5min" Maths

ترجمة و تصرف الأستاذ شعبان أسامة

seven DAYS maths 7

14 تمرين محلول من بكالوريات اجنبية

شعب علمية

Super fan
عبد الفتاح بوقفة
عدد سكان الأرض هو حوالي 7874965825 ،
تجاهل كلامهم السلبي مثلما تجاهلت عددهم و
ستكون أسعد 🥰

حساباتي عبر منصلت التواصل الاجتماعي:

5min maths

نسخة 2021 –تلمسان- 0675302299

بسم الله الرحمن الرحيم

تجدون في هذا العمل14 تمرين اجنبي مترجم مع حل مقترححلول مأخوذة من بكالوريات أجنبية تم تداولها في فترة العطل الشتائية.

على صفحة الأستاذ شعبان أسامة الرسمية(⑤🕒**min Maths**)

و هذا على شكل تحدي كل يوم تمرينين بالحل.

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا

و ثانيا لجميع محبي المادة

Chabane Oussama

التمرين الأول — دالة لوغاريتمية — Bac TOGO 2009

الجزء -أ- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=x\ln(x)-x+1$ و (C) التمثيل البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الرسم: $2cm$).

1.أدرس تغيرات الدالة g.

2.ليكن $(C_{\ln})$ التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\ln(x)$ في المعلم السابق .

أ-بين أن المنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما 1 و e.

ب-بين أنه من أجل كل x من $[1;e]$ ، $x\ln(x)-x+1\le\ln(x)$.

3.أ-مستعينا بالتكامل بالتجزئة أحسب J حيث $J=\int_1^e (x-1)\ln(x)dx$.

ب- استنتج المساحة ب cm^2 مساحة الحيز المحددة بالمنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ و المستقيمات ذات المعادلة : $x=1$ و $x=e$.

الجزء –ب- نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ الشكل: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\ln(x)$.

1.جد نهايتي الدالة f عند 1 و $+\infty$.

2.عين اتجاه تغير الدالة ثم f شكل جدول تغيراتها (لاحظ أنه يمكن كتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$).

3.أرسم المنحنى الممثل للدالة f.

4. بين أن المعادلة : $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α حيث $3.5\prec\alpha\prec3.6$.

الجزء – ج- نعتبر الدالة h المعرفة على $]1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x)+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

1.بين أن α حل للمعادلة : $h(x)=x$.

2.أدرس اتجاه تغير الدالة h.

3.نضع $I=[3;4]$ بين انه من أجل كل عنصر x من I، $h(x)\in I$

التمرين الثاني | دالة أسية | Bac TOGO 2001

مدة الانجاز 01سا

لتكن f الدالة العددية المعرفة بالشكل: $f(x)=2x+\dfrac{e^x}{2(e^x-1)}$ و (C) التمثيل البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الرسم: $1cm$)

الجزء- أ-
1.عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2.بين أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2(e^x-1)}$.

3.احسب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

4.أ-بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=2x+\dfrac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب-أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

الجزء - ب-
1.حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2e^{2x}-5e^x+2\succ 0$.

2.أ-احسب $f'(x)$ (f' الدالة المشتقة للدالة f)

ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0;+\infty[$.

3.ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C) على المجال $]0;+\infty[$.

4.ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=2x+m$

الجزء -ج-
ليكن n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و نعرف العدد I_n حيث: $I_n=\displaystyle\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}\left[\frac{e^x}{e^x-1}\right]dx$

1.-بين أن: $I_n=\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي $n\succ 1$.

ب-احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{n\to 1} I_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2. نعتبر من أجل كل عدد طبيعي $n\succ 1$ ، المجموع S_n حيث $S_n=I_2+I_3+...+I_n$. احسب S_n.

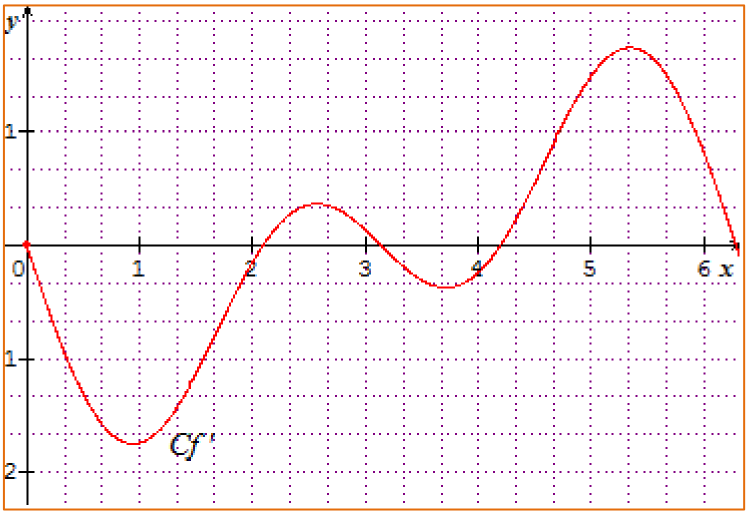
3.أ- احسب $A(n)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلة: $y=2x+\dfrac{1}{2}$ ، $x=\ln 2$ و $x=\ln(n+1)$

ب-عين نهاية $A(n)$ من أجل n يؤول الى عدد كبير بالقدر الكافي.

