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗	0	1	0	↘ $-\infty$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}$

❷ عيّن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$، ثم فسر النتيجتين هندسيا.

❸ عيّن معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-2).

❹ أجب بصحيح أم خطأ مع التبرير:

أ/ $f(2)>f(1)$ ب/ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}-\{-1\}$. ج/ $f'(1)>0$

❺ عيّن إشارة الدالة f

II) نضع فيما يلي: $a=-1$ و $b=1$ و $c=1$:

❶

أ/ بيّن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f(x)=-x+2-\frac{1}{x+1}$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❷

أ/ عيّن إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=-1$.

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω .

❸ ارسم كل من (Δ) و (C_f) .

❹ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=-x+m$

III) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=[f(x)]^2$.

❶ عيّن نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

❷ احسب: $g(\alpha)$ ، $g(\beta)$، $g(0)$ و $g(-2)$

❸ باستعمال مشتق مركب دالتين، احسب $g'(x)$

❹ استنتج تغيرات الدالة g دون دراسة تغيراتها.

IV) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $h(x)=f(|x|)$

❶ ادرس شفعية الدالة h.

❷ وضّح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) .

المسألة رقم: 04

مشاهدة الحل

I) لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x-7}{2-x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

❶

أ/ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ بين أن النقطة $A(2;-3)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

❸ بين أنه توجد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x - 1$، يطلب تعيين معادلة كل منهما.

❹ اوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

❺ مثل بيانيا (C_f) ومماسيه (T_1) و (T_2)

II) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ كمايلي:

$$h(x) = -f(|x|)$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

❶ بيّن أنّ الدالة h زوجية

❷ إشرح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h)

❸ أنشئ (C_h).

المسألة رقم: 05

مشاهدة الحل

I) لتكن الدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

❶ عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

❷ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر النتائج هندسيا.

❸ ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

❹ أوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

❺

أ/ بين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4 - x) \in D_f$.

ب/ بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f).

❻ مثل بيانيا المنحنى (C_f).

❼ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$f(x) = |m|$$

II) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-3; -1; 1; 3\}$ بـ:

$$h(x) = \frac{3x^2 - 12|x| + 10}{x^2 - 4|x| + 3}$$

❶ ادرس شفعية الدالة h.

❷ وضح كيف يتم رسم (C_h) منحنى الدالة h انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه.

المسألة رقم: 06

مشاهدة الحل

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x+1}{x-1}$$

حيث α و β عددين حقيقين، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

◆ عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة 0 و (C_f) يمر من النقطة ذات الاحداثيات $(2;3)$

II) نضع فيما يلي: $\alpha=1$ و $\beta=-1$:

❶ احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

❷ احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❸

أ/ بيّن أنّ:

$$f(x)=x+\frac{1}{x-1}$$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❹

أ/ بيّن أنّه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❺ بيّن أن النقطة ω (نقطة تقاطع (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي) هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

❻ ارسم كل من (Δ) و (C_f) .

❼ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث:

$$f(x)=m \dots (E)$$

III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $h(x)=f(|x|)$

❶ ادرس شفعية الدالة h.

❷ وضّح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) .

المسألة رقم: 07

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^2-8x+16}{x-3}$$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوِ المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

❶ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية: c, b, a بحيث كل x من D_f:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

❷

أ/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ب/ حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❸ أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❹ جد إحداثي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين، وأثبت أنها مركز تناظر للمنحني (C_f).

❺ أنشئ المنحني (C_f).

❻ استنتج رسم المنحني (C_h) الممثل للدالة h المعرفة بـ:

$$h(x)=\frac{(x-4)^2}{|x-3|}$$

المسألة رقم: 08

مشاهدة الحل

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2.

أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.4 < \alpha < -0.3$

ب/ حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x - 1}$$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1. بين من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن :

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x - 1}$$

2.

أ/ احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. احسب: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
4. ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_p) الممثل للدالة: $p(x) = x^2 - 2x - 1$. والمنحنى (C_f) .
5. بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{15}{2(1 - \alpha)} - 2$$

واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

6. أنشئ بيانيا كل من (C_p) و (C_f).

الخليل للرياضيات

09 المسألة رقم:

مشاهدة الحل

I) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2-3x+2}$$

❶ عين D_f مجموعة تعريف الدالة f، ثم بيّن أنه من أجل كل x من D_f فإن:

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$$

حيث c, b, a أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.

❷

أ/ ادرس تغيرات الدالة f.

ب/ أوجد المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) الممثل للدالة f.

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمقارب الأفقي (Δ):

❸ عين تقريب تآلفي للدالة f عند 0.

❹ أنشئ بيانيا المنحنى (C_f).

II) نعرف الدالة h كما يلي:

$$h(x)=\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}$$

❶ عين مجموعة تعريف الدالة h.

❷ اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

❸ أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0 .

❹ ادرس شفعية الدالة h.

❺ استنتج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقا من (C_f).

❻ ناقشا بيانيا حسب الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة:

$$(m-1)x^2-(3m+2)x+2m-1=0$$

المسألة رقم: 10

مشاهدة الحل

لتكن F دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، حيث: $F(0) = 0$، ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

نقبل أن الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$.

I) G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$G(x) = F(x) + F(-x)$$

❶ برر أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $G'(x)$ من أجل كل x حقيقي.

❷ احسب $G(0)$ واستنتج أن الدالة F فردية.

II) H الدالة المعرفة على المجال $I =]0; +\infty[$ بـ:

$$H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$$

❶ برر أنّ H تقبل الاشتقاق على I وأحسب $H'(x)$ من كل x من I.

❷ برهن أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$

❸ استنتج أن $\lim_{x \to +\infty} [F(x)] = 2F(1)$ ، ماذا ينتج عن المنحني (C) ؟

III) T الدالة المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ بِـ:

$$T(x) = F(\tan x) - x$$

❶ أحسب $T'(x)$، ماذا ينتج عن الدالة T ؟

❷ أحسب $F(1)$.

IV)

❶ انجز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

❷ أرسم المنحني (C) ، ومستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل -1، 0 و1.

الخليل للرياضيات

المسألة رقم: 11

مشاهدة الحل

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.

❶

أ/ احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷

أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.

ب/ أعط حصرا سعته 0.1 للعدد α.

ج/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

❶ عيّن نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها واعط تفسيرا هندسيا للنتائج.

❷ أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ ، مع تحديد الأعداد الحقيقية c, b, a.

❸

أ/ بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له.

ب/ ادرس الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f).

❹

أ/ شكل جدول تغيرات الدالة f.

ب/ بين أنّ (C_f) يقطع مرة وحيدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β حيث $-1 < \beta < 0$.

ج/ بين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

❺ أحسب $f(0)$ ثم ارسم المستقيمين المقاربين و المنحني (C_f).

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

❶ بين أن h زوجية .

❷ أشرح كيف تنشئ (C_h) ثم أنشئه.

❸ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين:

$$f(x) = m \quad \text{و} \quad f(x) = x + m$$

المسـألة رقم: 12

مشاهـــدة الحـــل

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$$

❶ ادرس تجاه تغير الدالة g على مجال تعريفها.

❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه.

❸ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$$

❶

أ/ احسب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ برهن أنه من أجل كل x حقيقي:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f.

❷ احسب: $\lim_{x\to+\infty} [f(x) + 3x]$ وفسر النتيجة هندسيا.

❸

أ/ ليكن (d') المستقيم ذو المعادلة $y = x$ ، بين أن (d') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيمين (d) و (d').

❹ انشئ بيانيا كلا من المستقيمين (d) و (d') و المنحني (C_f).

13 المسـألة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ: $g(x)=2x^3+6x^2+7x+1$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ احسب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0{,}2)$ و $g(-0{,}1)$ إلى 10^{-1}.

❸ استنتج أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0.2;-0.1[$ حيث: $g(\alpha)=0$.

❹ استنتج إشارة الدالة g على المجال $]-1,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{2x^3+4x^2+x}{(x+1)^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$.

❷ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من المجال $]-1,+\infty[$ يكون:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx}{(x+1)^2}$$

❸

أ/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (D) .

❹

أ/ بين أنه من أجل كل x من $]-1,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

❺ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 2 .

❻ بيّن أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

❼ عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-1,+\infty[\cup]-\infty,-1[$ كما يلي:

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & ; \quad x>-1 \\ f(-x-2) & ; \quad x<-1 \end{cases}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

❶ بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ محور تناظر للمنحنى (C_h) .

❷ (نقبل أن $f(\alpha)\approx-0{,}1$)، مثّل بيانيا (C_f) ، ثم استنتج التمثيل البياني لـ (C_h) .

المسألة رقم: 14

مشاهدة الحل

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{2x-2}$$

حيث α و β عددين حقيقين، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

◆ عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند النقطة ذات الاحداثيات $(0;-1)$.

II) نضع فيما يلي: $\alpha=-2$ و $\beta=2$:

❶ احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$، ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

❷ احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❸

أ/ عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c حيث:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-2}$$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❹

أ/ بيّن أنّه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❺

أ/ عيّن إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=1$.

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω .

❻ ارسم كل من (Δ) و (C_f) .

❼ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+m\ ...(E)$$

III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$h(x)=f(|x|)$$

❶ ادرس شفعية الدالة h.

❷ وضّح كيف يمكن المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) .

المسـألة رقم: 15

مشاهـــدة الحـــل

I) لتكن الدالة g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

❶

أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

❷

أ/ بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.7 < \alpha < 0.8$.

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

❶ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

❷

أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ).

❸

أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

ب/ استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f. (نأخذ $f(\alpha) \approx -0.1$)

❹ احسب $f(1)$، ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

❺ أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

❻ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$.

ب/ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h) .

المسألة رقم: 16

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^3+x-2}{2x}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.

❷ ادرس تغيرات الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

❸

أ/ a ، b و c أعداد حقيقية، بينّ أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x)=ax^2+b+\frac{c}{2x}$$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل منحنى (C) مقارب بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلته.

❹

أ/ بيّن أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A ، يطلب تعيين إحداثييها.

ب/ اكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة A.

ج/ بيّن أنّ المماس (T) يقطع المنحنى (C_f) في نقطة أخرى B يطلب تعيين إحداثييها.

❺ مثل بيانيا (T) ، (C) و (C_f)

❻ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وحلول المعادلة $f(x)=m$

II) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$h(x)=\frac{-x^2|x|-|x|-2}{2x}$$

❶ ادرس شفعية الدالة h.

❷ أنشئ مع الشرح كيفية إنشاء (C_h) المنحنى الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) في معلم آخر.

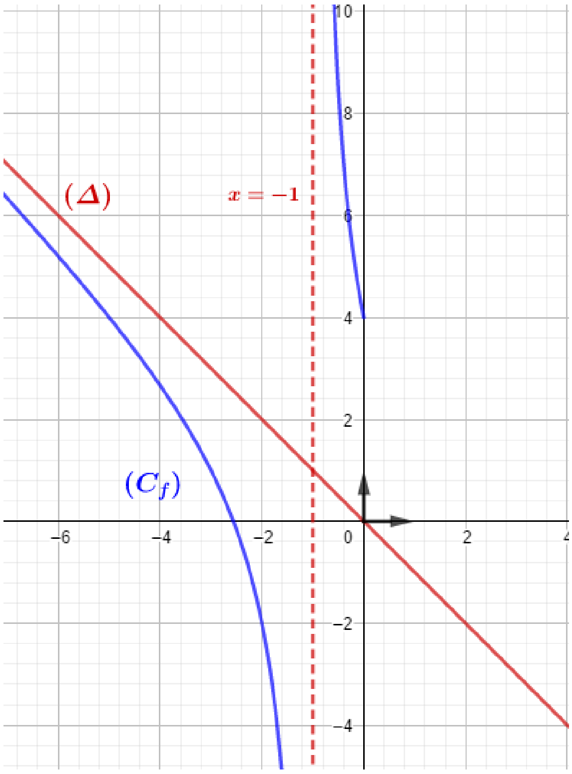
المسـألة رقم: 17

مشاهـــدة الحــل

(I f دالة معرفة على $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس كما هو مبين في الشكل.



❶

أ/ احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I.

ب/ بقراءة بيانية ودون دراسة تغيرات الدالة f شكل جدول تغيراتها.

❷ g دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x + \frac{4}{x+1}$$

و (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم السابق.

أ/ احسب نهاية g عند $+\infty$.

ب/ تحقق من أنّ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادله له.

ج/ ادرس تغيرات الدالة g.

(II k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

❶

أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right)$ ، ماذا تستنتج؟

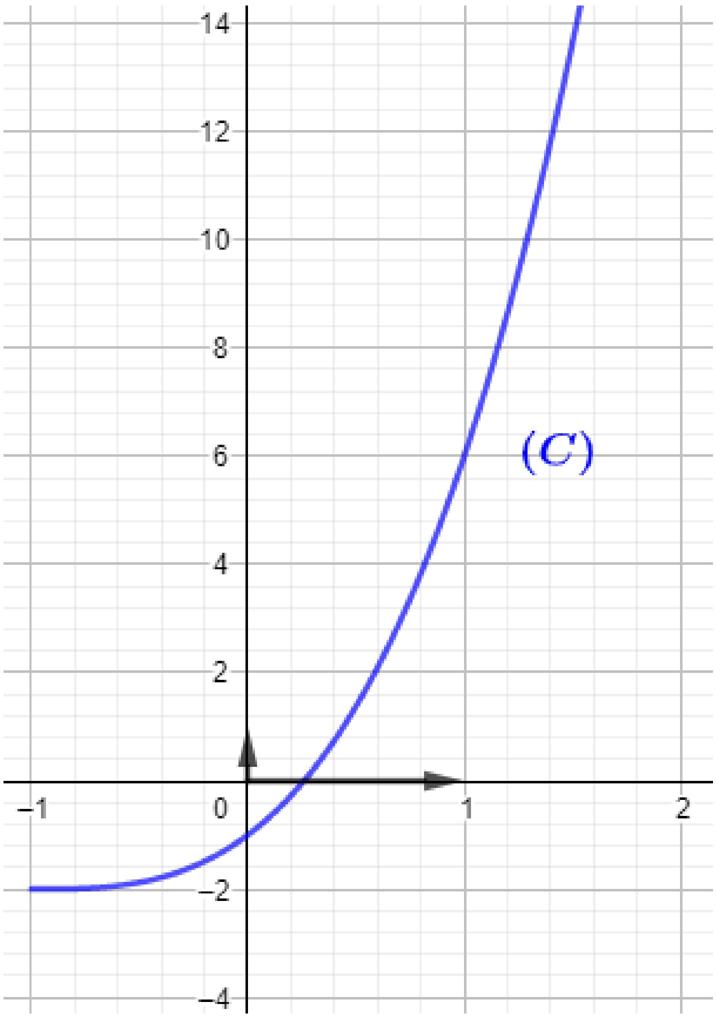
ب/ اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

❷ اكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند الناقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

❸ ارسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .

المسـألة رقم: 18

مشاهـــدة الحـــل



المنحنى (C) هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

❶

أ/ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب/ علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق:

$$g(\alpha) = 0$$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

❷ f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

حيث f' هي مشتقة الدالة f

ب/ عين دون حساب

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$$

وفسر النتيجة هندسيا.

ج/ احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ ، ثم فسر النتيجتين هندسيا.

د/ شكل جدول تغيرات الدالة f.

❸ نأخذ $\alpha \approx 0.26$

أ/ عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}.

ب/ ارسم المنحنى (Γ).

الخليل للرياضيات

19

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g .

❷ احسب $g(-2)$ ، ثم حل المعادلة $g(x) = 0$

❸ استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}$$

❶ بيّن أنّ:

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

❷ ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ a، b، c ثلاث أعداد حقيقية، بين أنّ:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$$

❹

أ/ بين أنّ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل وليكن (Δ)، يطلب تعيين معادلتيهما.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❺ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $\alpha \in \ ]-0.35; -0.34[$

❻ ارسم المنحنى (C_f)

❼ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث: $f(x) = 2x + m$

III) h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

❶ بين أنّ الدالة h زوجية.

❷ وضح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) . ثم أنشئه.

20 المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 3x + 16$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2.5 < \alpha < -2$.

❸ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

(II لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

❷ ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ بين أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$، ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

❹

أ/ بين أن (Δ) المستقيم المنصف الأول مقارب مائل لـ (C_f) .

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

❺

أ/ أوجد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب/ مثل بيانيا (Δ) و (C_f) .

ج/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$x^3 - mx^2 - 8 - m = 0$$

(III نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1}$$

المسألة رقم: 21

مشاهدة الحل

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in \ ]2; 3[$

❸ عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $\frac{n}{10} < \alpha < \frac{n+1}{10}$

❹ استنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

❷ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

❸ ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

❹ بين أنّ $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$، ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

❺

أ/ عين الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل نسميه (Δ)

ج/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ).

❻ عين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0

❼ مثل بيانيا كل من (Δ)، (T) و (C_f) .

❽ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$x^3 - (3+m)x^2 + (3+2m)x + 1 - m = 0$$

المسألة رقم: 22

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:

$$f(x)=|x+2|+\frac{1}{x+1}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ اكتب عبارة الدالة f دون كتابة رمز القيمة المطلقة.

❷ ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 2، ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.

❸

أ/ احسب $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

❹ ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

❺

أ/ برهن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ_1) و (Δ_2)، يطلب تعيين معادلتيهما.

ب/ ادرس الوضعية بين (C_f) وكلا من (Δ_1) و (Δ_2)

❻ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;-2]$ حيث: $-2.7<\alpha<-2.6$

❼ مثل بيانيا كل من (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_f) .

الحلول (مقترحة) :

فهرس المحتويات:

المسألة رقم	01	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	02	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	03	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	04	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	05	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	06	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	07	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	08	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	09	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	10	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	11	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	12	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	13	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	14	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	15	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	16	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	17	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	18	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	19	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	20	:	المسألة	الحل
المسألة رقم	21	:	المسألة	الحل	المسألة رقم	22	:	المسألة	الحل

❤ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ❤

حل المسـألة رقم: 01

مشاهـــدة المسألة

❶

أ/ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}[x]=-\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to1}[f(x)]=\lim_{x\to1}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

- تفسير النتائج هندسيا:

$x=1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور التراتيب بجوار $+\infty$

ب/ دراسة إتجاه تغير الدالة f:

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال تعريفها

<u>أولا نحسب $f'(x)$:</u>

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^4}\\ &=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)-2(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^3}\\ &=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}\\ &=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}\end{aligned}$$

<u>ثانيا: جدول التغيرات:</u>

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	$f(0)$	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

❷

أ/ تعيين الأعداد a,b,c: من أجل كل $x\neq0$ لدينا:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+b}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2+cx+b}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2+cx+b}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a-2b)x+2b}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-4 \\ a-2b+c=8 \\ 2b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$$

ب/ استنتاج المستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-[x-2]) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}-[x-2]\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$.

ج/ وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d):

دراسة إشارة الفرق: $f(x)-y$:

$$f(x)-y = x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}-x+2$$
$$= \frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

لدينا: $(x-1)^2>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$		1	$+\infty$
$3x-2$	$-$	0	$+$	‖	$+$

- الوضعية:
  - (C_f) تحت (d) لما $x\in\ ]-\infty;3[$
  - (C_f) يقطع (d) لما $x=\frac{2}{3}$
  - (C_f) فوق (d) لما $x\in\ \left]\frac{2}{3};1\right[\cup\ ]1;+\infty[$

حيث $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$

❸ إيجاد معادلة المماس (T):

المماس (T) يوازي المستقيم (d) معناه: يوجد a حيث: $f'(a)=1$

$$f'(a)=1 \Rightarrow \frac{a^2(a-3)}{(a-1)^3}=1$$
$$\Rightarrow a^2(a-3)=(a-1)^3$$
$$\Rightarrow 3a-1=0$$

الخليل للرياضيات

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

ومنه معادلة المماس (T) هي: $(T): f'(a)(x-a)+f(a)$

$$\boxed{(T): y = x - \frac{1}{3} - \frac{47}{12}}$$

❹ تبيين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$:

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty;1[$

ولدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$

ولدينا: $\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)\right)\times\left(\lim_{x\to 1} f(x)\right) < 0$

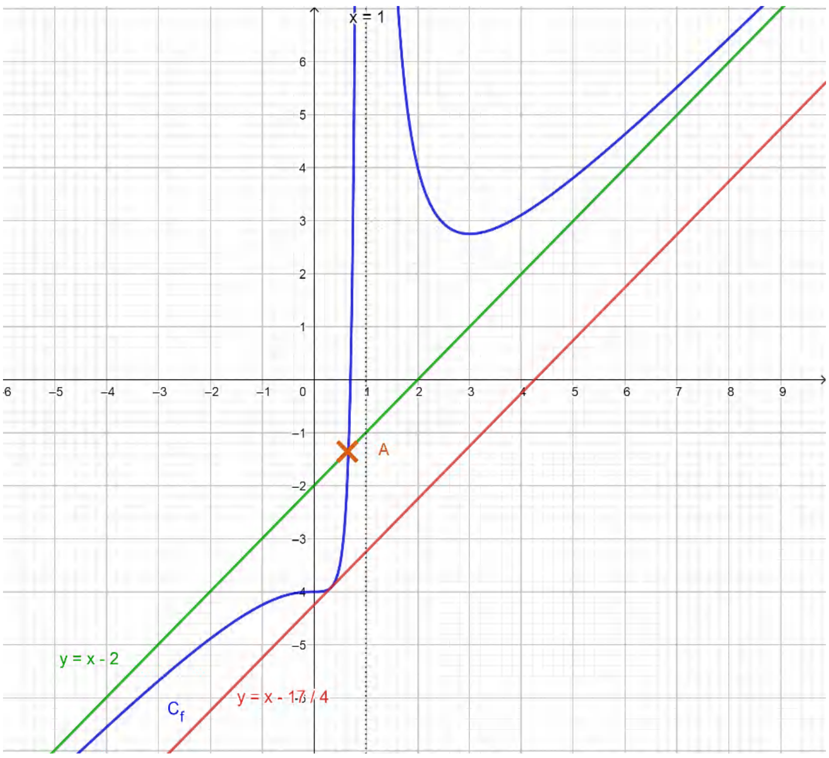
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$:

- استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α:

α	$-\infty$	$\cdots$	0.68	0.69	0.70	0.71	0.72	$\cdots$	0.98	0.99	1
$f(\alpha)$	$+\infty$	$\cdots$	-0.92	-0.58	-0.18	0.25	0.76	$\cdots$	2348.97	9698.98	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن: $0.70 < \alpha < 0.71$

❺ التمثيل البياني للمستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f):



خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y=x-2$
- نرسم معادلة المماس (T) ذو المعادلة $y = x - \frac{17}{4}$
- نعين نقطة A تقاطع المنحنى (C_f) مع (d)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)

❻ استنتاج بيانيا حلول المعادلة $f(x)=x+m$:

لما $m < \frac{-17}{4}$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m = \frac{-17}{4}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا

لما $\frac{-17}{4} < m < -2$ المعادلة تقبل حلان

لما $m=-2$ المعادلة تقبل حل وحيد $x=\frac{2}{3}$

لما $m > -2$ المعادلة تقبل حلان

حل المسألة رقم: 02

مشاهدة المسألة

(I

❶ دراسة اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه: $g'(x) = 3x^2 + 6$

ولدينا $3x^2 + 6 > 0$، إذن: الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α :

بما أن الدالة g مستمرة ومتزادية تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g(-1.48) = -0.12$ و $g(-1.47) = 0.0035$

ولدينا $g(-1.48) \times g(-1.47) < 0$

فإنه حسب مبرهة القيم المتوسطة، $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيد α.

- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II

❶

أ/ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{x^3 - 6}{x^2 + 2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{x^3}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} [x] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^3 - 6}{x^2 + 2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^3}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} [x] = +\infty$

ب/ حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2)(x^2 + 2) - (2x)(x^3 - 6)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

❷

أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل:

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-6}{x^2+2}-x\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-6-2x}{x^2+2}\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-2x}{x^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-2}{x}\right]=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x)-y=\frac{-2x-6}{x^2+2}$$

لدينا: $(x^2+2)>0$ ومنه الإشارة من $(-2x-6)$:

$$-2x-6=0\Rightarrow -2x=6$$
$$\Rightarrow x=-3$$

ومنه إشارة $f(x)-y$:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) على المجال: $]-\infty;-3[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-3;-3)$
- (C_f) تحت (Δ) على المجال: $]-3;+\infty[$

❸ تبين أن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$:

يكفي أن نبرهن أن $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha$$
$$=\frac{2\alpha^3-12-3\alpha^3-6\alpha}{\alpha^2+2}$$
$$=\frac{-(\alpha^3+6\alpha+12)}{\alpha^2+2}$$
$$=-\frac{g(\alpha)}{\alpha^2+2}$$

ولدينا من السؤال السابق: $g(\alpha)=0$ ومنه:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=-\frac{0}{\alpha^2+2}=0$$

إذن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

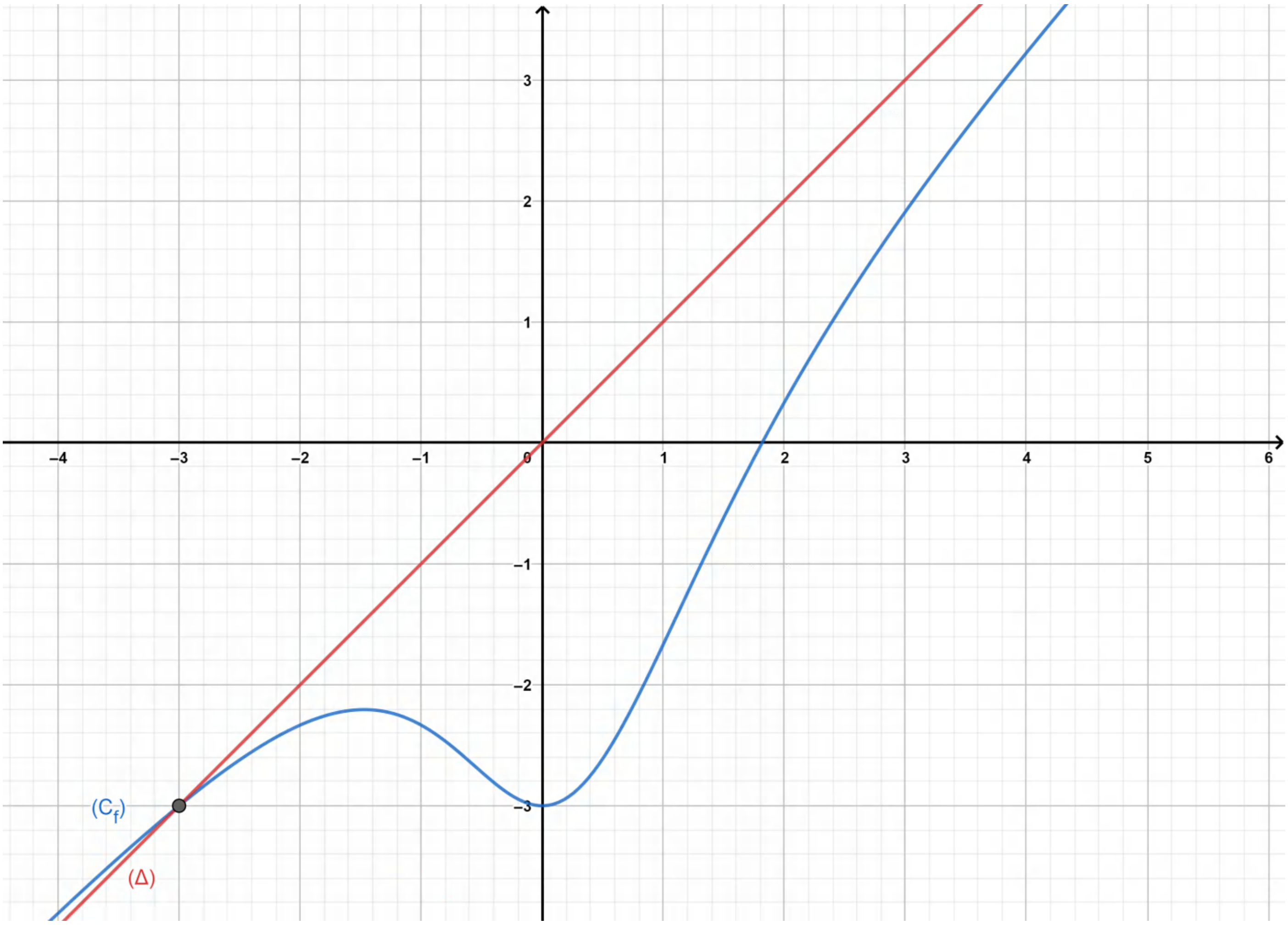
- حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $-1.48<\alpha<-1.47$ ولدينا: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

$$\frac{3}{2}(-1.48)<\frac{3}{2}\alpha<\frac{3}{2}(-1.47)$$
$$-2.22<f(\alpha)<-2.21$$

الخليل للرياضيات

❹ إنشاء المستقيم (Δ) والمنحني (C_f):



حل المسألة رقم: 03

مشاهدة المسألة

(I

❶ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}$

لدينا من جدول التغيرات: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=0 \\ f(-2)=5 \end{cases}$ ومنه:

$$f(0)=1 \Rightarrow \frac{c}{1}=1$$
$$\Rightarrow \boxed{c=1}$$

ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x+1)-(ax^2+bx+c)}{(x+1)^2}$$

وبما أنّ $f'(0)=0$ فإنّ:

$$f'(0)=0 \Rightarrow \frac{b-c}{1}=0$$
$$\Rightarrow c=\boxed{b=1}$$

ولدينا:

$$f(-2)=5 \Rightarrow \frac{4a-2b+c}{-1}=5$$
$$\Rightarrow 4a=2b-c-5$$
$$\Rightarrow a=\frac{2b-c-5}{4}$$
$$\Rightarrow a=\frac{-4}{4}$$
$$\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

❷ تعيين $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)$:

من جدول التغيرات نجد: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=+\infty$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x=-1$

❸ تعيين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-2):

لما $x=-2$ الدالة f تقبل قيمة حدية محلية، أي أن المماس يكون موازي لمحور الفواصل، ومنه معادلة المماس هي:

$y=f(-2)$ أي $y=5$

❹ الاجابة بصحيح أم خطأ مع التبرير:

أ/ $f(2)>f(1)$

خطأ، لأن: الدالة متناقصة على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا: $]0;+\infty[\ni \{1;2\}$ ومنه $f(2)<f(1)$

(تنعكس صور التراتيب لأن الدالة متناقصة).

ب/ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}-\{-1\}$:

خطأ، لأنّ: لدينا من جدول التغيرات $f(x)$ تنعدم من أجل قيمتين هما α و β.

ج/ $f'(1) > 0$:

خطأ، لأنّ: الدالة متناقصة على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا: $]0; +\infty[$ $1 \in$ ومنه $f'(1) > 0$

لما الدالة f متناقصة تكون $f'(x) < 0$)

❺ تعيين إشارة الدالة f:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ α $\quad$ β $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$ $\Vert$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad 0 \quad$ $+$

II) لدينا: $f(x) = \frac{-x^2+x+1}{x-1}$

❶

أ/ تبيين أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x + 2 - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(-x+2)(x+1) - 1}{x+1} \\ &= \frac{-x^2 - x + 2x + 2 - 1}{x+1} \\ &= \frac{-x^2 + x + 1}{x+1} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (-x+2)] &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[= -x + 2 - \frac{1}{x+1} + x - 2\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[-\frac{1}{x+1}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y = -x + 2$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x) - (-x+2) = -\frac{1}{x+1} = \frac{1}{-x-1}$$

لدينا:

$$-x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ومنه:

x	$-\infty$ $\quad$ 1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

❷

أ/ تعيين إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$:

لدينا $\begin{cases} y = -x + 2 \\ x = -1 \end{cases}$ بتعويض القيمة $(x = -1)$ في معادلة (Δ) نجد $(y = 3)$ ، إذن: $\omega(-1; 3)$

ب/ تبيين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• نبين أولا أنّ $(-2 - x) \in D_f$:

لدينا: $x \in D_f$ معناه: $x \in \ ]-\infty; -1[\cup \ ]-1; +\infty[$ معناه: $x > -1$ أو $x < -1$

معناه: $(-x) < 1$ أو $(-x) > 1$ معناه: $(-2 - x) < -1$ أو $(-2 - x) > -1$

الخليل للرياضيات

معناه: $(-2-x) \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;+\infty\right[$ معناه: $(-2-x) \in D_f$

• نبيّن ثانيا أنّ $f(-2-x)+f(x)=6$:

$$\begin{aligned} f(-2-x)+f(x) &= -(-x-2)+2-\frac{1}{-x-2+1}-x+2-\frac{1}{x+1} \\ &= 6-\frac{1}{-x-1}-\frac{1}{x+1} \\ &= 6+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1} \\ &= 6 \end{aligned}$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha+x) \in D_f \\ (\alpha-x) \in D_f \\ f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta \end{cases}$$

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω :

يوجد مماس يشمل النقطة ω معناه يوجد a حقيقي، يحقق:

$$y_\omega = f'(a)(x_\omega - a)+f(a) \ldots (*)$$

نفرض أنّ $(*)$ ونصل إلى تناقض:

قبل ذلك لدينا: $f'(x)=-1+\frac{1}{(x+1)^2}$

ومنه:

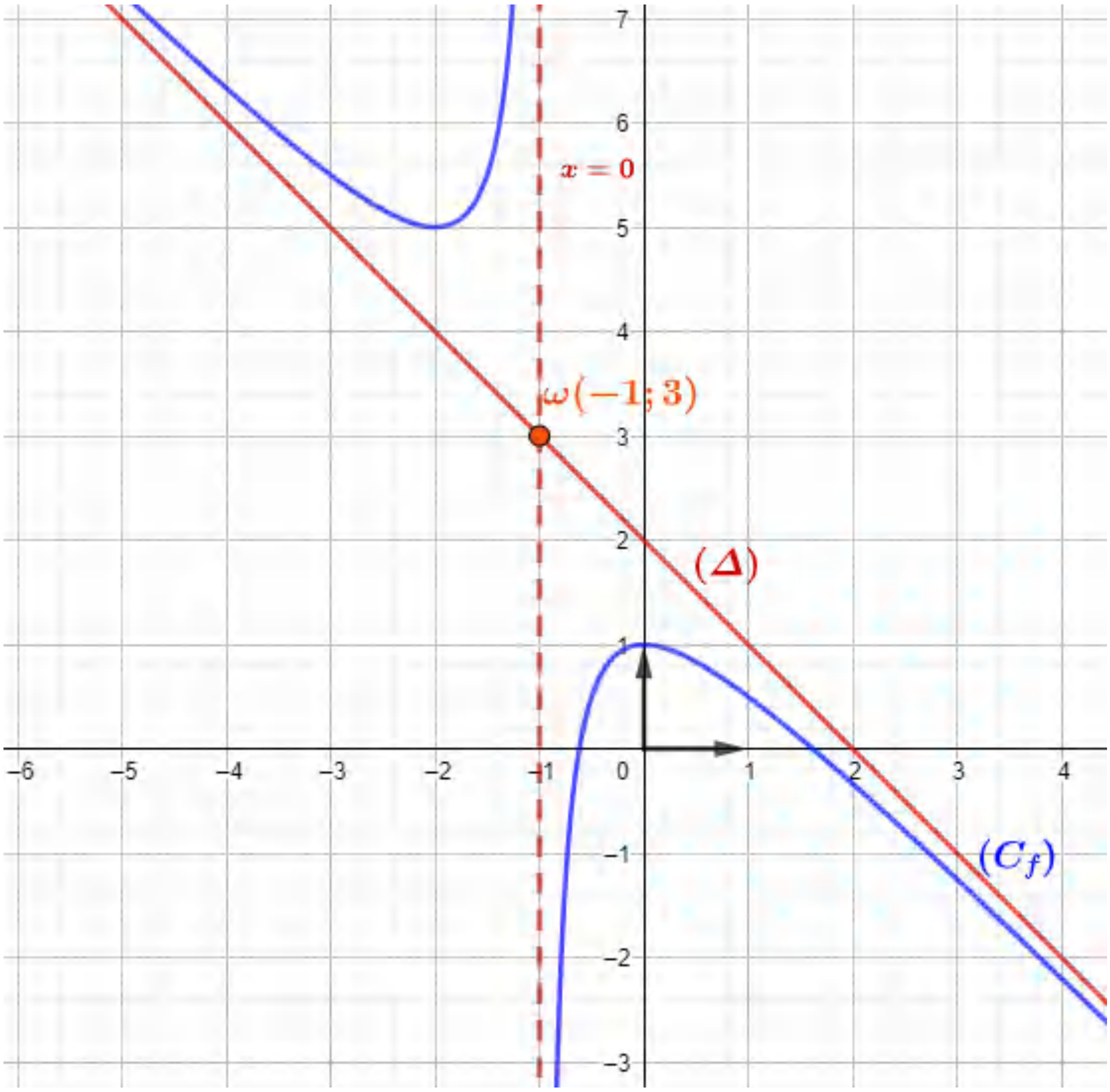
$$\begin{aligned} y_\omega = f'(a)(x_\omega - a)+f(a) &\Rightarrow -1 = f'(a)(3-a)+f(a) \\ &\Rightarrow -1 = \left(-1+\frac{1}{(a+1)^2}\right)(3-a)+\frac{-a^2+a+1}{a+1} \\ &\Rightarrow -1 = \left(\frac{-(a+1)^2+1}{(a+1)^2}\right)(3-a)+\frac{-a^2+a+1}{a+1} \\ &\Rightarrow -1 = \frac{(-(a^2+2a+1)+1)(3-a)}{(a+1)^2}+\frac{(-a^2+a+1)(a+1)}{(a+1)^2} \\ &\Rightarrow -1 = \frac{(-a^2-2a-1+1)(3-a)+(-a^2+a+1)(a+1)}{(a+1)^2} \\ &\Rightarrow -(a+1)^2 = -3a^2-6a+a^3+2a^2-a^3+a^2+a-a^2+a+1 \\ &\Rightarrow -a^2-2a-1 = -a^2-4a+1 \\ &\Rightarrow 2a = 2 \\ &\Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

وهذا تناقض لأنّ $a \notin D_f$ ومنه لا يوجد أي مماس يشمل النقطة ω.

❸ رسم كل من (Δ) و (C_f) :

خطوات الرسم:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=-1$
- نعين $\omega(-1;3)$ مركز تناظر (C_f)
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ)
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



❹ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = -x + m$:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -x + m$، وهي:

لما	$m \in]-\infty; 1[$	للمعادلة حل وحيد سالب
لما	$m = 1$	للمعادلة حل مضاعف معدوم
لما	$m \in]1; 2[$	للمعادلة حل وحيد موجب
لما	$m = 2$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$m \in]2; 3[$	للمعادلة حل وحيد سالب
لما	$m = 3$	للمعادلة حل مضاعف موجب
لما	$m \in]3; +\infty[$	للمعادلة حل وحيد سالب

III) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ $g(x) = [f(x)]^2$.

❶ تعيين نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا: الدالة $g = u \circ f$ حيث: $u(x) = x^2$ ومنه:

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

نهاية مركب دالتين:

نعتبر u، v و f ثلاث دوال حيث:

$f = v \circ u$

ولتكن a، b و c أعداد حقيقية أو منتهية $\pm\infty$

إذا كانت: $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$

وَ: $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$

فإنَ: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

الخليل للرياضيات

- $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} g(x) = +\infty$
- $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = +\infty$

❷ حساب: $g(\alpha)$ ، $g(\beta)$ ،$g(0)$ و $g(-2)$:

لدينا من جدول التغيرات $f(\alpha) = 0$ و $f(\beta) = 0$ ومنه:

$$g(\beta) = [f(\beta)]^2 = 0 \quad ; \quad g(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = 0$$

ولدينا:

$$g(-2) = [f(-2)]^2 = 5^2 = 25 \quad ; \quad g(0) = [f(0)]^2 = 1^2 = 1$$

❸ باستعمال مشتق مركب دالتين، حساب $g'(x)$:

لدينا: $g(x) = (u \circ f)(x) = u\big(f(x)\big)$

ومنه: $g'(x) = f'(x) \times u'\big(f(x)\big)$

إذن: $g'(x) = f'(x) \times 2f(x)$

❹ استنتاج تغيرات الدالة g دون دراسة تغيراتها:

إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$ في إشارة $f(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		α		0		β		$+\infty$
$f(x)$		$+$	|	$+$	‖	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	25	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

(IV

❶ دراسة شفعية الدالة h:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

إذن الدالة h زوجية:

❷ توضيح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) :

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(|x|) \\ &= \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

حل المسألة رقم: 04

مشاهـــدة المسألة

I)

❶

أ/ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{3x}{-x}\right] = -3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x}{-x}\right] = -3$
- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to2}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to2}}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right] = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to2}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to2}}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right] = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

- تفسير النتائج هندسيا:

$y = -3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$

$x = 2$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة إتجاه تغير الدالة f:

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال تعريفها

أولا نحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{3(2-x)-(3x-7)}{(2-x)^2}$$
$$= \frac{-1}{(2-x)^2} < 0$$

لدينا $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f'(x)$	$-3 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -3$

❷ تبيين أن النقطة A هي مركز تناظر لـ (C_f):

<u>أولا نثبت أنّ $(2(2)-x) \in D_f$</u>

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

معناه: $x \in]-\infty; 2[$ أو $x \in]2; +\infty[$ معناه: $x < 2$ أو $x > 2$ معناه: $-x > -2$ أو $-x < -2$

معناه: $(4-x) < 2$ أو $(4-x) > 2$ معناه: $(4-x) \in]-\infty; 2[$ أو $(4-x) \in]2; +\infty[$

إذن: $(4-x) \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

<u>ثانيا نثبت أنّ $f(2(4)-x) + f(x) = 2(-3)$:</u>

لدينا:

$$
\begin{aligned}
f(4-x)+f(x) &= \frac{3(4-x)-7}{2-(4-x)}+\frac{3x-7}{2-x}\\
&= \frac{5-3x}{-2+x}+\frac{7-3x}{x-2}\\
&= \frac{12-6x}{-2+x}\\
&= \frac{-6(-2+x)}{-2+x}=-6
\end{aligned}
$$

إذن النقطة $A(2;-3)$ هي مركز تناظر لـ (C_f).

❸ إيجاد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y=-x-1$:

◄ المماس لـ (C_f) عن النقطة ذات الفاصلة a يعطى بالمعادلة التالية: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ ►

لدينا المماس مواز للمستقيم ذو المعادلة $y=-x-1$ معناه $f'(a)=-1$

ومنه $-\frac{1}{(2-a)^2}=-1$ ومنه $a^2-4a+3=0$

لدينا: $\Delta=(-4)^2-4(1)(3)=4>0$

إذن:

$$
\begin{cases}
a_1=\dfrac{4-2}{2}=1\\
a_2=\dfrac{4+2}{2}=3
\end{cases}
$$

إذن يوجد مماسان لـ (C_f) موازيان للمستقيم ذو المعادلة: $y=-x+4$، معادلتيهما:

$$
\begin{aligned}
(T_1): y &= f'(-1)(x-a_1)+f(a_1)\\
&= f'(1)(x-1)+f(1)\\
&= -1(x-1)+(-4)\\
&= -x-3\\
(T_2): y &= f'(a_2)(x-a_2)+f(a_2)\\
&= f'(3)(x-3)+f(3)\\
&= -1(x-3)+(-2)\\
&= -x+1
\end{aligned}
$$

إذن:

$$
\begin{cases}
(T_1): y=-x-3\\
(T_2): y=-x+1
\end{cases}
$$

❹ إيجاد نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

مع محور التراتيب:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ ►

$$f(0)=\frac{3(0)-7}{2-(0)}=-\frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(yy')=\left\{\left(0;-\frac{7}{2}\right)\right\}$$

مع محور الفواصل:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$ ►

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{3x-7}{2-x}\Rightarrow 3x-7=0\Rightarrow x=\frac{7}{3}$$

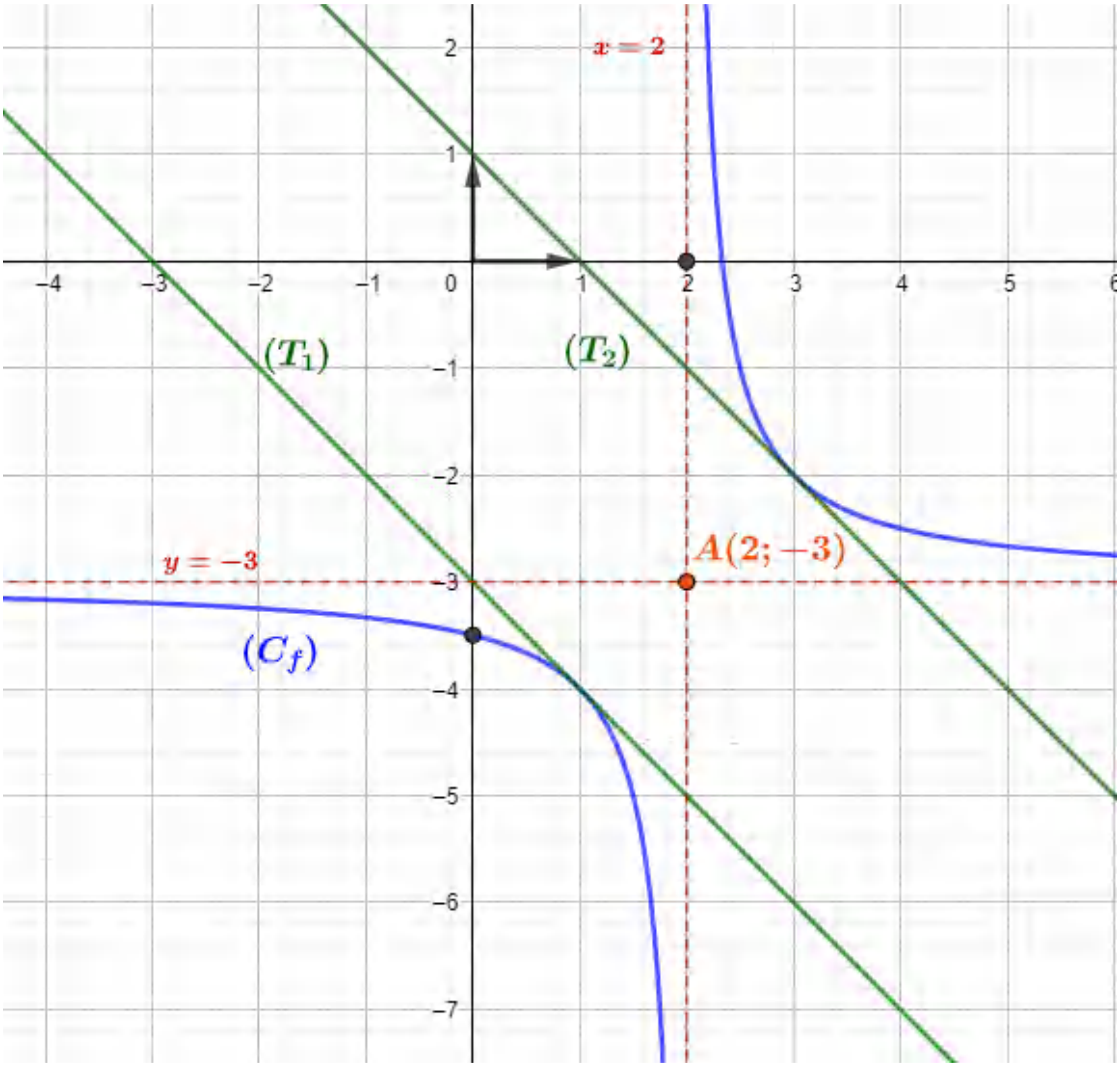
ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{\left(\frac{7}{3}; 0\right)\right\}$$

❺ التمثيل البياني :

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = -3$ و $x = 2$
- نرسم المماسين (T_1) و (T_2)حيث: $\begin{cases} y_1 = -x - 3 \\ y_2 = -x + 1 \end{cases}$
- نعين النقطة $A(2; -3)$ مركز تناظر لـ (C_f).
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات $(x'x)$ و $(y'y)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II

❶ تبيين أنّ الدالة h زوجية:

لدينا:

$$\begin{aligned} h(-x) &= -f(|-x|) \\ &= -f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة h زوجية

❷ شرح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) :

لدينا:

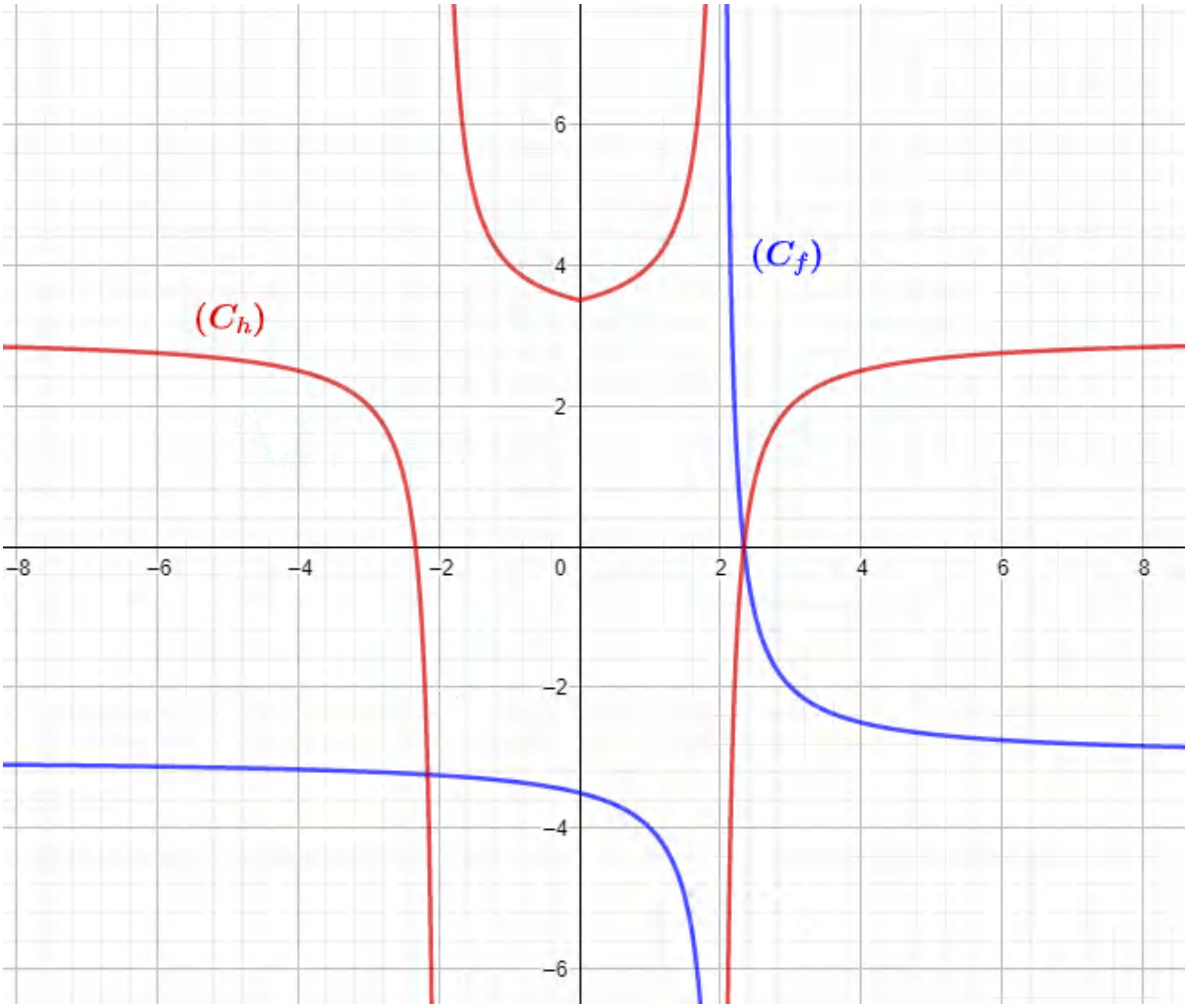
$$h(x) = -f(|x|) = \begin{cases} -f(x) & ; x \geq 0 \\ -f(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

كيفية الرسم:

لما $x \in [0; +\infty[$ يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

وبما أنّ الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب

❸ إنشاء (C_h):



الخليل للرياضيات

حل المسـألة رقم: 05

مشاهـــدة المسألة

(I

❶ تعيين D_f:

$$x^2-4x+3\neq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3)\neq 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-1\neq 0 \\ x-3\neq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

إذن: $D_f=\mathbb{R}-\{1;3\}$

❷ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{1;3\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;+\infty[$

لدينا إشارة المقام كالآتي:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
(x^2-4x+3)		$+$	0	$-$	0	$+$	

حساب النهايات:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x^2}{x^2}\right]=3$$
- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2}{x^2}\right]=3$$
- $$\lim_{\substack{> \\ x\to1}}[f(x)]=\lim_{\substack{> \\ x\to1}}\left[\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$
- $$\lim_{\substack{< \\ x\to1}}[f(x)]=\frac{1}{0^-}=-\infty$$
- $$\lim_{\substack{< \\ x\to3}}[f(x)]=\lim_{\substack{< \\ x\to3}}\left[\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$
- $$\lim_{\substack{> \\ x\to3}}[f(x)]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

تفسير النتائج هندسيا:

- $y=3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x=1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$
- $x=3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$

❸ دراسة إتجاه تغير الدالة f:

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها

أولا: نحسب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(3x-12)(x^2-4x+3)-(2x-4)(3x^2-12x+10)}{(x^2-4x+3)^2}$$
$$=\frac{-2x+4}{(x^2-4x+3)^2}$$

ثانيا: ندرس إشارة $f'(x)$

لدينا $(x^2-4x+3)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x+4)$

لدينا: $-2x+4=0$ ومنه $-2x=-4$ ومنه $x=2$

ثالثا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

❹ إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

مع محور التراتيب:

$$f(0)=\frac{3(0)^2-12(0)+10}{(0)^2-4(0)+3}=\frac{10}{3}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(yy')=\left\{\left(0;\frac{10}{3}\right)\right\}$$

مع محور الفواصل:

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}=0\Rightarrow\begin{cases}3x^2-12x+10\ldots(1)\\ \text{و}\\ x^2-4x+3\neq0\end{cases}$$

نحل (1) نجد:

$$\Delta=(-12)^2-4(3)(10)=24$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{12-\sqrt{24}}{6}\\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{12+\sqrt{24}}{6}\end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(\frac{12-\sqrt{24}}{6};0\right),\left(\frac{12+\sqrt{24}}{6};0\right)\right\}$$

❺

أ/ تبيين أنه إذا كان $x\in D_f$ فإن $(4-x)\in D_f$:

لدينا $x\in D_f$ ومنه: $x\in]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;+\infty[$

ومنه: $x\in]3;+\infty[$ أو $x\in]1;3[$ أو $x\in]-\infty;1[$

ومنه: $x>3$ أو $1<x<3$ أو $x<1$

ومنه: $-x<-3$ أو $-3<-x<-1$ أو $-x>-1$

ومنه: $4-x<1$ أو $1<4-x<3$ أو $4-x>3$

ومنه: $(4-x)\in]-\infty;1[$ أو $(4-x)\in]1;3[$ أو $(4-x)\in]3;+\infty[$

إذن: $(4-x)\in]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;+\infty[$

ب/ تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ (C_f):

أولا نثبت أنّ $(2(2)-x)\in D_f$

من السؤال السابق لدينا: $(4-x)\in D_f$

ثانيا نثبت أنّ $f(2(4)-x)=f(x)$:

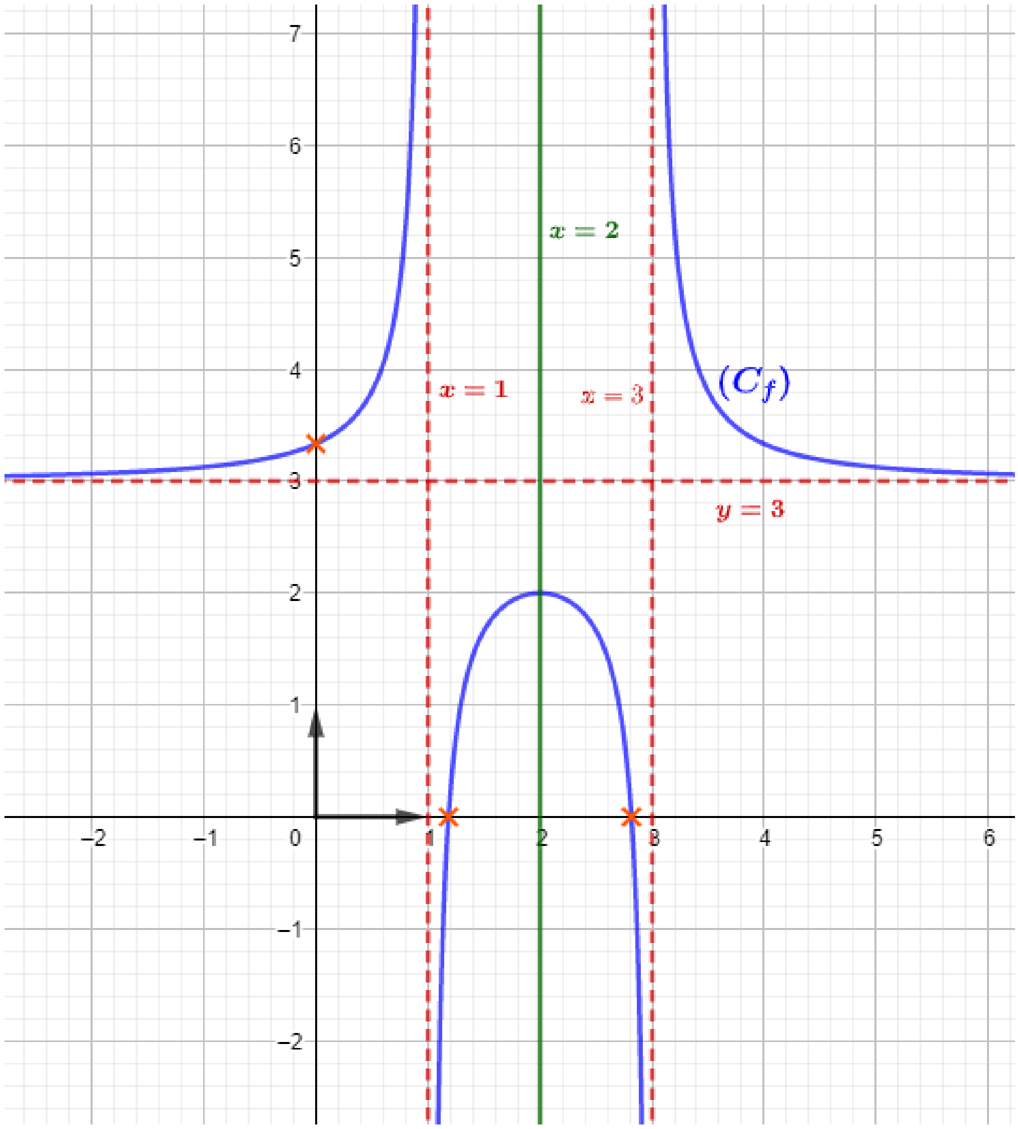
$$f(4-x)=\frac{3(4-x)^2-12(4-x)+10}{(4-x)^2-4(4-x)+3}$$
$$=\frac{3(4^2-2(4)(x)+x^2)-48+12x+10}{4^2-2(4)(x)+x^2-16+4x+3}$$
$$=\frac{3(16-8x+x^2)-38+12x}{x^2-4x+3}$$
$$=\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}=f(x)$$

اذن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ (C_f).

❻ التمثيل البياني للمنحني (C_f):

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y=3$ و $x=1$ و $x=3$
- نرسم المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ (C_f)
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



❼ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=|m|$، وهي:

لما $\lvert m\rvert < 2$ أي لما $-2 < m < 2$	أي لما $m \in \ ]-2;2[$	للمعادلة حلين موجبين
لما $\lvert m\rvert = 2$ أي لما $m = 2$ أو $m = -2$	أي لما $m = \{-2;2\}$	للمعادلة حل مضاعف موجب
لما $2 < \lvert m\rvert \leq 3$ أي لما $-3 \leq m \leq 3$ و $m > 2$ أو $m < -2$	أي لما $m \in \ [-3;-2[\cup \ ]2;3]$	المعادلة لا تقبل حلول
لما $\lvert m\rvert > 3$ أي لما $m > 3$ أو $m < -3$	أي لما $m \in \ ]-\infty;-3[\cup \ ]3;+\infty[$	للمعادلة حلين موجبين

II)

❶ دراسة شفعية الدالة h:

$$h(-x) = \frac{3(-x)^2 - 12|-x| + 10}{(-x)^2 - 4|-x| + 3} = \frac{3x^2 - 12|x| + 10}{x^2 - 4|x| + 3} = h(x)$$

إذن الدالة h زوجية

❷ توضيح كيف يتم رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) :

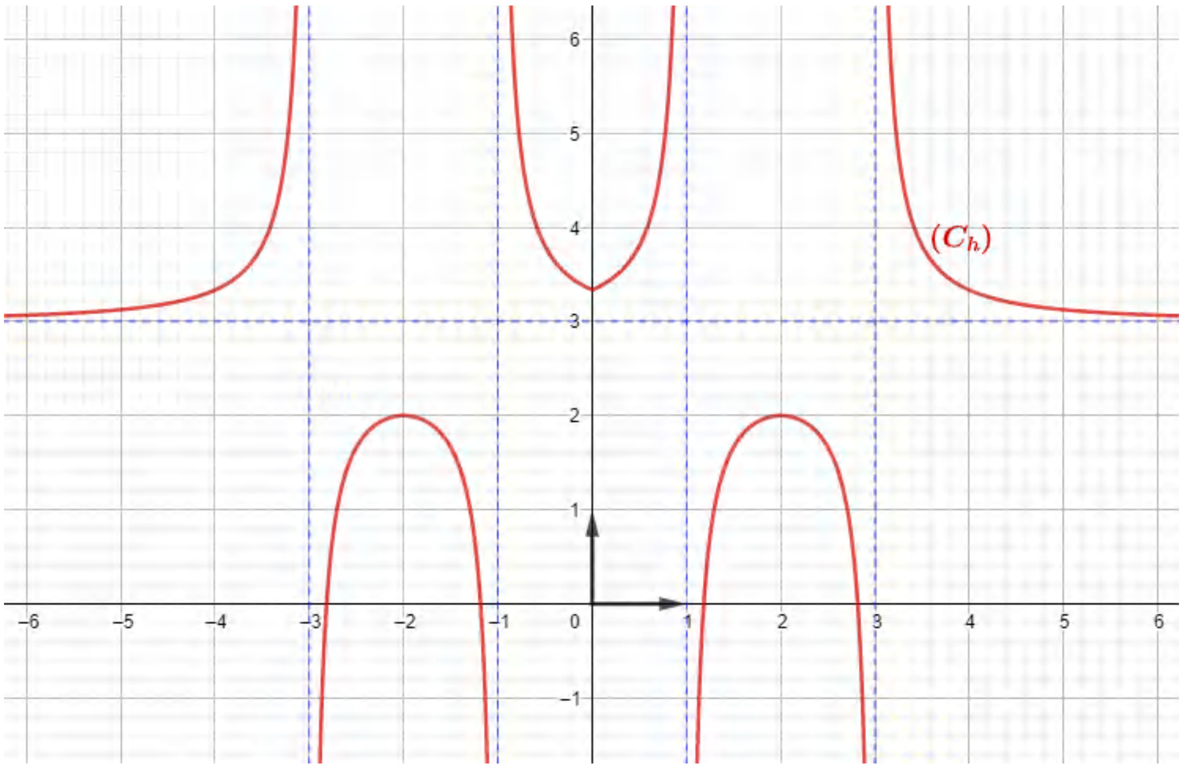
لدينا:

$$h(x) = \frac{3x^2 - 12|x| + 10}{x^2 - 4|x| + 3} = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} & ; \ x \geq 0 \\ \dfrac{3x^2 + 12x + 10}{x^2 + 4x + 3} & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(x) & ; \ x \geq 0 \\ \dfrac{3x^2 + 12x + 10}{x^2 + 4x + 3} & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

إذن لما $x \geq 0$ (C_h) ينطبق على (C_f) ، وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب

- رسم (C_h):



حل المسألة رقم: 06

مشاهـــدة المسألة

I) تعيين α و β :

لدينا: f تقبل قيمة حدية عند 0 معناه: $f'(0)=0$

نعيّن أولا $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(2\alpha x+\beta)(x-1)-(\alpha x^2+\beta x+1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2\alpha x^2-2\alpha x+\beta x-\beta-\alpha x^2-\beta x-1}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{\alpha x^2+(-2\alpha-\beta)x-\beta-1}{(x-1)^2}$$

لدينا: $f'(0)=0$ ومنه:

$$\frac{\alpha(0)^2+(-2\alpha-\beta)(0)-\beta-1}{(0-1)^2}=0\Rightarrow -\beta-1=0$$
$$\Rightarrow \boxed{\beta=-1}$$

ولدينا: $f(2)=3$ ، ومنه:

$$\frac{\alpha(2)^2+\beta(2)+1}{2-1}=3\Rightarrow 4\alpha+2\beta=2$$
$$\Rightarrow 2\alpha+(-1)=1$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

II) نضع فيما يلي: $\alpha=1$ و $\beta=-1$:

❶ حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x=1$

❷ حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right) = -\infty$

❸

أ/ تبيين أنّ: $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1}$$
$$= \frac{x(x-1)+1}{x-1}$$
$$= \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

ب/ استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) :

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x+\frac{1}{x-1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x-1}\right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته : $y_{(\Delta)} = x$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{x-1}$$

لدينا: $x-1=0$ معناه: $x=1$ ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	‖	$+$

ومنه: • (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty;1[$.
• (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]1;+\infty[$.

❹

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(x-1)^2 > 0$ ومنه الإشارة من $x(x-2)$:

لدينا:

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x-2=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x=2 \end{cases}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

❺ تبيين أنّ ω مركز تناظر لـ (C_f):

- ايجاد إحداثيي النقطة ω:

نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم (Δ): نجد: $y = 1$

ومنه: $\omega(1;1)$

- تبيين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$

معناه: $x \in \ ]-\infty;1[\cup \ ]1;+\infty[$

معناه: $x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $(-x) > -1$ أو $(-x) < -1$

معناه: $(2(1)-x) > 1$ أو $(2(1)-x) < 1$

معناه: $(2(1)-x) \in \ ]-\infty;1[\cup \ ]1;+\infty[$

معناه: $(2(1)-x) \in D_f$

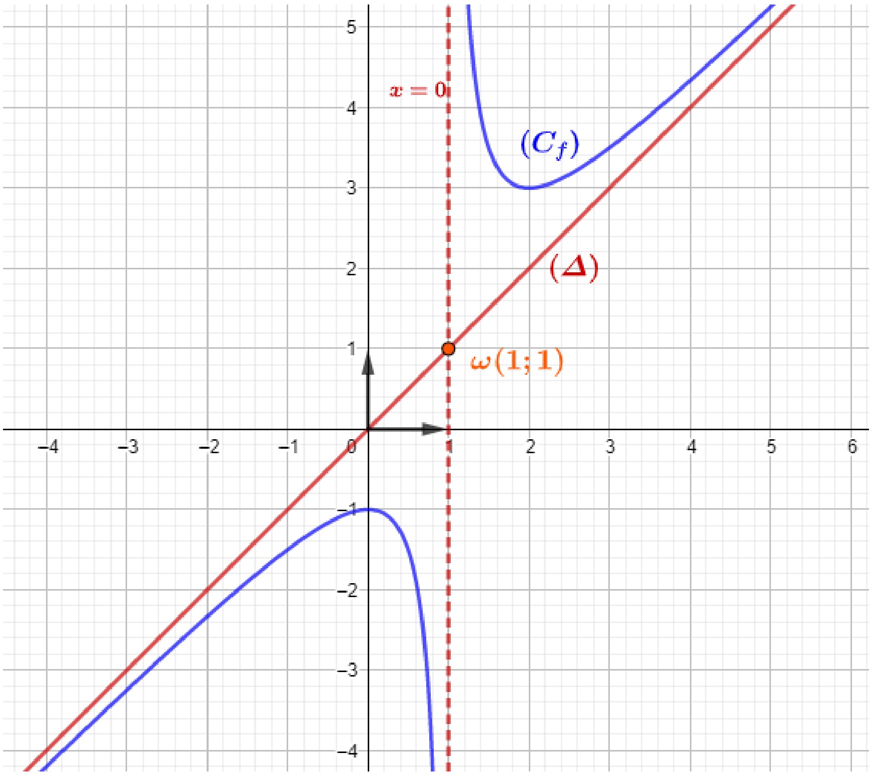
• ولدينا:

$$\begin{aligned}
f(2(1)-x)+f(x) &= \frac{(2-x)^2-(2-x)+1}{(2-x)-1}+\frac{x^2-x+1}{x-1}\\
&= \frac{4-4x+x^2-2+x+1}{2-x-1}+\frac{x^2-x+1}{x-1}\\
&= \frac{x^2-3x+3}{-(x-1)}+\frac{x^2-x+1}{x-1}\\
&= \frac{-x^2+3x-3}{x-1}+\frac{x^2-x+1}{x-1}\\
&= \frac{-2x-2}{x-1}\\
&= \frac{2(x-1)}{x-1}\\
&= 2 = 2(1)
\end{aligned}$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

❻ رسم كل من (Δ) و (C_f) :

الخليل للرياضيات



❼ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = x$ ، وهي:

لما $m \in]-\infty;-1[$ للمعادلة حل موجب

لما $m = -1$ للمعادلة حل معدوم

لما $m \in \ ]-1;0[$ للمعادلة حل سالب

لما $m = 0$ المعادلة لا تقبل حلولا

لما $m \in \ ]0;+\infty[$ للمعادلة حل موجب

(III

❶ دراسة شفعية الدالة h:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية

❷ توضيح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) :

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(|x|) \\ &= \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

حل المسـألة رقم: 07

مشاهــــدة المسألة

❶ إيجاد الأعداد c, b, a:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$$
$$= \frac{ax^2 - 3ax + bx - 3b + c}{x-3}$$
$$= \frac{ax^2 + (b-3a)x - 3b + c}{x-3}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -8 \\ -3b + c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 5 + \frac{1}{x-3}$$

❷

أ/ استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ):

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (x-5)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x - 5 + \frac{1}{x-3} - (x-5)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x-3}\right] = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 5$ مقارب مائل بجوار $\pm\infty$

ب/ تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{1}{x-3}$$

لدينا: $1 > 0$ ، إذن الإشارة من إشارة المقام: $(x-3)$:

x	$-\infty \quad 3$	$+\infty$
$\frac{1}{x-3}$	$-$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

❸ دراسة تغيرات الدالة f:

أولا: حساب النهايات:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}}\left[x - 5 + \frac{1}{x-3}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}}\left[x - 5 + \frac{1}{x-3}\right] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2 - 8x + 16}{x-3}\right]$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[x] = -\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-8x+16}{x-3}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty$$

التفسير الهندسي:

المستقيم $x = 3$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

ثانيا: حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

لدينا: $(x-3)^2 > 0$ ومنه الإشارة من (x^2-6x+8):

$$\Delta = 36 - 4(1)(8) = 4 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-2}{2} = 2 \\ x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+2}{2} = 4 \end{cases}$$

ثالثا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

❹ إيجاد إحداثي النقطة ω:

$$\begin{cases} y = x - 5 \ldots (1) \\ x = 3 \ldots (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) نجد: $y = 3 - 5 = -2$ ومنه : $\omega(3;-2)$

- اثبات أنّ ω مركز تناظر للمنحنى (C_f):

أولا نثبت أنّ $(2(3)-x) \in D_f$

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

معناه: $x \in]3;+\infty[$ أو $x \in]-\infty;3[$ معناه: $x > 3$ أو $x < 3$ معناه: $-x < -3$ أو $-x > -3$

معناه: $6 - x < 3$ أو $(6-x) > 3$ معناه: $(6-x) \in]3;+\infty[$ أو $(6-x) \in]-\infty;3[$

إذن: $(6-x) \in]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

ثانيا نثبت أنّ $f(2(3)-x) + f(x) = 2(-2)$:

لدينا:

$$f(6-x) + f(x) = 6 - x - 5 + \frac{1}{6-x-3} + x - 5 + \frac{1}{x-3}$$
$$= \frac{1}{3-x} + \frac{1}{x-3} - 4$$
$$= \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3-x} - 4 = -4$$

إذن النقطة $\omega(3;-2)$ هي مركز تناظر لـ $\left(C_f\right)$.

❺ التمثيل البياني:

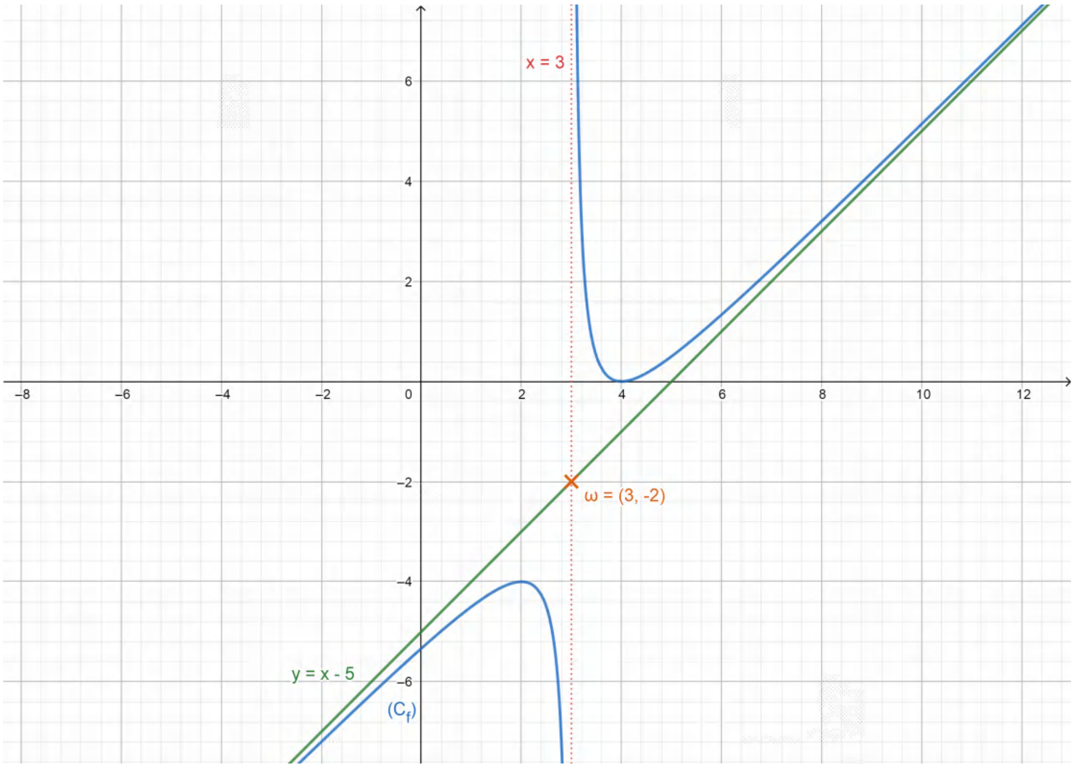
خطوات إنشاء المنحنى $\left(C_f\right)$ على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة: $x=3$

نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y=x-5$.

نعين ω مركز تناظر المنحنى $\left(C_f\right)$

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $\left(C_f\right)$



❻ استنتاج رسم المنحنى $\left(C_h\right)$:

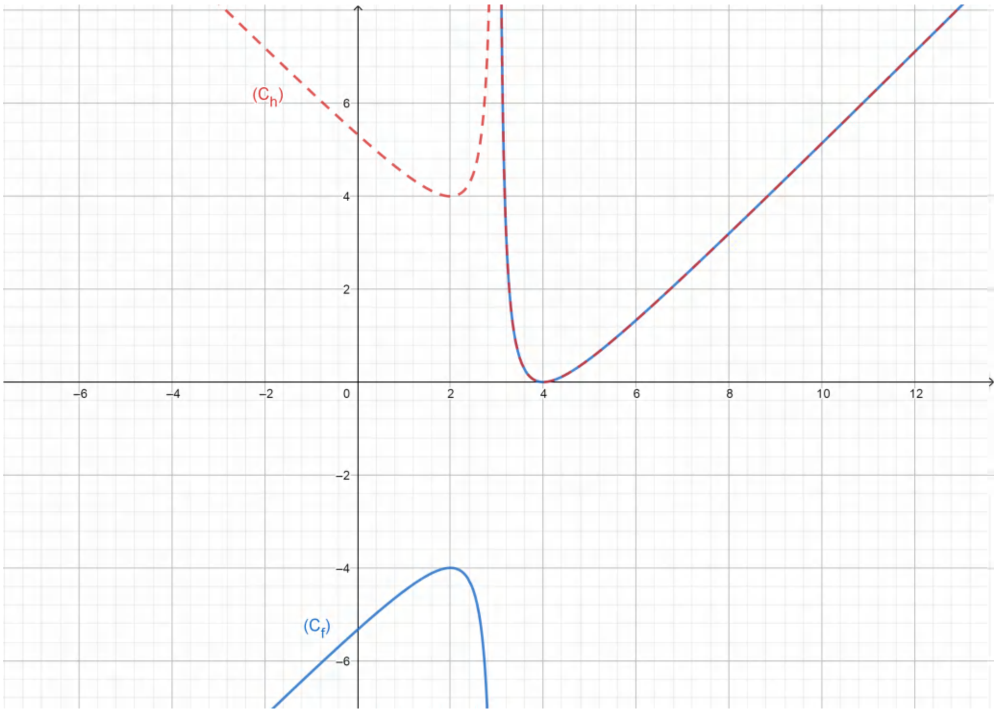
لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(x-4)^2}{|x-3|} \\ &= \frac{\left|(x-4)^2\right|}{|x-3|} \\ &= \left|\frac{x^2-8x+16}{x-3}\right| \\ &= |f(x)| \end{aligned}$$

ومنه:

$\left(C_h\right)$ ينطبق على $\left(C_f\right)$ إذا كان $f(x) \geq 0$

$\left(C_h\right)$ يناظر $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$.



(C_h)
(C_f)

حل المسألة رقم: 08

مشاهـــدة المسألة

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g:

أولا: حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}[2x^3-6x^2+6x+3] = \lim_{x\to-\infty}[x^3] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[2x^3-6x^2+6x+3] = +\infty$$

ثانيا: حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 6x^2-12x+6 = 6(x-1)^2 \geq 0$$

ثالثا: تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	3	↗	$+\infty$

❷

أ/ تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدلة g رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

ولدينا: $g(-0.3) = 0.606$ و $g(-0.4) = -4.88$

ولدينا: $g(-0.3)\times g(-0.4) < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

ب/ تحديد حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II

❶ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن :

$$f(x) = x^2-2x-1-\frac{5}{x-1} = \frac{(x^2-2x-1)(x-1)-5}{x-1} = \frac{(x^2-2x-1)(x-1)-5}{x-1} = \frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}$$

❷

أ/ حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}\right]$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[x^2] = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}\right]$

$$= +\infty$$

- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to x\to1}}\left[x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}\right]$

$$= \lim_{\substack{< \\ x\to1}}\left[-2-\frac{5}{0^-}\right] = +\infty$$

- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}}\left[x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}\right]$

$$= \lim_{\substack{> \\ x\to1}}\left[-2-\frac{5}{0^+}\right] = -\infty$$

نلاحظ أن المستقيم $(x=1)$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f:

أولا: حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x-2+\frac{5}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2(x-1)^3+5}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^3-6x^2+6x+3}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

لدينا $(x-1)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة $g(x)$.

ثانيا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

❸ حساب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x^2-2x-1)]$:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x^2-2x-1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{5}{x-1}\right] = 0$

المنحنى (C_p) الممثل للدالة: (x^2-2x-1) هو منحني تقارب للدالة f بجوار $\pm\infty$

❹ دراسة الوضع النسبي بين (C_p) والمنحنى (C_f):

دراسة إشارة الفرق: $[f(x)-p(x)]$

لدينا:

$$f(x)-p(x) = -\frac{5}{x-1} = \frac{5}{1-x}$$

لدينا: $5>0$ إذن الإشارة من إشارة المقام

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$ $\quad$ 1	$+\infty$
$f(x)-p(x)$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (C_p)	(C_f) تحت (C_p)

❺ تبيين أن $\left[f(\alpha)=\frac{15}{2(1-\alpha)}-2\right]$:

يكفي أن نثبت أن: $\left(f(\alpha)-\frac{15}{2(1-\alpha)}+2=0\right)$

لدينا: $g(\alpha)=0$ ، ولدينا:

$$f(\alpha)-\frac{15}{2(1-\alpha)}+2=\alpha^2-2\alpha-1-\frac{5}{\alpha-1}-\frac{15}{2(1-\alpha)}+2$$
$$=\frac{2(\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha-1)-2(5)+15+2\big(2(\alpha-1)\big)}{2(\alpha-1)}$$
$$=\frac{2\alpha^3-6\alpha^2+6\alpha+3}{2(\alpha-1)}$$
$$=\frac{g(\alpha)}{2(\alpha-1)}=\frac{0}{2(\alpha-1)}=0$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $0.4<\alpha<-0.3$

ومنه: $0.3<-\alpha<0.4$

ومنه: $1.3<1-\alpha<1.4$

ومنه: $2.6<2(1-\alpha)<2.8$

ومنه: $\frac{1}{2.8}<\frac{1}{2(1-\alpha)}<\frac{1}{2.6}$

ومنه: $\frac{15}{2.8}-2<\frac{15}{2(1-\alpha)}-2<\frac{15}{2.6}-2$

إذن: $3.36<f(\alpha)<3.77$

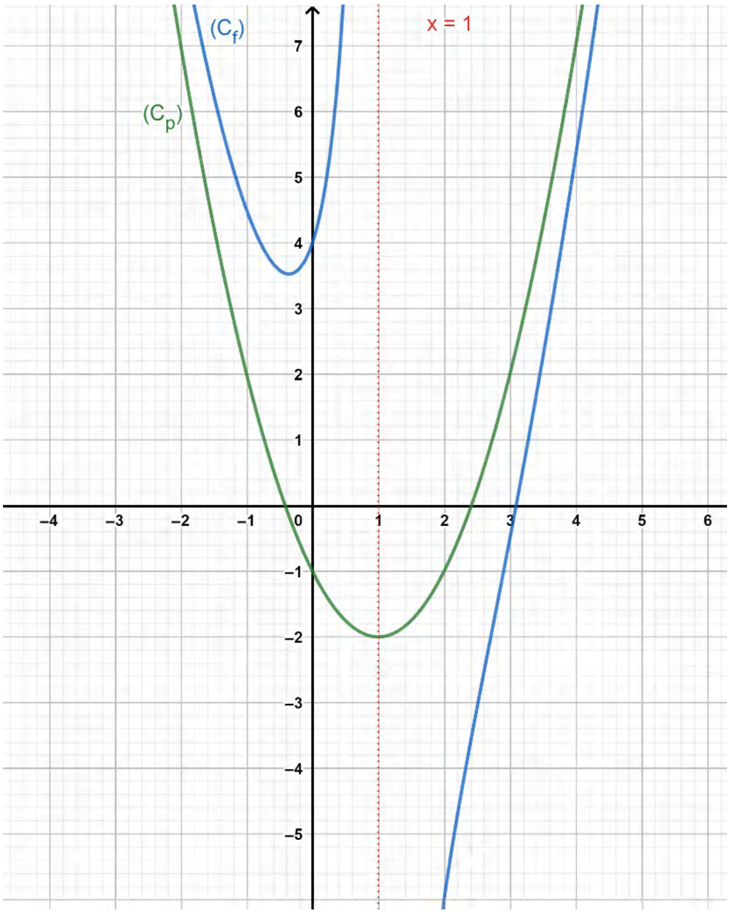
❻ التمثيل البياني لكل من (C_p) و (C_f):

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيم المقارب: $x=1$

نرسم المنحني المقارب ذو المعادلة (x^2-2x-1).

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(C_f)
(C_p)
x = 1

حل المسـألة رقم: 09

مشاهــــدة المسألة

(I

❶ تعيين D_f مجموعة تعريف الدالة f:

لكي تكون الدالة f معرفة يجب أن يكون:

$$x^2 - 3x + 2 \neq 0$$
$$(x-1)(x-2) \neq 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ \text{و} \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \text{و} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

ومنه: $D_f = \mathbb{R} - \{1; 2\}$

- تبين أنه من أجل كل x من D_f فإن: $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} \\ &= \frac{a(x-1)(x-2) + b(x-2) + c(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{ax^3 + (-3a + b + c)x + (2a - 2b - c)}{x^2 - 3x + 2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -3a + b + c = 2 \\ 2a - 2b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + c = 5 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 - c \\ c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 9 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$$

❷

أ/ دراسة تغيرات الدالة f:

أولا: حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}\right] = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1} [f(x)] = \lim\limits_{x\to 1} \left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \left[-8 - \frac{4}{0}\right] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2} [f(x)] = \lim\limits_{x\to 2} \left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}\right] = \lim\limits_{x\to 2} \left[-3 + \frac{9}{0}\right] = +\infty$

ثانيا: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-2)^2} \\ &= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\ &= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-5x^2 + 2x + 7}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$= \frac{(x+1)\left(x - \frac{7}{5}\right)}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

لدينا: المقام $(x^2 - 3x + 2)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$(x+1)\left(x - \frac{7}{5}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ \text{و} \\ x - \frac{7}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{و} \\ x = \frac{7}{5} \end{cases}$$

ثالثا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-24	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

ب/ المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f):

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$

$x = 1$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$

$x = 2$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمقارب الأفقي (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} - 1$$

$$= -\frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$$

$$= \frac{-4(x-2) + 9(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{5x - 1}{(x-1)(x-2)}$$

إشارة الكسر من إشارة البسط $\times$ إشارة المقام

دراسة إشارة البسط:

$$5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

دراسة إشارة المقام:

$$(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{و} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{و} \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		1		2		$+\infty$
$5x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 3x + 2$		$+$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x) - y$		$-$	0	$-$	‖	$-$	‖	$+$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in \left]\frac{1}{5};1\right[\cup \left]2;+\infty\right[$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in \left]-\infty;\frac{1}{5}\right[\cup \left]1;2\right[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = \frac{1}{5}$

❸ تعيين تقريب تآلفي للدالة f عند 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$$

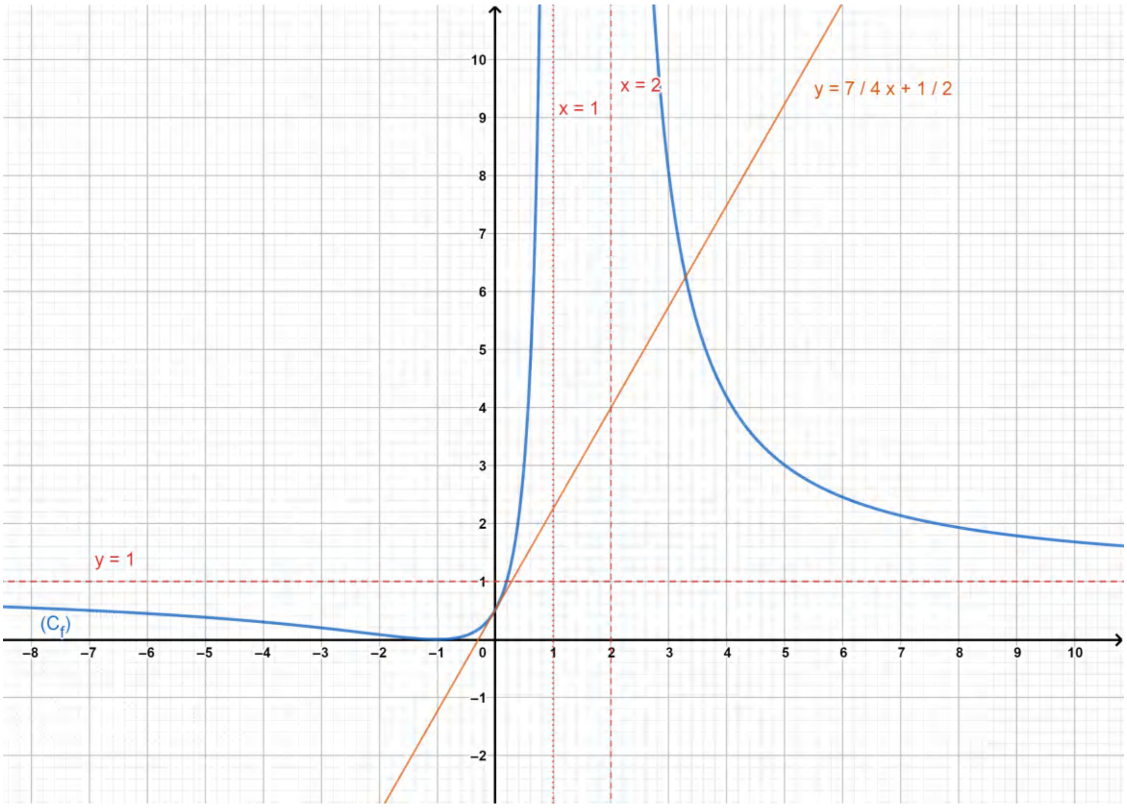
❹ التمثيل البياني:

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 3$

نعين المماس ذو المعادلة $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II

❶ تعيين مجموعة تعريف الدالة h:

لتكون الدالة h معرفة يجب أن يكون:

$$x^2 - 3|x| + 2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \neq 0, x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 \neq 0, x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x-1) \neq 0 \\ (x+2)(x+1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

ومنه: $D_h = \mathbb{R} - \{-2; -1; 1; 2\}$

❷ كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

الخليل للرياضيات

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}, x\geq 0\\ \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}, x<0\end{cases}$$

لاحظ أنه لما $x \geq 0$ فإنه $h(x)=f(x)$

❸ دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0 :

◀ عندما تتساوى النهايتان من اليمين واليسار عند a وكلا النهايتان تساوي $f(a)$، نقول أن الدالة مستمرة عند ذلك العدد ▶

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}\right]=\left[\frac{0^2-2(0)+1}{0^2+3(0)+2}\right]=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}\right]=\left[\frac{0^2-2(0)+1}{0^2+3(0)+2}\right]=\frac{1}{2}$$

بما أن: $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}[h(x)]=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}[h(x)]=\frac{1}{2}$ فإن: الدالة h مستمرة عند 0.

- قابلية الاشتقاق عند 0:

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}-\frac{1}{2}}{x}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{2x^2+4|x|+2-x^2+3|x|-2}{2x(x^2-3|x|+2)}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{x^2+7x}{2x(x^2-3|x|+2)}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{x+7}{2(x^2-3|x|+2)}\right]=\frac{7}{4}$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[\frac{\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}-\frac{1}{2}}{x}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[\frac{x^2+7|x|}{2x(x^2-3|x|+2)}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{x-7}{2(x^2-3|x|+2)}\right]=-\frac{7}{4}$$

بما أن النهايتين غير متساويتين نقول أن: الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند 0.

ومنه المنحنى (C_h) يقبل نصفي مماسيين معامل توجيه كل منهما: $\frac{7}{4}$ و $-\frac{7}{4}$

❹ دراسة شفعية الدالة h:

$$h(-x)=\frac{(-x)^2+2|-x|+1}{(-x)^2-3|-x|+2}=\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}=h(x)$$

❺ استنتاج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقا من (C_f):

لدينا:

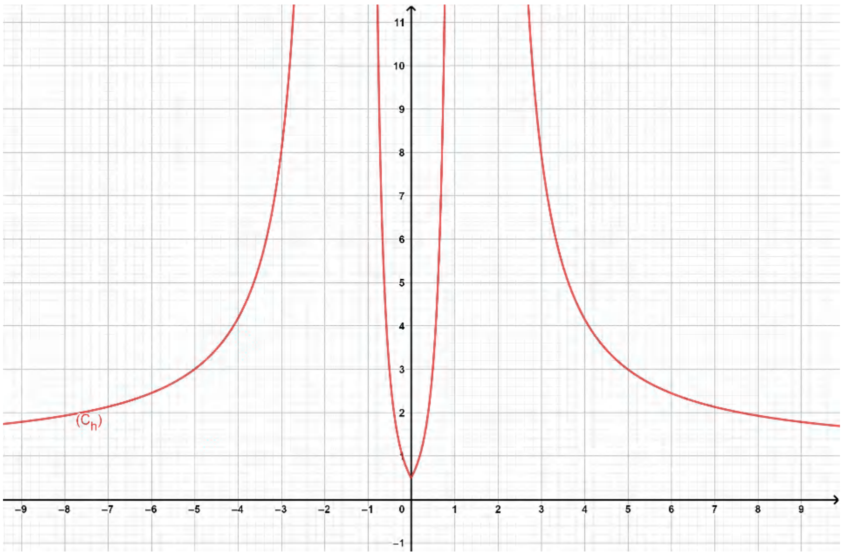
$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}, x\geq 0\\ \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}, x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}f(x), x\geq 0\\ f(-x), x<0\end{cases}$$

الخليل للرياضيات

لما $x \geq 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$ ، ومنه منحني الدالة h ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

ولما $x < 0$ لدينا: $h(x) = f(-x)$ ، ومنه (C_h) يناظر منحني الدالة f بالنسبة لمحور التراتيب لما $x < 0$



❻ المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
&(m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m - 1 = 0\\
&\Rightarrow mx^2 - x^2 - 3mx - 2x + 2m - 1 = 0\\
&\Rightarrow m(x^2 - 3x + 2) = x^2 + 2x + 1\\
&\Rightarrow m = \frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}\\
&\Rightarrow m = \frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}
\end{aligned}$$

ومنه: $m = h(x)$ لما: $x \geq 0$

إذن المناقشة كالآتي:

لما: $m < \frac{1}{5}$ المعادلة لا تقبل حلول

لما: $m = \frac{1}{5}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا

لما: $1 \geq m > \frac{1}{5}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

لما: $m > 1$ المعادلة تقبل حلان

حل المسألة رقم: 10

مشاهـــدة المسألة

(I

❶ برهان أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

G مجموع دالتين قابلتين للاتشقاق على $\mathbb{R}$ إذن G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- حساب $G'(x)$:

$$G'(x) = F'(x) - F'(-x)$$
$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(-x)^2+1}$$
$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

ومنه الدالة G ثابتة.

❷ حساب $G(0)$:

$$G(0) = F(0) - F(-0) = 0$$

- استنتاج أن G فردية:

بما أن الدالة G ثابتة، اذن من كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $F(x) + F(-x) = 0 \Leftrightarrow F(-x) = -F(x)$

ومنه الدالة F فردية

(II

❶ تبرير أنّ H تقبل الاشتقاق على I وحساب $H'(x)$:

H مجموع دالتين قابلتين للاتشقاق على $\mathbb{R}_+^*$ إذن H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

$$H'(x) = F'(x) + \left[F\left(\frac{1}{x}\right)\right]'$$
$$= F'(x) - \frac{1}{x^2}F'(x)$$
$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}$$
$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

ومنه الدالة H ثابتة.

❷ برهان أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$:

$$H(1) = F(1) + F\left(\frac{1}{1}\right) = 2F(1)$$

وبما أن الدالة H ثابتة فإنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$ فإنه:

$$H(x) = 2F(1)$$

❸ استنتاج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} [F(x)] = 2F(1)$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} [H(x)] = \lim_{x\to+\infty} \left[F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} [F(x)] + F(0) = \lim_{x\to+\infty} [F(x)]$$

ومنه:

$$2F(1) = \lim_{x\to+\infty}[F(x)]$$

الاستنتاج: $\left(C_f\right)$ يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

وبما أن F فردية فإن $\left(C_f\right)$ يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

III)

❶ حساب $T'(x)$:

$$\begin{aligned} T'(x) &= [F(\tan x) - x]' = (\tan' x)F'(\tan x) - 1 \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\frac{1}{\tan^2 x + 1}\right) \\ &= (1 + \tan^2 x)\left(\frac{1}{\tan^2 x + 1}\right) - 1 \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

ومنه T دالة ثابتة.

❷ حساب $F(1)$:

لدينا: $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\ni 0$ ومنه $0 \in D_T$ أي:

$$T(0) = F(\tan 0) - 0 = F(0) - 0 = 0 - 0 = 0$$

وبما أن T ثابتة فإنه من أجل كل $x \in D_T$ فإنه $T(x) = 0$ ، إذن:

$$F(\tan x) = T(x) + x = 0 + x = x$$

ولدينا من جهة أخرى: $F(\tan x) = F(1)$ أي $\tan x = 1$

وهذا يكافئ: $x = \frac{\pi}{4}$ لأن: $x \in]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ ، إذن: $F(1) = F\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

IV)

❶ انجاز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة F' موجبة تماما ومنه الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

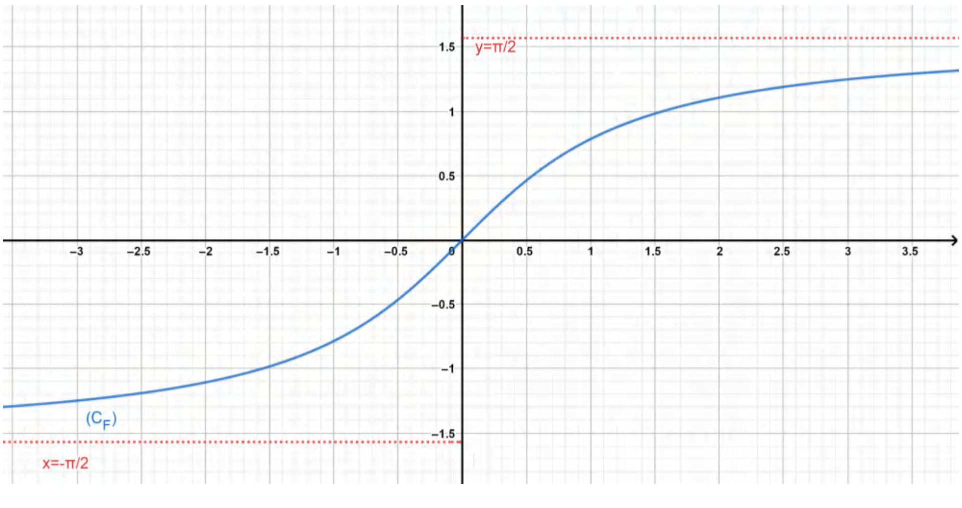
ولدينا $\lim_{x\to+\infty}[F(x)] = 2F(1)$ و $F(1) = \frac{\pi}{4}$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}[F(x)] = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

وبما أن الدالة F فردية فإن: $\lim_{x\to-\infty}[F(x)] = -\frac{\pi}{2}$ ، ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	$\frac{-\pi}{2}$ ↗	0	↗ $\frac{\pi}{2}$

❷ رسم المنحنى $\left(C_f\right)$ والمستقيمات المقاربة:



حل المسألة رقم: 11

مشاهدة المسألة

I)

1

أ/ حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}[x^3-3x^2+3x-5] = \lim_{x\to-\infty}[x^3] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[x^3-3x^2+3x-5] = \lim_{x\to+\infty}[x^3] = -\infty$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة g:

<u>أولا: حساب $g'(x)$:</u>

$$g'(x) = 3x^2-6x+3$$

معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستعمل المميز Δ،

$$\Delta = (-6)^2-4(3)(3) = 0$$

ومنه المعادلة لها حل مضاعف هو:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

ومنه:

$$g'(x) = 3x^2-6x+3 = 3(x-1)^2$$

لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما.

ولدينا $g'(1) = 0$ ، ومنه الدالة g تنعدم ولا تغير اشارتها.

<u>ثانيا: جدول التغيرات:</u>

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2

أ/ تبيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على مجال تعريفها ،

ولدينا: $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$ و $g(2) = -3$

ولدينا: $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] \times g(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2;+\infty[$.

ب/ حصر العدد α:

α	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.7	2.8	...	$+\infty$
$g(\alpha)$	-3	-2.6	-2.2	-1.8	-1.2	-0.6	0.1	1.8	...	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن: $2.5 < \alpha < 2.7$

ج/ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶ تعيين نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}[x] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to1}[f(x)] = \lim_{x\to1}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right] = \lim_{x\to1}\left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

❷ تحديد الأعداد الحقيقية c, b, a:

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{(x-1)^2} = \frac{(ax+b)(x-1)^2+c}{(x-1)^2} = \frac{ax^3+x^2(-2a+b)+x(a-2b)+b+c}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=-3 \\ a-2b=3 \\ b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x-1+\frac{2}{(x-1)^2}$$

❸

أ/ تبيين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d):

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x-1+\frac{2}{(x-1)^2}-(x-1)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2}{(x-1)^2}\right] = 0$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f):

دراسة إشارة الفرق: $f(x)-y$:

$$f(x)-y=\frac{2}{(x-1)^2}>0$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (d)	‖	(C_f) فوق (d)

❹

أ/ دراسة تغيرات الدالة f:

أولا: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-1)^3-4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{g(x)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط في المقام

ثانيا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		α		$-\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$	

ب/ تبيين أنّ (C_f) يقطع مرة وحيدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β :

لدينا: $f(-1)=-1.5$ و $f(0)=1$

ولدينا $f(-1)\times f(0)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $-1\leq\beta\leq 0$

ج/ تبيين أن $f(\alpha)=\frac{6}{(\alpha-1)^2}$:

يكفي أن نثبت أن: $f(\alpha)-\frac{6}{(\alpha-1)^2}=0$:

لدينا سابقا: $g(\alpha)=0$ ، إذن:

$$\begin{aligned} f(\alpha)-\frac{6}{(\alpha-1)^2} &= \alpha-1+\frac{2}{(\alpha-1)^2}-\frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2}+\frac{2}{(\alpha-1)^2}-\frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-5}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\frac{0}{(\alpha-1)^2}=0 \end{aligned}$$

حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $2.5<\alpha<2.7$

ومنه: $1.5 < \alpha - 1 < 1.7$

ومنه: $2.25 < (\alpha - 1)^2 < 2.89$

ومنه: $\frac{1}{2.89} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{2.25}$

ومنه: $\frac{6}{2.89} < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < \frac{6}{2.25}$

إذن: $2.07 < f(\alpha) < 2.66$

❺ إنشاء (C_f):

حساب $f(0)$:

$$f(0) = 0 - 1 + \frac{2}{(0-1)^2} = 1$$

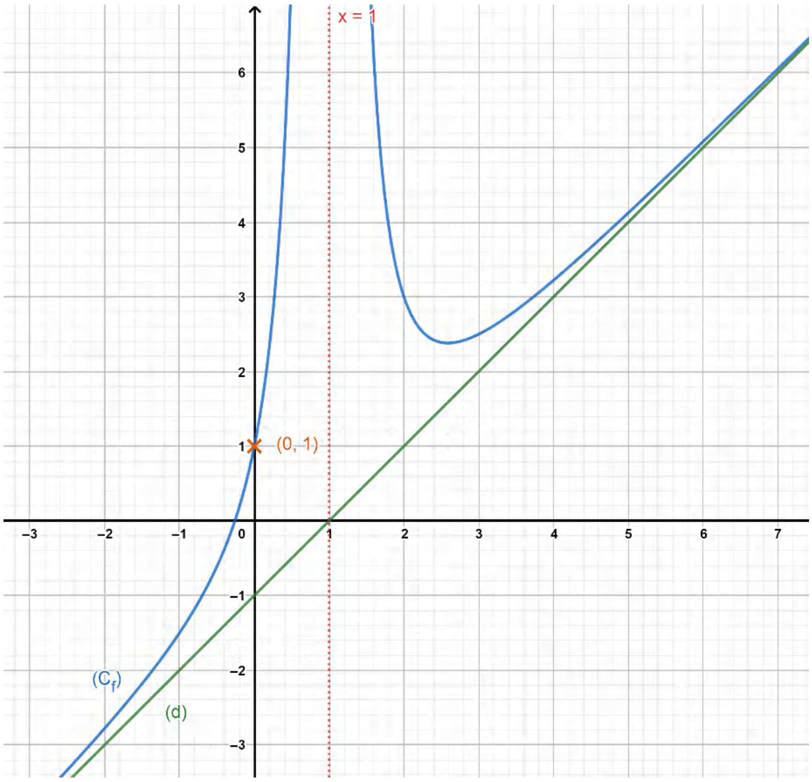
خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$

نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 1$

نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (yy')

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(III

❶ تبين أن h زوجية:

لدينا: $x \in D_h$ معناه: $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

معناه: $x < -1$ أو $-1 < x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $-x > 1$ أو $1 > -x > -1$ أو $-x < -1$

معناه: $(-x) \in]1; +\infty[$ أو $(-x) \in]-1; 1[$ أو $(-x) \in]-\infty; -1[$

معناه: $(-x) \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

ومنه: $(-x) \in D_h$

ولدينا: $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$

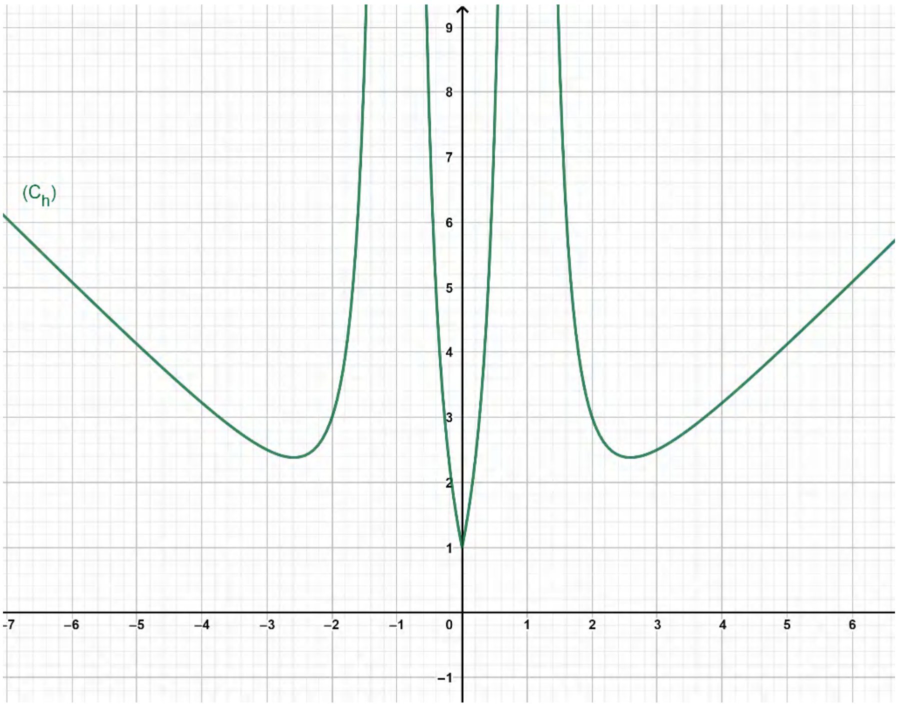
ومنه الدالة h زوجية.

❷ انشاء (C_h):

لدينا: $f(|x|) = h(x)$

ومنه لما $x \geq 0$، يكون (C_h) منطبقا على (C_f)

ولما: $x \leq 0$، يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب (yy')



❸ المناقشة البيانية:

أولا: $f(x) = m$:

لما	$m < 1$	المعادلة تقبل حل وحيد سالب
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حل وحيد معدوم
لما	$1 < m < f(\alpha)$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب
لما	$m = f(\alpha)$	المعادلة تقبل حلين موجبين
لما	$m > f(\alpha)$	المعادلة تقبل ثلاث حلول موجبة

ثانيا: $f(x) = x + m$:

لما	$m \leq -1$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$-1 < m < 1$	المعادلة تقبل حلان متمايزان
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حلان موجبان
لما	$m > 1$	المعادلة تقبل حلان موجبان متمايزان

حل المسـألة رقم: 12

مشاهـــدة المسألة

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g:

أولا: حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[2x-\sqrt{1+x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2x-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2x+x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)\right] = -\infty$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$$

ثانيا: حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 2-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ثالثا: دراسة $g'(x)$:

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة البسط:

لما: $x \geq 0$: لدينا:

$$2\sqrt{1+x^2}-x = \frac{\left(2\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(2\sqrt{1+x^2}+x\right)}{2\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$= \frac{4(1+x^2)-x^2}{2\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$= \frac{3x^2+1}{2\sqrt{1+x^2}+x} > 0$$

لما: $x \leq 0$: واضح أن $2\sqrt{1+x^2}-x > 0$

ومنه $g'(x) > 0$ أي أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α:

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا: $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}[g(x)] = -\infty$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] \times \lim_{x\to-\infty}[g(x)] < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

تعيين α:

لدينا: $g(x) = 0$ أي:

$$2x - \sqrt{1+x^2} \Rightarrow 2x = \sqrt{1+x^2}$$
$$\Rightarrow 4x^2 = 1 + x^2$$
$$\Rightarrow 3x^2 = 1$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

ومنه:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \dots (\text{مقبول}) \\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \dots (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

x_2 مرفوض لأن $x \geq 0$.

ومنه $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$

❸ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶

أ/ حساب نهايات الدالة f:

- $$\lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-2x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(2\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} + 1\right)\right] = +\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} - 1\right)\right] = +\infty$$

ب/ حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 2\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$$
$$= \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$.

ج/ جدول تغيرات الدالة f:

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $g(x)$ ومنه:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	↗ $+\infty$

❷ حساب: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+3x]$:

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+3x] = \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} - x + 3x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} + 2x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(2\sqrt{1+x^2}+2x\right)\left(2\sqrt{1+x^2}-2x\right)}{2\sqrt{1+x^2}-2x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{1+x^2}-x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{-x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}\right] = 0$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y = -3x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

❸

أ/ تبيين أن (d') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} - x - x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} - 2x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(2\sqrt{1+x^2}-2x\right)\left(2\sqrt{1+x^2}+2x\right)}{2\sqrt{1+x^2}+2x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}\right] = 0$$

ومنه المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-3x)$:

$$f(x)+3x = 2\sqrt{1+x^2}+2x$$
$$= \frac{2}{-x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)} \geq 0$$

لأن $x < 0$

إشارة الفرق الموجبة ومنه المنحنى (C_f) فوق (d).

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d') :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x)$:

$$f(x)-x = 2\sqrt{1+x^2}-2x$$
$$= \frac{2}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)} \geq 0$$

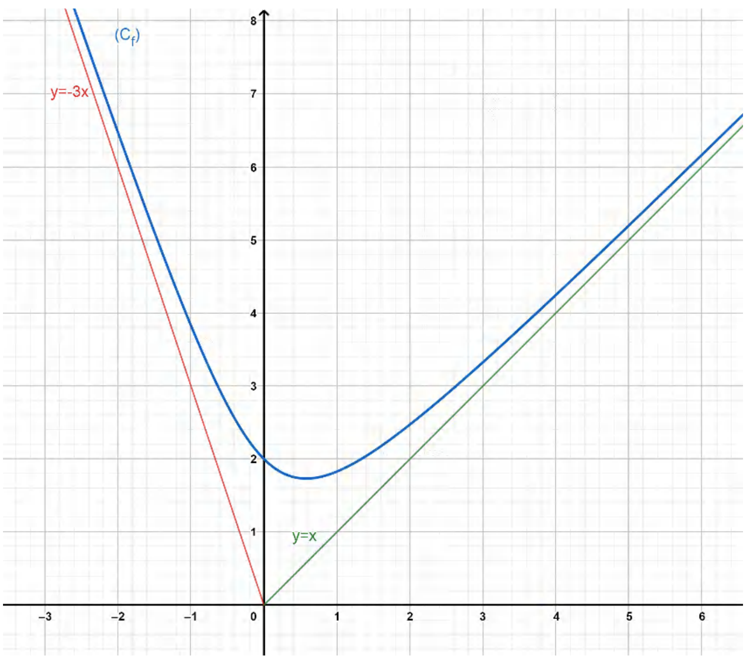
إشارة الفرق الموجبة ومنه المنحنى (C_f) فوق (d').

❹ إنشاء المنحنى (C_f):

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة المائلة: (d) و (d')

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



الخليل للرياضيات

حل المسألة رقم: 13

مشاهـــدة المسألة

(I

❶ دراسة اتجاه تغير الدالة g تشكيل جدول تغيراتها:

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^3) = +\infty$$

$$\bullet\ g(-1) = -2$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 6x^2 + 12x + 7$$

لحل المعادلة $g'(x) = 0$ نستعمل المميز Δ

لدينا: $\Delta = -24 < 0$، إذن المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ وعليه: $g'(x) > 0$

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	-2 ↗	$+\infty$

❷ حساب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0{,}2)$ و $g(-0{,}1)$:

$$g(-0.2) \approx -0.018 \quad ; \quad g(-0.1) \approx 0.36$$

❸ استنتاج أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0.2; -0.1[$ حيث: $g(\alpha) = 0$:

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[-0.2; -0.1]$

ولدينا: $g(-0.2) \times g(-0.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.2; -0.1[$

❹ استنتاج إشارة الدالة g على المجال $]-1, +\infty[$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶

أ/ حساب $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = -1$.

ب/ حساب $\lim_{x\to+\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2}\right)$$

$$= +\infty$$

❷ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1)+cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a = 2 \\ 2a+b=4 \\ a+2b+c=1 \\ b=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$

إذن:

$$f(x) = 2x - \frac{x}{(x+1)^2}$$

❸

أ/ تبيين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x] &= \lim_{x\to+\infty}\left[2x - \frac{x}{(x+1)^2} - 2x\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{(x+1)^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (D) :

$$f(x) - y_{(D)} = 0 \Rightarrow -\frac{x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

إذن:

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y_{(D)}$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما $x \in [-1; 0[$.
- (C_f) يقطع (D) لما $x = 0$.
- (C_f) تحت (D) لما $x \in \,]0; +\infty[$.

❹

أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]-1,+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x^2+8x+1)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^3+4x^2+x)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(6x^2+8x+1)(x+1) - 2(2x^3+4x^2+x)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{6x^3+8x^2+x+6x^2+8x+1-4x^3-8x^2-2x}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(x+1)^3 \geq 0$ لما $x \in D_f$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

❺ كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 2:

$$\begin{aligned}(T): y &= f'(2)(x-2)+f(2)\\ &= \frac{55}{27}(x-2)+\frac{34}{9}\\ &= \frac{55}{27}x-\frac{8}{27}\end{aligned}$$

❻ تبيين أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحني (C_f):

(C_f) يقبل نقطة انعطاف معناه أن f'' تنعدم وتغير إشارتها:

لدينا:

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{g'^{(x)}(x+1)^3-3(x+1)^2g(x)}{(x+1)^6}\\ &= \frac{g'(x)(x+1)-3g(x)}{(x+1)^4}\\ &= \frac{(6x^2+12x+7)(x+1)-3(2x^3+6x^2+7x+1)}{(x+1)^4}\\ &= \frac{6x^3+12x^2+7x+6x^2+12x+7-6x^3-18x^2-21x-3}{(x+1)^4}\\ &= \frac{-2x+4}{(x+1)^4}\end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^4 \geq 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط:

$$-2x+4=0 \Rightarrow x=2$$

x	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

المشتقة f'' تنعدم عند النقطة ذات الفاصلة 2 وتغير إشارتها، فهي تقبل نقطة انعطاف.

❼ تعيين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل:

فوصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة: $f(x)=0$

لدينا:

$$\begin{aligned}f(x)=0 &\Rightarrow \frac{2x^3+4x^2+x}{(x+1)^2}=0\\ &\Rightarrow 2x^3+4x^2+x=0\\ &\Rightarrow x(2x^2+4x+1)=0\\ &\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ 2x^2+4x+1=0 \dots (*) \end{cases}\end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

لحل المعادلة $(*)$ نستعمل المميز Δ:

لدينا: $\Delta = 16 - 4(2)(1) = 8$ إذن:

$$x = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{0; \left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

(III

❶ تبيين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر للمنحني (C_h):

أولا: نبيّن أنّ $(-2-x) \in D_h$:

لدينا: $x \in D_h$

معناه: $x > -1$ أو $x < -1$ معناه: $(-x) < 1$ أو $(-x) > 1$

معناه: $(-2-x) < -1$ أو $(-2-x) > -1$ معناه: $x \in]-1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$

إذن: $(-2-x) \in D_h$

ثانيا: نبيّن أنّ $h(2(-1)-x) = h(x)$ أي نبيّن أنّ $h(-2-x) = h(x)$:

$$\begin{aligned} h(-2-x) &= \begin{cases} f(-2-x) & ; \quad (-2-x) > -1 \\ f(-(-2-x)-2) & ; \quad (-2-x) < -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(-2-x) & ; \quad -x > 1 \\ f(2+x-2) & ; \quad -x < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(-2-x); & x > -1 \\ f(x) & ; \quad x > -1 \end{cases} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

إذن: $x = -1$ محور تناظر لـ (C_h)

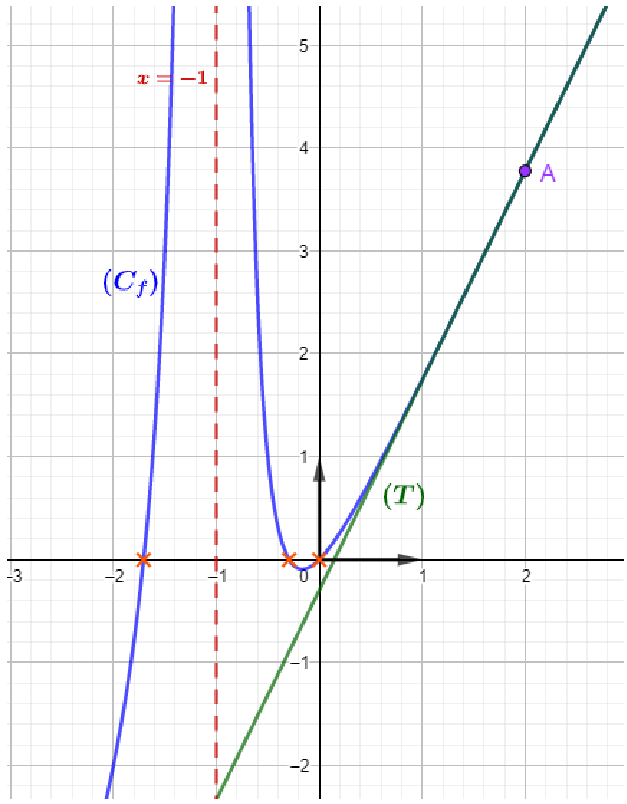
محور تناظر:

لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} (2a-x) \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

❷ التمثيل البياني:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$
- نعين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل (xx')
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



الخليل للرياضيات

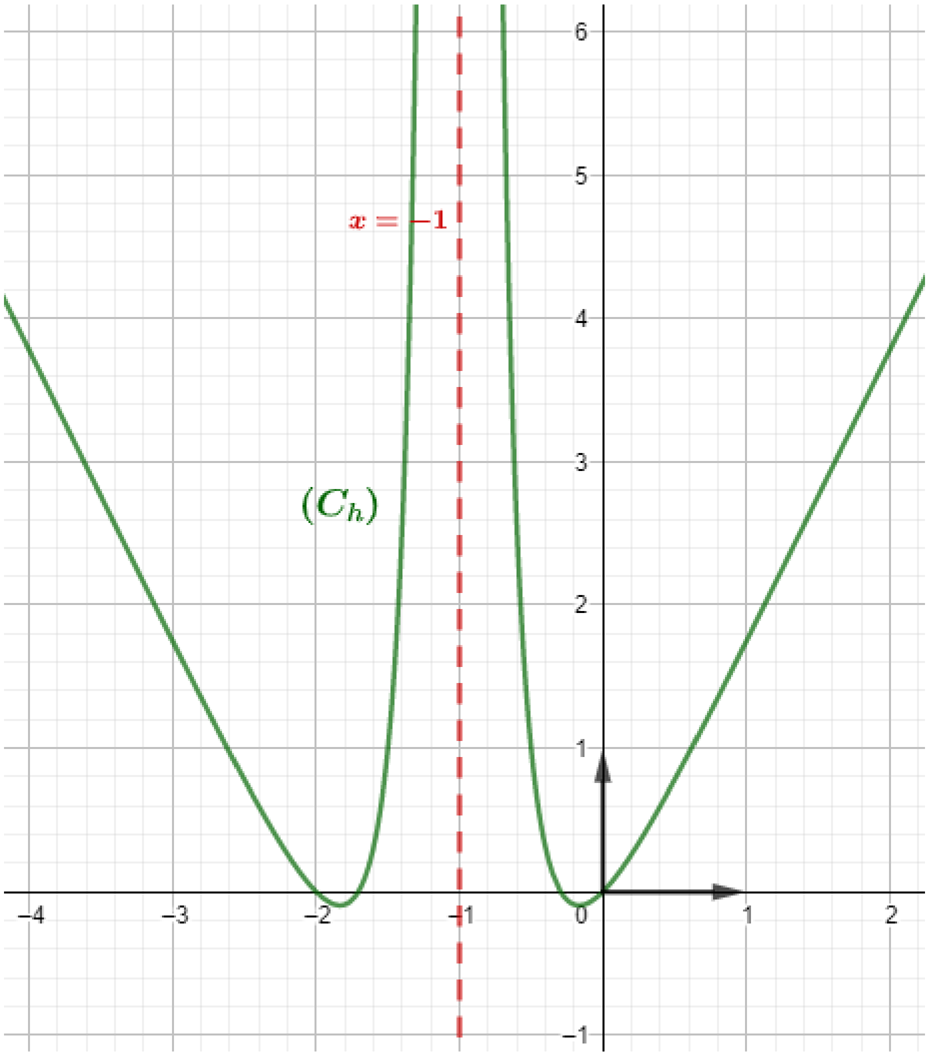
- رسم (C_h):

لدينا:

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & ; \quad x>-1 \\ f(-2-x) & ; \quad x>-1 \end{cases}$$

إذن (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x>1$

و (C_h) متناظر بالنسبة للمستقيم $x=-1$



حل المسألة رقم: 14

مشاهـــدة المسألة

I) تعيين α و β :

لدينا: $f(0)=-1$ ، ومنه:

$$\frac{(0)^2+\alpha(0)+\beta}{2(0)-2}=-1 \Rightarrow \frac{\beta}{-2}=-1$$
$$\Rightarrow \boxed{\beta=2}$$

ولدينا: $f(0)=-1$ تقبل قيمة حدية لـ f معناه: $f'(0)=0$

نعيّن أولا $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(2x+\alpha)(2x-2)-2(x^2+\alpha x+\beta)}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{4x^2-4x+2\alpha x-2\alpha-2x^2-2\alpha x-2\beta}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{2x^2-4x-2\alpha-2\beta}{(2x-2)^2}$$

ولدينا: $f'(0)=0$ ومنه:

$$\frac{2(0)^2-4(0)-2\alpha-2\beta}{(2(0)-2)^2}=0 \Rightarrow -2\alpha-2\beta=0$$
$$\Rightarrow -2\alpha=2\beta$$
$$\Rightarrow \alpha=-\beta$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha=-2}$$

ومنه: $\boxed{f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}}$

II) نضع فيما يلي: $\alpha=1$ و $\beta=-2$:

❶ حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x)$:

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right)$$
$$=\frac{1}{0^+}$$
$$=+\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=1$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right)$$
$$=\frac{1}{0^-}$$
$$=-\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x=1$

❷ حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right)$$

الخليل للرياضيات

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= +\infty$$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right)$
$$= -\infty$$

❸

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-2}$$
$$= \frac{(ax+b)(2x-2)+c}{2x-2}$$
$$= \frac{2ax^2-2ax+2bx-2b+c}{2x-2}$$
$$= \frac{2ax^2+(2b-2a)x-2b+c}{2x-2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b-2a = -2 \\ -2b+c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

إذن: $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2}}$

ب/ استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{2x-2}\right]$$
$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته : $y_{(\Delta)} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{2x-2}$$

لدينا: $2x-2=0$ معناه: $x=1$ ومنه:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$ ‖ $+$

ومنه:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in \,]-\infty;1[$.
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in \,]1;+\infty[$.

❹

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(2x-2) - 2(x^2-2x+2)}{(2x-2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x - 4x + 4 - 2x^2 + 4x - 4}{(2x-2)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$
$$= \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(2x-2)^2 > 0$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x(x-2)$:

لدينا:

$$2x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

❺

أ/ ايجاد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$:

نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم (Δ):

$$y = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

ومنه: $\omega(1;0)$

ب/ تبيين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$

معناه: $x \in \ ]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ معناه: $x > 1$ أو $x < 1$

معناه: $(-x) < -1$ أو $(-x) > -1$ معناه: $(2(1)-x) < 1$ أو $(2(1)-x) > 1$

معناه: $(2(1)-x) \in \ ]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ معناه: $(2(1)-x) \in D_f$

• ولدينا:

$$f(2(1)-x) + f(x) = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x) + 2}{2(2-x) - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$
$$= \frac{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2}{4 - 2x - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$
$$= 0\frac{x^2 - 2x + 2}{-(2x-2)} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$
$$= 0 = 2(0)$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

الخليل للرياضيات

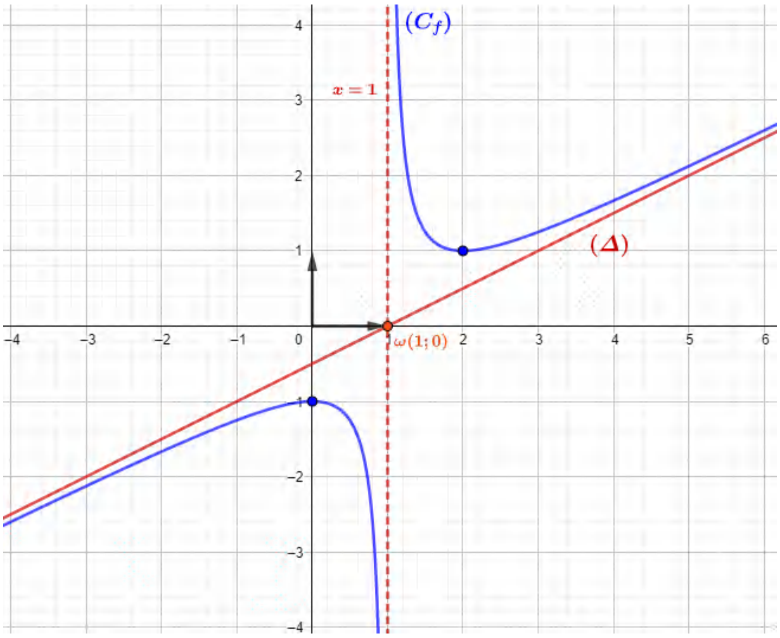
إذا وُجد مماس لـ (C_f) يشمل $\omega(1;0)$ معناه يوجد $a\in\mathbb{R}-\{1\}$ يحقق:

$$f'(a)(x_\omega - a)+f(a)=y_\omega$$

لدينا:

$$f'(a)(x_\omega - a)+f(a)=y_\omega \Rightarrow f'(a)(1-a)+f(a)=0$$
$$\Rightarrow \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2}-\frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2}a+\frac{a^2-2a+2}{2a-2}=0$$
$$\Rightarrow \frac{2a(a-2)-2a^2(a-2)+(a^2-2a+2)(2a-2)}{(2a-2)^2}=0$$
$$\Rightarrow 2a^2-4a-2a^3+4a^2+2a^3-2a^2-4a^2+4a+4a-4=0$$
$$\Rightarrow 4a-4=0$$
$$\Rightarrow a-1=0$$
$$\Rightarrow a=1$$

لدينا: $a\notin\mathbb{R}-\{1\}$ إذن: لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω



❻ رسم كل من (Δ) و (C_f) :

الرسم في الشكل المقابل.

❼ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=\frac{1}{2}x+m$ ، وهي:

لما	$m\in]-\infty;-1[$	للمعادلة حل موجب
لما	$m=-1$	للمعادلة حل معدوم
لما	$m\in\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$	للمعادلة حل سالب
لما	$m=-\frac{1}{2}$	المعادلة لا تقبل حلولا
لما	$m\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$	للمعادلة حل موجب

(III

❶ دراسة شفعية الدالة h:

$$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية

❷ توضيح كيف يمكن المنحنى (C_h) :

لدينا:

$$h(x)=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & ; \quad x\ge 0 \\ f(-x) & ; \quad x\le 0\end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x\ge 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

حل المسـألة رقم: 15

مشاهـــدة المسألة

(I

❶

أ/ حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x^3-4x^2+7x-4) = \lim_{x\to+\infty}(2x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x^3-4x^2+7x-4) = \lim_{x\to-\infty}(2x^3) = -\infty$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ وتشكيل جدول تغيراتها:

$$g'(x) = 6x^2-8x+7$$

لدينا: $\Delta = 64-4\times7\times6 = -104$، ومنه $\Delta < 0$

إذن المعادلة $g'(x) > 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

❷

أ/ تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α :

لدينا: الدالة g مستمرة ومتزايدة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(0.7)\times g(0.8) < 0$ لأنّ: $g(0.7) \approx -0.37$ و $g(0.8) \approx 0.06$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $0.7 < \alpha < 0.8$.

ب/ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II

❶ حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2} = -\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}$$
$$= +\infty$$

❷

أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$:

$$f(x)=\frac{x+1}{2}+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{2(x+1)(2x^2-2x+1)+2(1-3x)}{4(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$
$$=f(x)$$

ب/ استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) :

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-3x}{4x^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-3}{4x}\right]$$
$$=0$$

وأيضا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y_{(\Delta)}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ بجوار $\pm\infty$.

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ):

$$f(x)-y_{(\Delta)}=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

لدينا: $(2x^2-2x+1>0)$

لأنّ $\Delta<0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$1-3x=0\Rightarrow -3x=-1$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

ومنه:

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{1}{3}$ $\qquad$ $+\infty$

$f(x)-y_{(\Delta)}$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x=\frac{1}{3}$ أي في النقطة ذات الإحداثيات $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

❸

أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}\\
&= \frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}\\
&= \frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}\\
&= \frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}\\
&= \frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}
\end{aligned}$$

ب/ استنتاج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x :

لدينا:

$$f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

بما أنّ $(2x^2-2x+1)^2>0$ فالإشارة من $x\cdot g(x)$

ومنه:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-0.1	$\nearrow$	$+\infty$

❹ حساب $f(1)$:

$$f(1)=\frac{1-2+1}{2-2+1}=0$$

- حل المعادلة $f(x)=0$:

$$\begin{aligned}
f(x)=0 &\Rightarrow \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=0\\
&\Rightarrow x^3-2x+1=0\\
&\Rightarrow (x-1)(x^2+ax+b)=0
\end{aligned}$$

نبحث أولا عن a و b:

$$(x-1)(x^2+ax+b) = x^3+ax^2+bx-x^2-ax-b$$
$$= x^3+x^2(a-1)+x(b-a)-b$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a-1=0 \\ b-a=-2 \\ -b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{أو} \\ x^2+x-1=0 \end{cases}$$

لدينا: $x-1=0$ معناه: $x=1$

ولدينا: $x^2+x-1=0$ نحلها باستعمال المميز Δ:

$$\Delta = 1-4(1)(-1) = 5$$

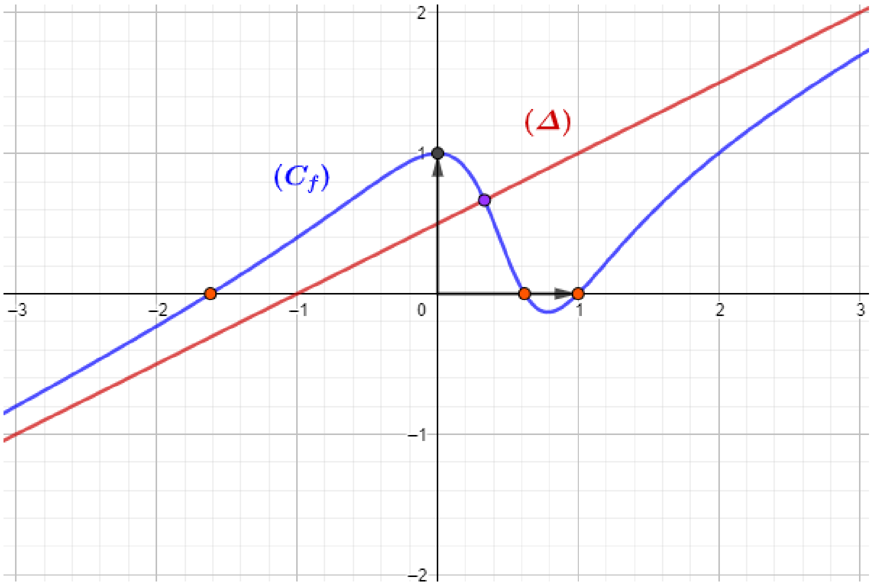
ومنه:

$$x^2+x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.62 \\ \text{أو} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.62 \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة $f(x)=0$ هي: $s=\left\{1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

❺ إنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) :

- نعين النقطة $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ)
- نعين النقط ذات الفواصل $1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.
- نعين النقطة ذات الترتيبة 1 ، نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب.
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نكمل رسم (C_f) ، مع الاستعانة بجدول الوضعية بين (C_f) و (Δ)



❻

أ/ التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$:

$$f(x)-2 = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}-2$$
$$= \frac{x^3-2x+1-4x^2+4x-2}{2x^2-2x+1}$$

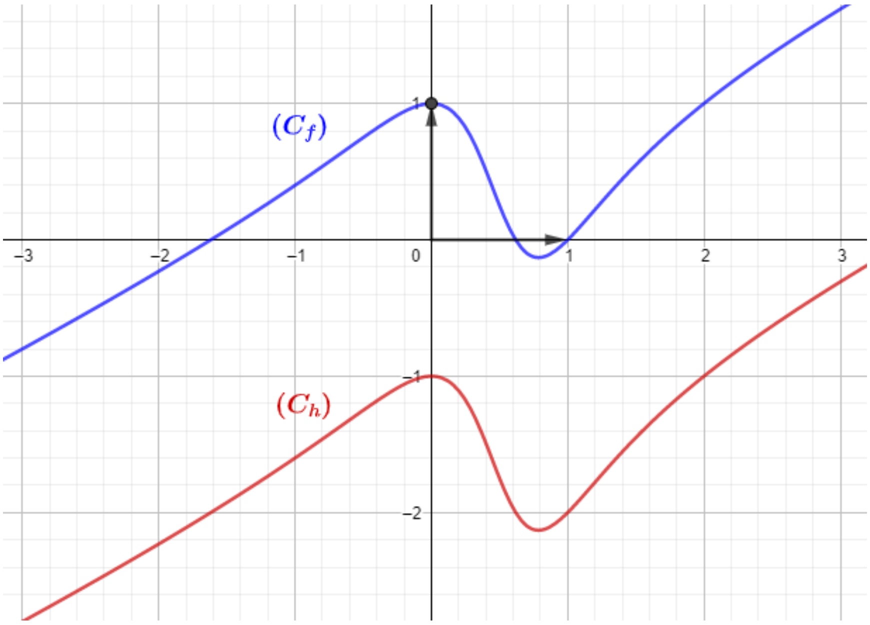
$$= \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$
$$= h(x)$$

ب/ استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط:

$$h(x) = f(x) - 2$$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}\binom{0}{2}$

- إنشاء (C_h) :



حل المسألة رقم: 16

مشاهـــدة المسألة

(I

❶ حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x-2}{2x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{2x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

❷ دراسة تغيرات الدالة f، وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+1)(2x)-2(x^3+x-2)}{(2x)^2} = \frac{6x^3+2x-2x^3-2x+4}{4x^2} = \frac{4x^3+4}{4x^2} = \frac{x^3+1}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:

نلاحظ أنّ (-1) جذر لـ (x^3+1) ومنه: $x^3+1 = (x+1)(ax^2+bx+c)$

باستعمال طريقة هورنر او المطابقة أو القسمة الاقليدية نجد:

	1	0	0	1
-1	0	-1	1	-1
	1	-1	1	0

إذن: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

نستعمل المميز Δ لحل المعادلة (x^2-x+1):

لدينا: $\Delta = -3 < 0$

ومنه: $f'(x) = 0$ معناه $x = -1$، إذن:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$

$f'(x)$	$-$ 0 $+$	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 2 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$

❸

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{2x}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + b + \frac{c}{2x} \\ &= \frac{(ax^2+b)(2x)+c}{2x} \\ &= \frac{2ax^3 + 2bx + c}{2x} \end{aligned}$$

بالمطابق نجد: $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -2 \end{cases}$ إذن: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$

ب/ استنتاج أنّ (C_f) يقبل منحنى (C) مقارب بجوار $\pm\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)\right] &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{1}{x}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن المنحنى (C) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

❹

أ/ تبيين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A :

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow \frac{x^3 + x - 2}{2x} = 0 \\ &\Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \end{aligned}$$

نلاحظ أنّ (1) جذر لـ $(x^3 + x - 2)$ ومنه: $x^3 + x - 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

باستعمال طريقة هورنر او المطابقة أو القسمة الاقليدية نجد:

	1	0	1	-2
1	0	1	1	2
	1	1	2	0

إذن: $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$

نستعمل المميز Δ لحل المعادلة $(x^2 + x + 2)$:

لدينا: $\Delta = -7 < 0$

ومنه: $f(x) = 0$ معناه $x = 1$، إذن: (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $A(1;0)$

ب/ كتابة معادلة للمماس (T) عند النقطة A:

$$\begin{aligned} y_{(T)} &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= 2(x-1) \\ &= 2x - 2 \end{aligned}$$

ج/ تبيين أنّ المماس (T) يقطع المنحنى (C_f) في نقطة أخرى B :

نعين نقط تقاطع (T) مع (C_f) بحل المعادلة $f(x) = y_{(T)}$

$$f(x) = y_{(T)} \Rightarrow \frac{x^3 + x - 2}{2x} = 2x - 2$$
$$\Rightarrow x^3 + x - 2 = 4x^2 - 4x$$
$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

وضعنا (1) جذر للمعادلة $f(x) = y_{(T)}$ لأننا نعلم سابقا أنّ النقطة A ذات الفاصلة 1 يكون عندها المماس (T).

ومنه باستعمال جدول هورنر نجد:

	1	-4	5	-2
1	0	1	-3	2
	1	-3	2	0

إذن: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$

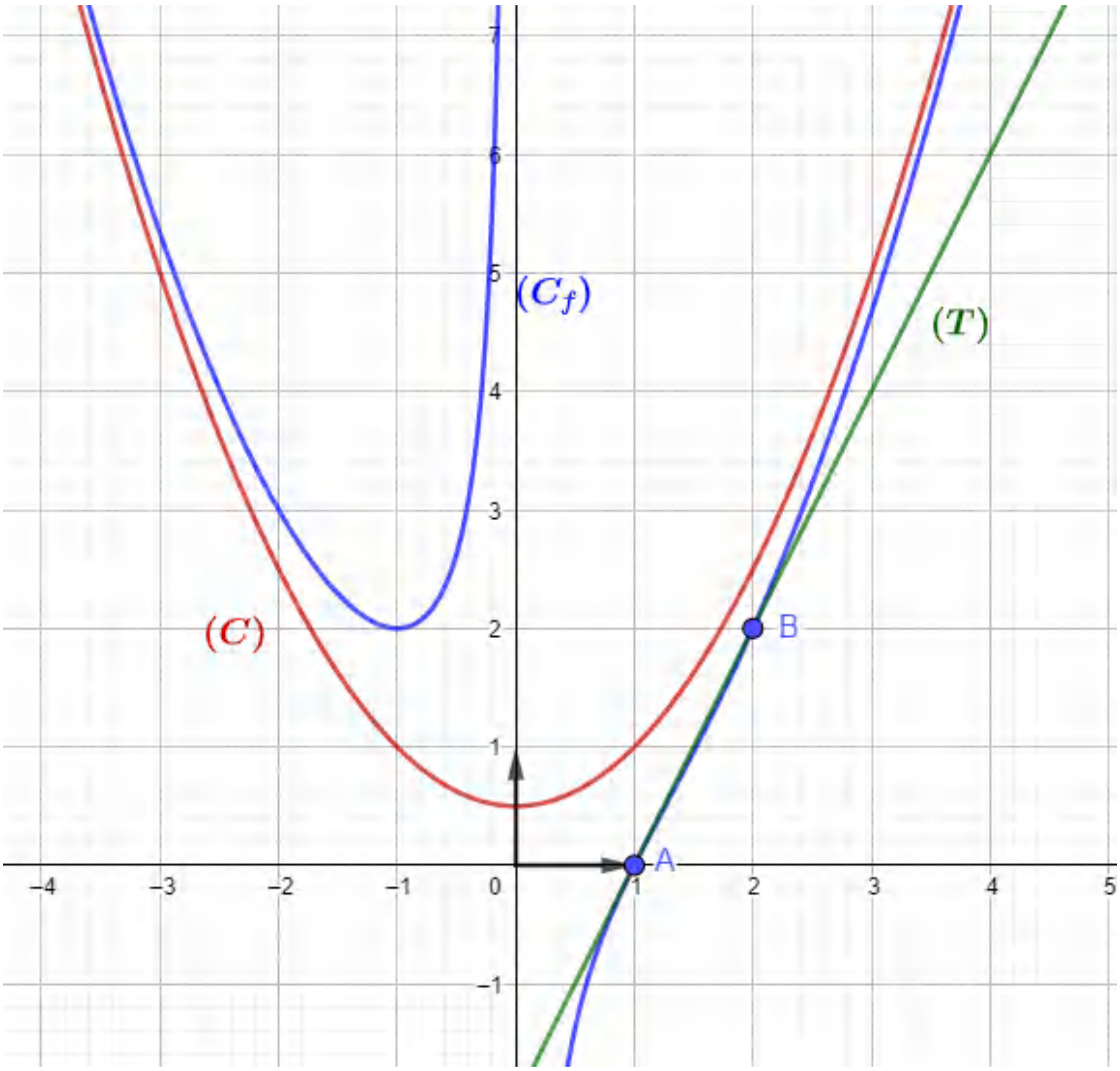
نستعمل المميز Δ لحل المعادلة $(x^2 - 3x + 2)$:

لدينا: $\Delta = 1$ ومنه: $x_1 = 2$ و $x_2 = 1$

إذن: $f(x) = y_{(T)}$ معناه $x = 1$ أو $x = 2$

نستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقطع (T) في نقطتين $A(1;0)$ و $B\big(2; f(2)\big)$ أي $B(2;2)$

❺ التمثيل البياني:



❻ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$

وبما أن ميل المستقيمات معدوم فالمناقشة أفقية، والحلول هي:

لما $m < 2$ للمعادلة حل موجب

لما $m = 2$ المعادلة تقبل حل موجب وحل مضاعف سالب

لما $m > 2$ المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب

(II

❶ دراسة شفعية الدالة h:

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{-(-x)^2|-x| - |-x| - 2}{2(-x)} \\ &= -\frac{-(x)^2|x| - |x| - 2}{2(x)} \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة h فردية

❷ إنشاء (C_f) مع شرح كيفية إنشائه:

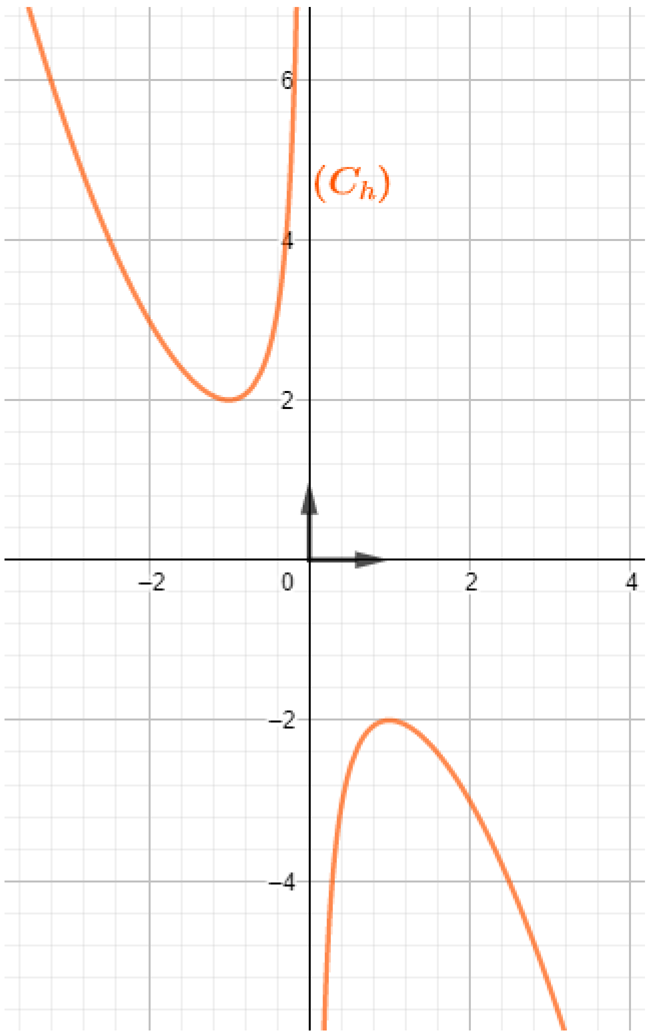
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x^2|x| - |x| - 2}{2x} \\ &= \begin{cases} \dfrac{-x^2(x) - (x) - 2}{2x} & ; \ x > 0 \\ \dfrac{-x^2(-x) - (-x) - 2}{2x} & ; \ x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{-x^3 - x - 2}{2x} & ; \ x > 0 \\ \dfrac{x^3 + x - 2}{2x} & ; \ x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -f(x) & ; \ x > 0 \\ \dfrac{x^3 + x - 2}{2x} & ; \ x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$ لدينا: $h(x) = -f(x)$

أي: لما $x < 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty; 0[$

وبما أنّ الدالة h فردية فهي متناظرة بالنسبة للمبدأ.



حل المسألة رقم: 17

مشاهـــدة المسألة

I)

❶

أ/ حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x+\underbrace{\frac{4}{x+1}}_{0}\right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(-x+\underbrace{\frac{4}{x+1}}_{0}\right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right) = +\infty$$

$$\bullet\ f(0) = 4$$

ب/ جدول تغيرات الدالة بقراءة بيانية:

x	$-\infty$ -1	-1 0
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 4$

❷

أ/ حساب نهاية g عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\underbrace{\frac{4}{x+1}}_{0}\right) = +\infty$$

ب/ التحقق من أنّ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right) = 0$$

ومنه (C_g) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$

ج/ دراسة تغيرات الدالة g:

$$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$

الخليل للرياضيات

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - 4}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x^2 + 2x - 2)$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

لدينا: $\Delta = 4 + 12 = 16$

ومنه:

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \\ \text{أو} \\ x = \dfrac{-2-4}{2} = -3 \ (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

ومنه:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

(II

❶

أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right)$:

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{|h| + \frac{4}{h+1} - 4}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{h^2 + h + 4 - 4h - 4}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{h^2 - 3h}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{h-3}{h}\right)$$
$$= -3$$

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{|h| + \frac{4}{h+1} - 4}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{-h^2 - h + 4 - 4h - 4}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\frac{-h^2 - 5h}{h}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-h - 5)$$
$$= -5$$

- نستنتج أن الدالة k لا تقبل الاشتقاق عند 0

ب/ التفسير الهندسي:

المنحنى (C_k) يقبل نصفي مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 معاملا توجيههما هما -5 و -3

❷ كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند الناقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$:

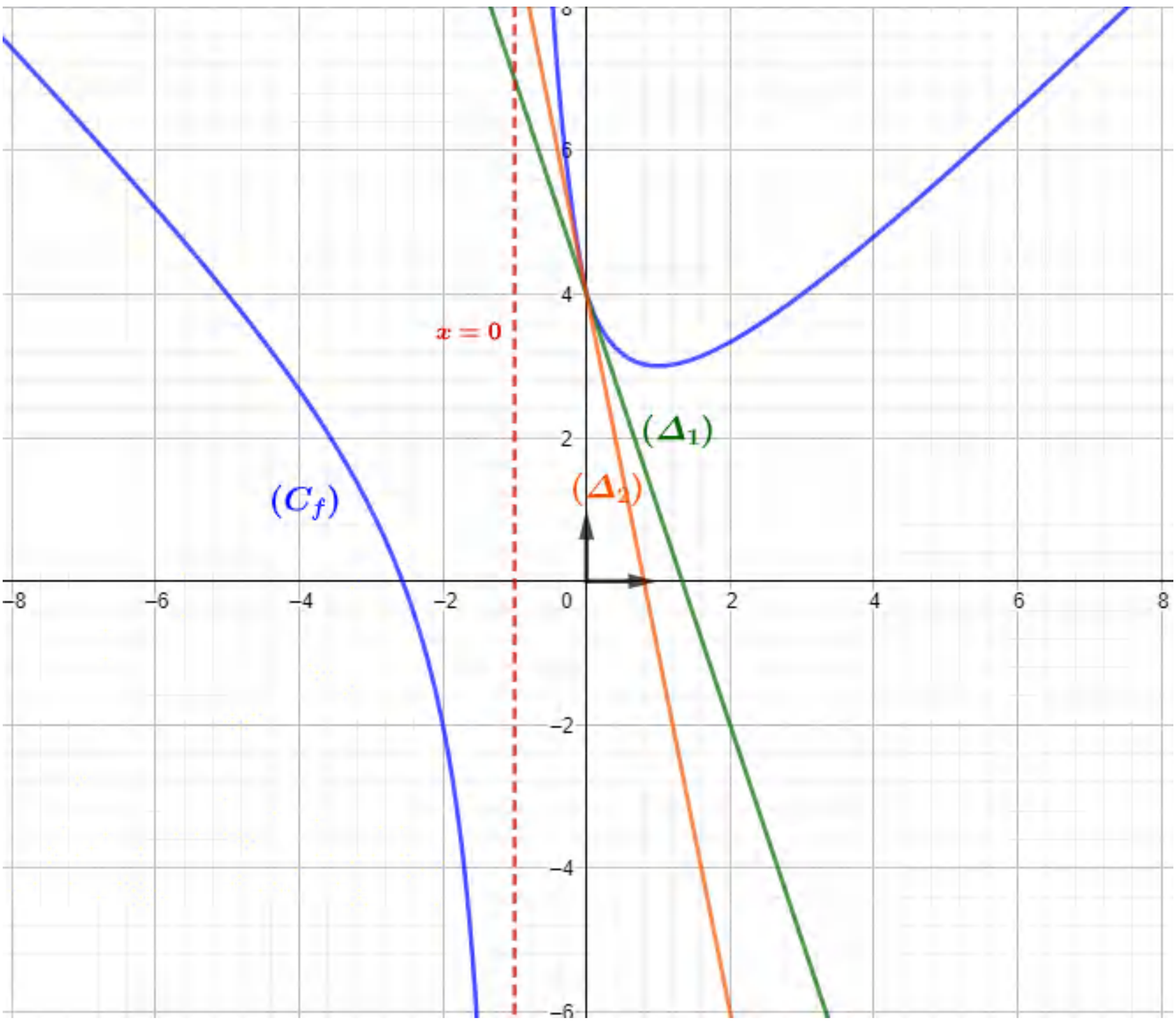
لدينا:

$$\begin{aligned} y_{(\Delta_1)} &= -3x + k(0) \\ &= -3x + 4 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} y_{(\Delta_2)} &= -5x + k(0) \\ &= -5x + 4 \end{aligned}$$

❸ رسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) :



حل المسـألة رقم: 18

مشاهـــدة المسألة

1

أ/ تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-2 \nearrow +\infty$

- تحديد $g(0)$:

$$g(0) = -1$$

- إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

ب/ تعليل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على $]-1;+\infty[$

ولدينا: $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

ج/ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

2

أ/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3} \\ &= \frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

ب/ تعيين دون حساب $\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)\lim_{x\to\alpha}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right) &= f'(\alpha) \\ &= \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- تفسير النتيجة هندسيا:

(Γ) يقبل مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α

ج/ حساب: $\lim_{\substack{> \\ x\to-1}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} \right)$$
$$= \frac{-1 + 3 - 3 + 2}{0^+}$$
$$= +\infty$$

ومنه (Γ) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -1$

- حساب $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)]$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} - (x+1) \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2 - (x^2 + 2x + 1)(x+1)}{(x+1)^2} \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2 - x^3 - 2x^2 - x - x^2 - 2x - 1}{(x+1)^2} \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{(x+1)^2} \right]$$
$$= +\infty$$

ومنه (Γ) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $x = x + 1$

د/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

❸ نأخذ $\alpha \approx 0.26$

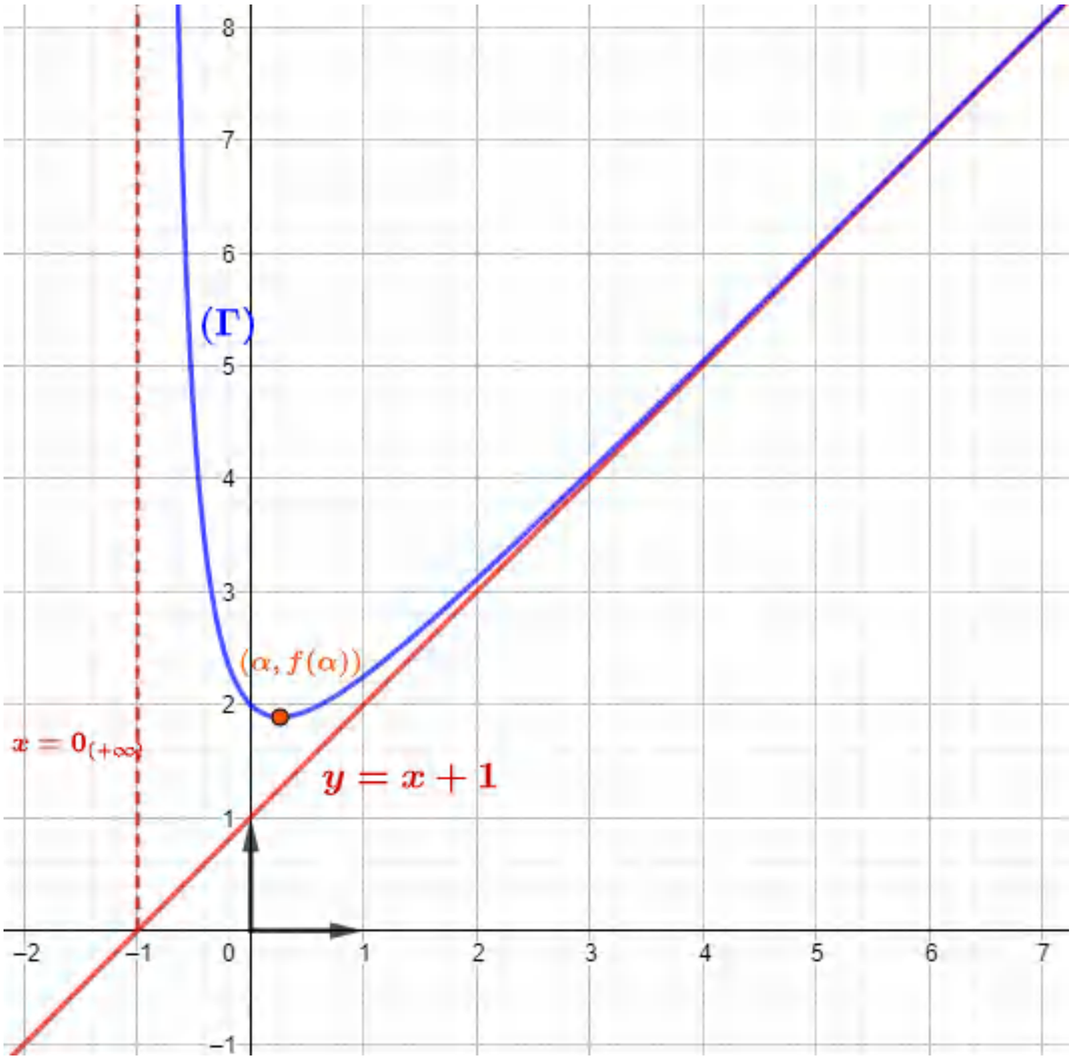
أ/ تعيين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}:

$$f(\alpha) = \frac{(0.26)^3 + 3(0.26)^2 + 3(0.26) + 2}{(0.26+1)^2}$$
$$= 1.88988158226$$
$$\approx 1.89$$

ب/ رسم المنحنى (Γ):

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = x + 1$
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(\alpha; f(\alpha))$
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نكمل رسم (Γ)

الخليل للرياضيات



(Γ)
$(\alpha, f(\alpha))$
$x = 0_{(+\infty)}$
$y = x + 1$

حل المسألة رقم: 19

مشاهـــدة المسألة

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g:

$$g'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$
$$= 3(x^2 + 2x + 1)$$
$$= 3(x+1)^2$$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

❷ حساب $g(-2)$:

$$g(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 2$$
$$= 0$$

- حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا (-2) جذر لـ $g(x)$ ومنه:

$$g(x) = \big(x - (-2)\big)(x^2 + ax + b)$$
$$= (x+2)(x^2 + ax + b)$$
$$= x^3 + ax^2 + bx + 2x^2 + 2ax + 2b$$
$$= x^3 + (a+2) + (b+2a)x + 2b$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \\ b + 2a = 3 \\ 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

إذن:

$$g(x) = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2 + x + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

لحل المعادلة $(x^2 + x + 1 = 0)$ نستعمل المميز Δ :

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

ومنه $(x^2 + x + 1) > 0$ في $\mathbb{R}$

اذن:

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

❸ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}$$

❶ تبيين أنّ: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$:

$$f'(x)=\frac{(6x^2+14x+8)(x+1)^2-2(x+1)(2x^3+7x^2+8x+2)}{(x+1)^4}$$
$$=\frac{(6x^2+14x+8)(x+1)-2(2x^3+7x^2+8x+2)}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{6x^3+14x^2+8x+6x^2+14x+8-4x^3-14x^2-16x-4}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{2x^3+6x^2+6x+4}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

❷ دراسة تغيرات الدالة f، وتشكيل جدول تغيراتها:

- تعيين النهايات:

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$$
- $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$$
- $$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}\right)$$
$$=\frac{-1}{(0^-)^2}=-\infty$$
- $$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\frac{-1}{(0^+)^2}=-\infty$$

- دراسة $f'(x)$:

لدينا:

$$(x+1)^3=0\Rightarrow(x+1)^2(x+1)=0$$
$$\Rightarrow x+1=0$$
$$\Rightarrow x=-1$$

ومنه إشارة $f'(x)$ كالآتي:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$2g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)^3$		$-$		$-$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	-2	↘	‖	↗	$+\infty$
	$-\infty$				$-\infty$ ‖ $-\infty$		

❸ تبيين أنّ: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1)+c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b)+b+c}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 7 \\ a + 2b = 8 \\ b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

❹

أ/ تبيين أنّ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين:

لدينا: $\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (2x+3)] &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} - (2x+3)\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{-1}{(x+1)^2}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته $y_{(\Delta)} = 2x + 3$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

لدينا $(x+1)^2 > 0$ ومنه $\left(f(x) - y_{(\Delta)}\right) < 0$

إذن (C_f) تحت (Δ) لما $x \in D_f$.

❺ تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $\alpha \in \left]-0.35; -0.34\right[$:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $\left]-1; +\infty\right[$

ولدينا: $f(-0.35) \times f(-0.34) < 0$ لأنّ: $f(-0.35) \approx -0.07$ و $f(-0.34) \approx 0.02$

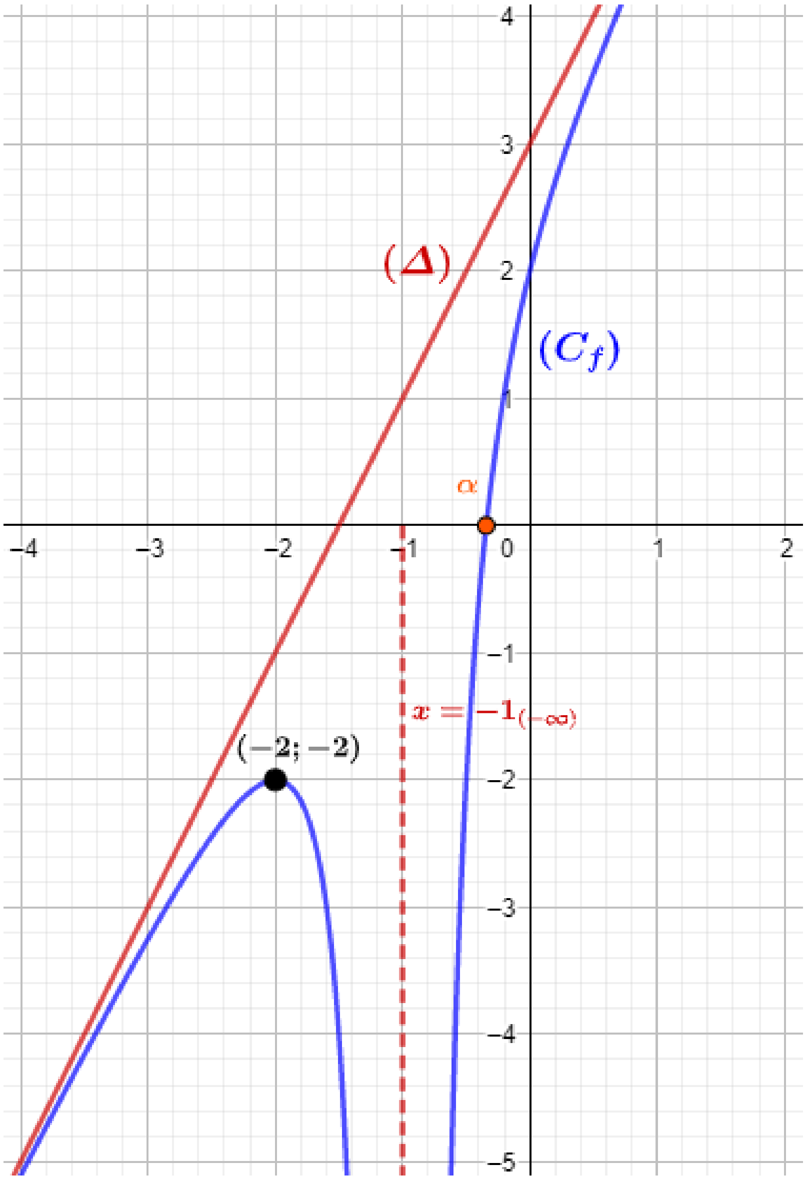
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $-0.35 < \alpha < -0.34$

❻ رسم المنحنى (C_f) :

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$ بجوار $-\infty$.
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) ذو المعادلة $y_{(\Delta)} = 2x + 3$.
- نعين النقطة α نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفوصل.

- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(-2;-2)$ لتسهيل الرسم
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f) . مع الاستعانة بوضعية (C_f) بالنسبة (Δ).



❼ المناقشة البيانية

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات المائلة ذات المعادلة $y_m = 2x + m$، وهي:

لما	$m < -2$	المعادلة تقبل ثلاث حلول سالبة
لما	$m = -2$	المعادلة تقبل حل سالب وجذر مضاعف سالب
لما	$-2 < m < 2$	المعادلة تقبل حل سالب
لما	$m = 2$	المعادلة تقبل حل معدوم
لما	$m > 2$	المعادلة تقبل حل موجب

(III

❶ تبيين أنّ الدالة h زوجية:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

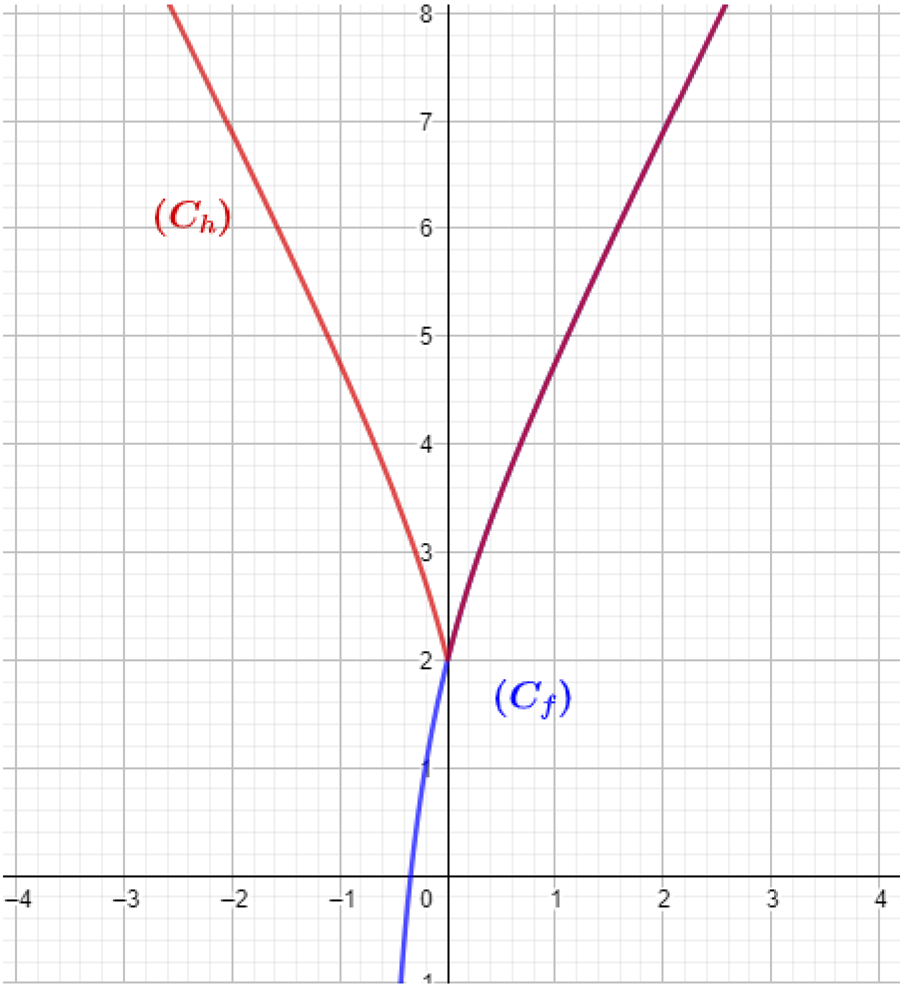
$h(-x) = h(x)$ ومنه الدالة h زوجية.

❷ رسم المنحنى (C_h) :

لما $x \geq 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $x \in \mathbb{R}_+$

وبما أنّ الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب.



حل المسألة رقم: 20

مشاهدة المسألة

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3+3x+16) = \lim_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3+3x+16) = \lim_{x-\infty}(x^3) = -\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2+3 = 3(x^2+1)$$

لدينا: $(x^2+1)>0$ ومنه $g'(x)$ موجبة تماما على $\mathbb{R}$

- جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

❷ تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2.5<\alpha<-2$:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(-2)\times g(-2.5)<0$ لأن: $g(-2)\approx 2$ و $g(-2.5)\approx -7.13$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2.5<\alpha<-2$

❸ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II

❶ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-8)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4+16x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3+3x+16)}{(x^2+1)^2} = \frac{x\cdot g(x)}{(x^2+1)^2}$$

❷ دراسة تغيرات الدالة f:

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-8}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-8}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = -\infty$$

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

لدينا: $(x^2+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة x في إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

❸ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha^3 = -(3\alpha + 16)$$

ولدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha\alpha^2 + 3\alpha + 16 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{-(3\alpha+16)}{\alpha}$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 8}{\alpha^2 + 1}$$
$$= \frac{(-3\alpha - 16 - 8)}{\left(\frac{-(3\alpha+16)}{\alpha} + 1\right)}$$

$$= \frac{(-3\alpha - 24)}{\left(\frac{-3\alpha - 16 + \alpha}{\alpha}\right)}$$
$$= \frac{(-3\alpha - 24)}{\left(\frac{-2\alpha - 16}{\alpha}\right)}$$
$$= \frac{3\alpha(\alpha + 8)}{2(\alpha + 8)}$$
$$= \frac{3}{2}\alpha$$

- تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $-2.5 < \alpha < -2$

ومنه: $-7.5 < 3\alpha < -6$

ومنه: $-3.75 < \frac{3}{2}\alpha < -3$

إذن: $-3.75 < f(\alpha) < -3$

4

أ/ تبيين أن (Δ) المستقيم المنصف الأول مقارب مائل لـ (C_f) :

معادلة المستقيم المنصف الأول هي : $y = x$

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - y_{(\Delta)}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3 - 8 - x^3 - x}{x^2 + 1}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-8 - x}{x^2 + 1}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{x}{x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} - x$$
$$= \frac{-8 - x}{x^2 + 1}$$
$$= \frac{-(x + 8)}{x^2 + 1}$$

لدينا: $(x^2 + 1) > 0$ ومنه:

$$-(x + 8) = 0 \Rightarrow x = -8$$

ومنه:

x	$-\infty$	-8	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in \left]-\infty; -8\right[$

- (C_f) يقطع (Δ) لما $x=-8$ أي في النقطة ذات الفاصلة $(-8;-8)$.
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in \ ]-8;+\infty[$

❺

أ/ ايجاد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل:

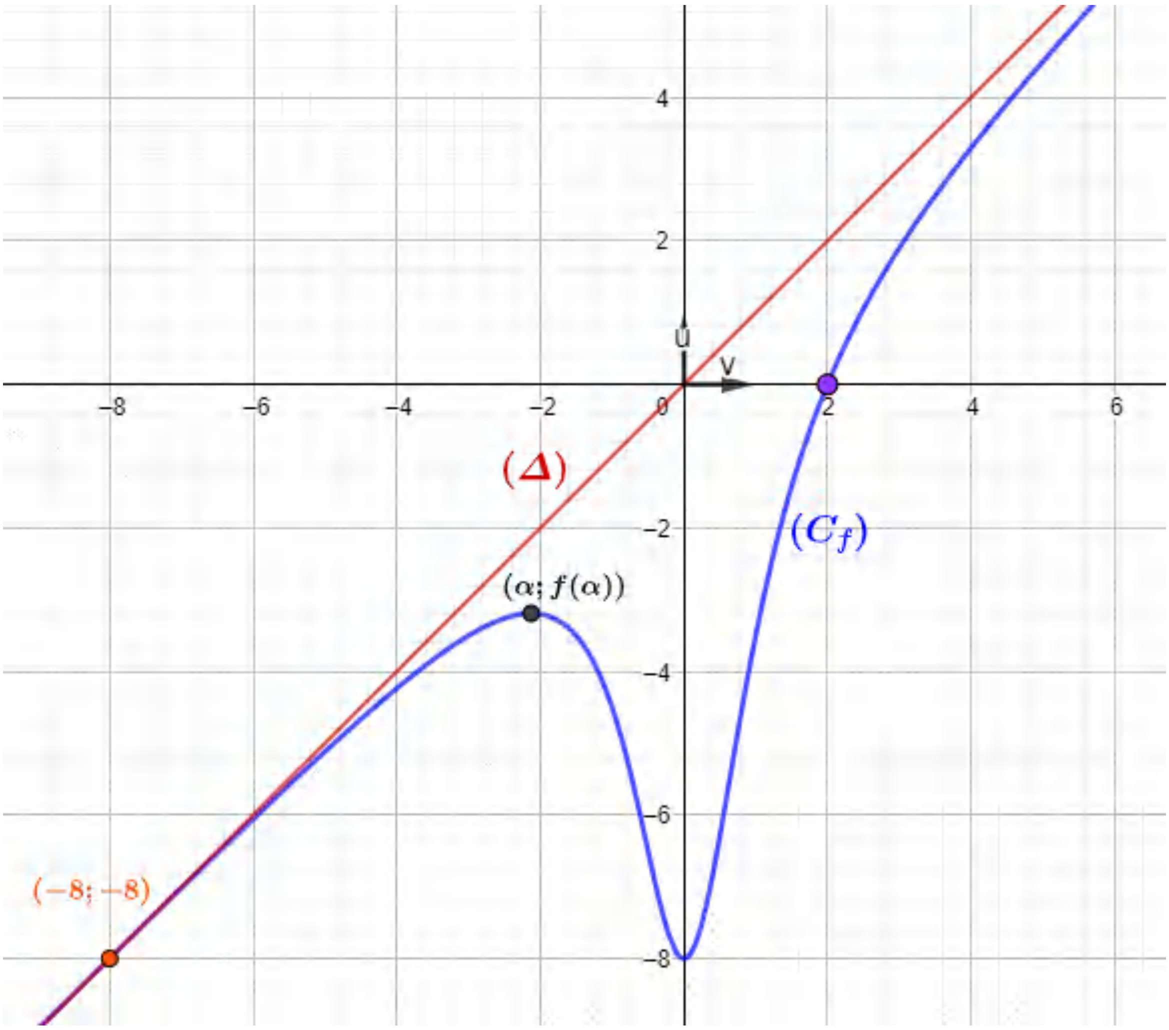
حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفوصل:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^3-8}{x^2+1}=0$$
$$\Rightarrow x^3-8=0$$
$$\Rightarrow x^3=8$$
$$\Rightarrow x=2$$

إذن: $(C_f)\cap(xx')=\{2\}$

ب/ التمثيل البياني:

- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) ذو المعادلة $y_{(\Delta)}=x$.
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(-8;-8)$ نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ).
- نعين النقطة ذات الفاصلة -2 نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f). مع الاستعانة بوضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).



ج/ المناقشة البيانية:

$$x^3-mx^2-8-m=0 \Rightarrow x^3-8-m(x^2+1)=0$$

$$\Rightarrow x^3 - 8 = m(x^2+1)$$
$$\Rightarrow \frac{x^3-8}{x^2+1} = m$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات الأفقية ذات المعادلة $y_m = m$، وهي:

لما	$m < -8$	المعادلة تقبل حل سالب
لما	$m = -8$	المعادلة تقبل حلين: حل مضاعف معدوم $x = -8$ ، وحل سالب
لما	$-8 < m < -2$	المعادلة تقبل حل موجب وحلين سالبين
لما	$m = -2$	المعادلة تقبل حلين: حل موجب وحل مضاعف سالب
لما	$m > -2$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{|x|x^2-8}{x^2+1}$$

❶ دراسة شفعية الدالة h:

$$h(-x) = \frac{|-x|(-x)^2-8}{(-x)^2+1} = \frac{|x|x^2-8}{x^2+1} = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية

❷ كتابة h دون استعمال رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = \frac{|x|x^2-8}{x^2+1} = \begin{cases} \dfrac{xx^2-8}{x^2+1} & ; \quad x \geq 0 \\ \dfrac{-x(-x)^2-8}{(-x)^2+1} & ; \quad x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

❸ استنتاج رسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) :

لدينا:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه (C_h) يطابق (C_f) لما $x > 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب.

حل المسـألة رقم: 21

مشاهـــدة المسألة

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g:

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2 + 3x - 5) = \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$$

لدينا: $(x-1)^2 > 0$ ومنه: $g'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

❷ تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in \ ]2;3[$:

لدينا: • الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

• $g(2) \times g(3) < 0$ لأن: $g(3) \approx 4$ و $g(2) \approx -3$

❸ تعيين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $\frac{n}{10} < \alpha < \frac{n+1}{10}$:

نقسم المجال $]2;3[$ على 10 ونحسب صور الدالة:

x	...	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3	...
$g(x)$	...	-3	-2.6	-2.2	-2.8	-1.2	-1.6	0.09	0.9	1.8	2.8	4	...
n	...	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	...

من الجدول نجد أنّ $n = 25$

ومنه: $\frac{25}{10} < \alpha < \frac{25+1}{10}$

إذن: $2.5 < \alpha < 2.6$

❹ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(x)$$
$$= +\infty$$
$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to1}} f(x) = \frac{2}{(0^+)^2} = +\infty$$
$$\bullet \lim_{\substack{< \\ x\to1}} f(x) = \frac{2}{(0^-)^2} = +\infty$$
$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$$

❷ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x نجد $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-6x+3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3-3x^2+3x+1)}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{(3x^2-6x+3)(x-1) - 2(x^3-3x^2+3x+1)}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{3x^3-6x^2+3x-3x^2+6x-3-2x^3+6x^2-6x-2}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{x^3-3x^2+3x-5}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

❸ دراسة تغيرات الدالة f:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{g(x)}{(x-1)(x-1)^2}$$

لدينا: $(x-1)^2$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ في $(x-1)$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

ومنه:

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$x-1$		$-$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

❹ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$:

لدينا:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-5=0$$
$$\Rightarrow \alpha^3=3\alpha^2-3\alpha+5$$

ومنه:

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha+1}{(\alpha-1)^2}=\frac{3\alpha^2-3\alpha+5-3\alpha^2+3\alpha+1}{(\alpha-1)^2}=\frac{6}{(\alpha-1)^2}$$

- تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $2.5<\alpha<2.6$

ومنه: $1.5<\alpha-1<1.6$

ومنه: $(1.5)^2<(\alpha-1)^2<(1.6)^2$

ومنه: $\frac{1}{(1.6)^2}<\frac{1}{(\alpha-1)^2}<\frac{1}{(1.6)^2}$

ومنه: $\frac{6}{(1.6)^2}<\frac{6}{(\alpha-1)^2}<\frac{6}{(1.6)^2}$

ومنه: $2.34<f(\alpha)<2.67$

❺

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a، b، c :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x-1)^2+c}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+c}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+ax+bx^2-2bx+b+c}{(x-1)^2}=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b)x+b+c}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-3 \\ a-2b=3 \\ b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x)=x-1+\frac{2}{(x-1)^2}$$

ب/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x)=+\infty$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=1$

ولدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x-1+\frac{2}{(x-1)^2}-(x-1)\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2}{(x-1)^2}\right]$$
$$= 0$$

ومنه: ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته $y_{(\Delta)} = x - 1$

ج/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{2}{(x-1)^2}$$

بما أن: $(x-1)^2 > 0$ ، فإنّ: $\left(f(x) - y_{(\Delta)}\right) > 0$

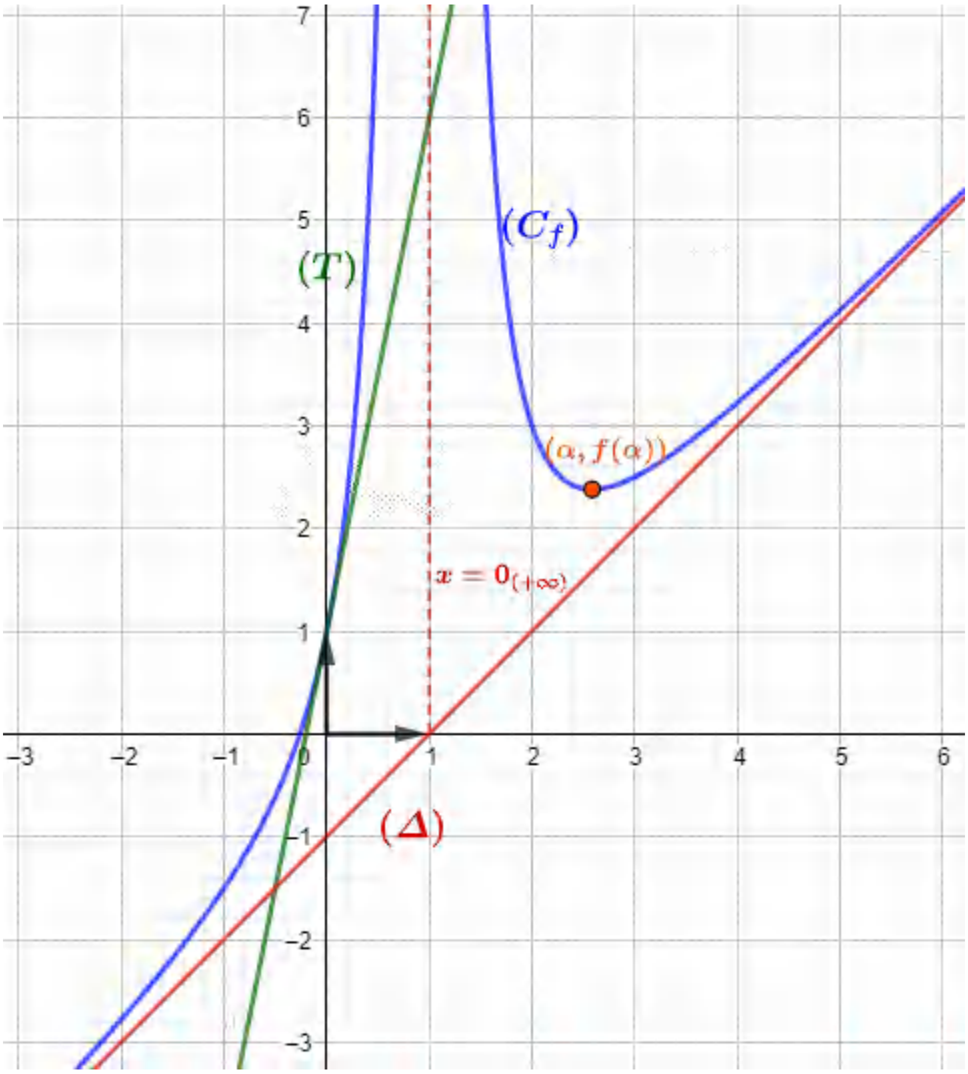
ومنه: (C_f) يقع فوق (Δ) على D_f.

❻ تعيين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$y_{(T)} = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$= \frac{g(0)}{(-1)^3}x + f(0)$$
$$= 5x + 1$$

❼ التمثيل البياني:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$.
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) ذو المعادلة $y_{(\Delta)} = x - 1$.
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة $y_{(T)} = 5x + 1$.
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(\alpha; f(\alpha))$.
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f) . مع الاستعانة بوضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)



❽ **المناقشة البيانية:**

لدينا:

$$x^3-(3+m)x^2+(3+2m)x+1-m=0 \Rightarrow x^3-3x^2-mx^2+3x+2mx+1+m=0$$
$$\Rightarrow x^3-3x^2+3x+1=mx^2-2mx+m$$
$$\Rightarrow x^3-3x^2+3x+1=m(x^2-2x+1)$$
$$\Rightarrow x^3-3x^2+3x+1=m(x-1)^2$$
$$=\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}=m$$
$$\Rightarrow f(x)=m$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات الأفقية ذات المعادلة: $y_m=m$

وهي:

لما	$m<1$	المعادلة تقبل حل سالب
لما	$m=1$	المعادلة تقبل حل معدوم
لما	$1<m<f(\alpha)$	المعادلة تقبل حل موجب
لما	$m=f(\alpha)$	المعادلة تقبل حلين أحدهما مضاعف موجب والآخر موجب
لما	$m>f(\alpha)$	المعادلة تقبل حلين موجبين

حل المسـألة رقم: 22

مشاهــــدة المسألة

❶ كتابة عبارة الدالة f دون كتابة رمز القيمة المطلقة:

$$f(x)=|x+2|+\frac{1}{x+1}$$
$$=\begin{cases} x+2+\dfrac{1}{x+1} & ; \quad x\in[-2;-1[\cup]-1;+\infty[\\ -x-2+\dfrac{1}{x+1} & ; \quad x\in]-\infty;-2] \end{cases}$$

❷ دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند (-2):

لدينا: $f(-2)=-1$

ولدينا:

$$\lim_{\substack{x\to-2\\ <}}\left(\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\right)=\lim_{\substack{x\to-2\\ <}}\left(\frac{-x-2+\frac{1}{x+1}-(-1)}{x+2}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to-2\\ <}}\left(\frac{-x-1+\frac{1}{x+1}}{x+2}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to-2\\ <}}\left(\frac{-x^2-x-x-1+1}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to-2\\ <}}\left(\frac{-x^2-2x}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to-2\\ <}}\left(\frac{-x(x+2)}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to-2\\ <}}\left(\frac{-x}{x+1}\right)$$
$$=\frac{2}{-1}$$
$$=-2$$

لدينا: $(-2)\in\mathbb{R}$ ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 من اليسار

ولدينا:

$$\lim_{\substack{x\to-2\\ >}}\left(\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-1)}\right)=\lim_{\substack{x\to-2\\ >}}\left(\frac{x+2+\frac{1}{x+1}-(-1)}{x+2}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to-2\\ >}}\left(\frac{x+3+\frac{1}{x+1}+1}{x+2}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to-2\\ >}}\left(\frac{x^2+x+3x+3+1}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to-2\\ >}}\left(\frac{x^2+4x+4}{(x+2)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{\substack{> \\ x \to -2}} \left(\frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x+1)} \right)$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x \to -2}} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)$$
$$= \frac{0}{-1}$$
$$= 0$$

لدينا: $0 \in \mathbb{R}$ ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 من اليمين

وبما أنّ:

$$\lim_{\substack{< \\ x \to -2}} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-1)} \right) \neq \lim_{\substack{> \\ x \to -2}} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-1)} \right)$$

ومنه الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند -2

- التفسير الهندسي للنتيجة:

المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة -2 معاملي توجيههما 0 و -2

❸

أ/ حساب $\lim_{\substack{< \\ x \to -1}} f(x)$ و $\lim_{\substack{< \\ x \to -1}} f(x)$:

- $$\lim_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to -1}} \left(x + 2 + \frac{1}{x+1} \right)$$
$$= 1 + \frac{1}{0^+}$$
$$= +\infty$$

- $$\lim_{\substack{< \\ x \to -1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to -1}} \left(x + 2 + \frac{1}{x+1} \right)$$
$$= 1 + \frac{1}{0^-}$$
$$= -\infty$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = -1$

ب/ حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$:

- $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x+1} \right)$$
$$= +\infty$$

- $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x - 2 + \frac{1}{x+1} \right)$$
$$= -(-\infty)$$
$$= +\infty$$

❹ دراسة تغيرات الدالة f:

- دراسة $f'(x)$:

- لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ و $(x+2) \geq 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة x.

إذن: $f'(x) > 0$ لما: $x \in]0; +\infty[$

$f'(x) < 0$ لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; 0[$

• لما: $x \in]-\infty; -2]$:

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-x^2 - 2x - 2 - 1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-(x^2 + 2x + 3)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة البسط عكس إشارة $(x^2 + 2x + 3)$:

لدينا: $\Delta = 4 - 4(1)(3) = -8 < 0$

ومنه: $(x^2 + 2x + 3) > 0$

إذن: $f'(x) < 0$ لما: $x \in]-\infty; -2]$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow$	3	$\nearrow +\infty$

❺

أ/ برهان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ_1) و (Δ_2):

- لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[$:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2 + \frac{1}{x+1} - x - 2\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{x+1}\right]$$
$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ_1) بجوار $+\infty$ معادلته: $y_{(\Delta_1)} = x + 2$

- لما: $x \in]-\infty; -2]$:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (-x-2)] = \lim_{x\to-\infty} \left[-x - 2 + \frac{1}{x+1} + x + 2\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{1}{x+1}\right]$$
$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ_2) بجوار $-\infty$ معادلته: $y_{(\Delta_2)} = -x - 2$

ب/ دراسة الوضعية بين (C_f) و (Δ_1) :

- لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_{(\Delta_1)}$:

$$f(x) - y_{(\Delta_1)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ومنه:

x	-2	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta_1)}$	$-$		$+$

- إذن:
  - (C_f) تحت (Δ_1) لما: $x \in [-2; -1[$
  - (C_f) فوق (Δ_1) لما: $x \in \ ]-1; +\infty[$
- دراسة الوضعية بين (C_f) و (Δ_2) :
- لما: $x \in \ ]-\infty; -2]$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_{(\Delta_2)}$:

$$f(x) - y_{(\Delta_2)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا: $(x+1) < 0$ على المجال $]-\infty; -2]$

ومنه: $\left(f(x) - y_{(\Delta_2)}\right) < 0$

- (C_f) تحت (Δ_1) لما: $x \in \ ]-\infty; -2]$

❻ تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; -2]$ حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$:

لدينا: الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -2]$

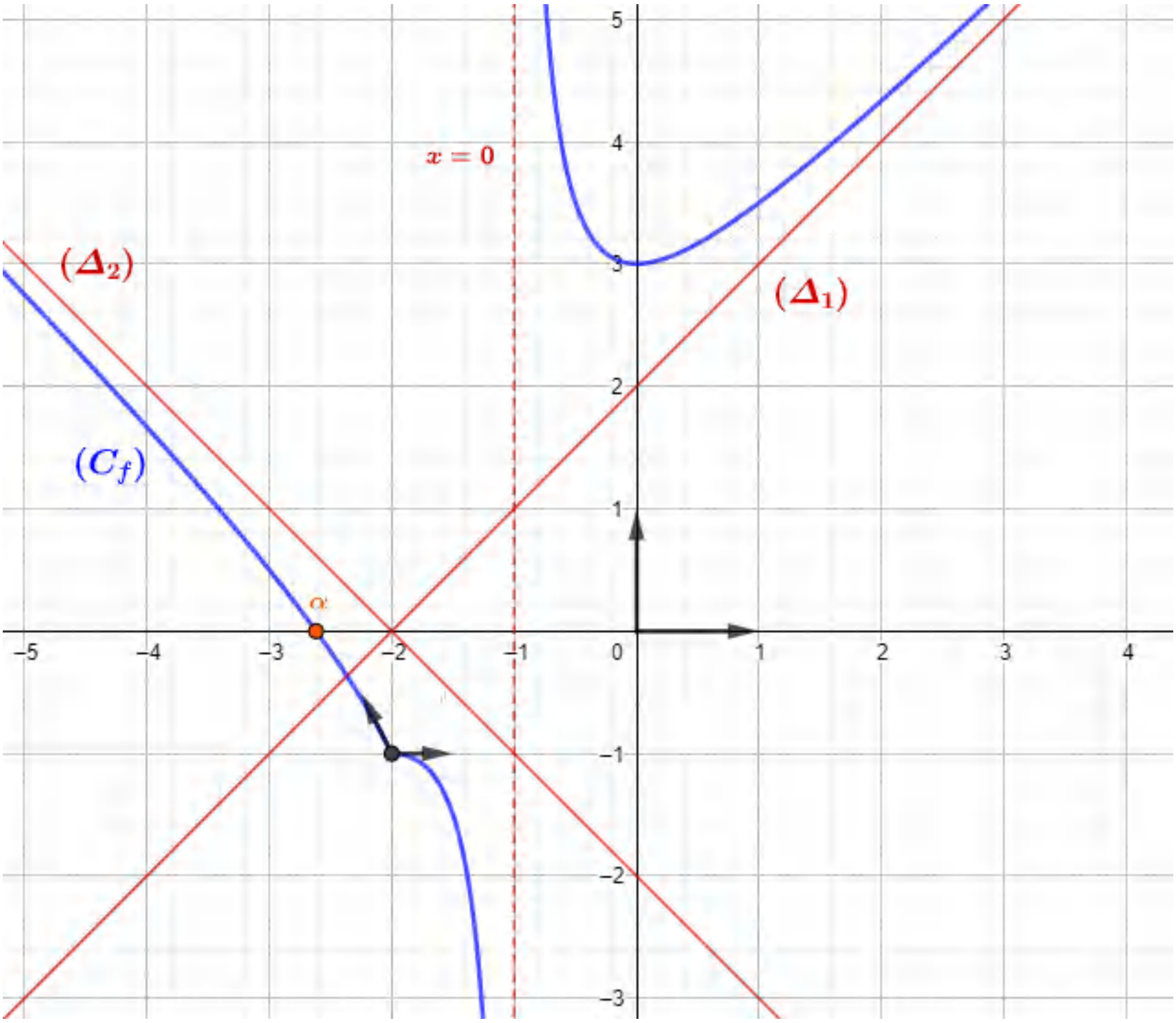
ولدينا: $f(-2.6) \times f(-2.7) < 0$ لأنّ $f(-2.7) \approx 0.11$ و $f(-2.6) \approx -0.02$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$.

❼ التمثيل البياني:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$.
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ_1) ذو المعادلة $y_{(\Delta_1)} = x + 2$.
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ_2) ذو المعادلة $y_{(\Delta_2)} = -x - 2$.
- نعين النقطة α نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f) . مع الاستعانة بوضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ_1) و (Δ_2)

(ولا تنسى التركيز عند رسم البيان في النقطة ذات الاحداثيات $(-2; -1)$، لأن المنحنى هناك يقبل نصفي مماسين)



بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا

لا تنسونا من صالح دعائكم

#الخليل_للرياضيات