Bac France
دالة مثلثية
التمرين الثالث

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2\pi]$ كما يلي : $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)+1$. الشكل الموضح أسفله هو المنحنى الممثل للدالة f' (الدالة المشتقة للدالة f) .

مدة الانجاز 45د



1.أ- أوجد الدالة المشتقة f' للدالة f .

ب- باستعمال العلاقة التالية : $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$ ،

بين انه من أجل كل x من $[0;2\pi]$ ، $f'(x)=-\sin(x)[1+2\cos(x)]$

2.حل في المجال $[0;2\pi]$ المعادلة : $\sin(x)[1+2\cos(x)]=0$.

3.أ- عين اشارة $f'(x)$ على المجال $[0;2\pi]$.

ب- مستعينا بالنتائج السابقة شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;2\pi]$.

4.أرسم المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[0;2\pi]$ في المعلم السابق.

Bac FRANCE-Métropole2013

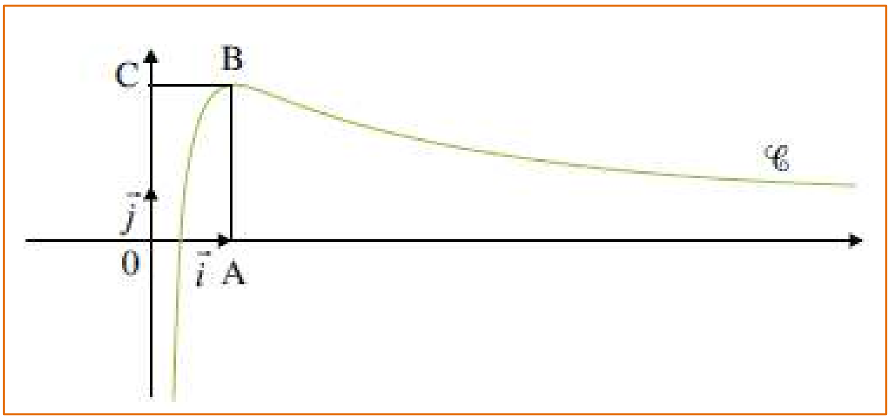
دالة لوغاريتمية

التمرين الرابع

مدة الانجاز 55د

في الشكل الموضح أسفله رسمنا في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنى (C) الممثل للدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$. لتكن النقط $A(1;0)$ ، $B(1;2)$ و $C(0;2)$.

المنحنى (C) يشمل النقطة B و المستقيم (BC) مماس المنحنى (C) في النقطة B.



a و b عددان حقيقيا موجبان حيث من أجل كل متغير حقيقي x موجب تماما ، $f(x)=\dfrac{a+b\ln(x)}{x}$.

1.أ-بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$.

ب-تحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{(b-a)-b\ln(x)}{x^2}$

ج-استنتج قيمتي العددين a و b.

2.أ-بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ،اشارة $f'(x)$ من اشارة الدالة $x\mapsto -\ln(x)$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب-احسب نهايتي الدالة f . (يمكنك ملاحظة أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{2}{x}+2\dfrac{\ln(x)}{x}$).

ج-شكل جدول تغيرات الدالة f .

3.أ- بين أن المعادلة : $f(x)=1$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;1]$.

ب- بين أن المعادلة : $f(x)=1$ تقبل حل وحيد β على المجال $]1;+\infty[$. حيث $n\prec\beta\prec n+1$ و n عدد طبيعي يطلب تعيينه.

التمرين الخامس

دالة أسية

Bac LIBAN- Juin 2004

مدة الانجاز 1سا

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^{x}+1}$.

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2.احسب، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)+f(-x)$ ماذا يمكن ان نقول عن النقطة $(0;1+\ln 4)$.

3.أدرس اتجاه تغير الدالة f .

4.أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m المعادلة $f(x)=m$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$.

ب-عين حصر سعته 10^{-1} للعدد α حل المعادلة $f(x)=3$.

ج- من أجل أي قيمة ل m العدد $(-\alpha)$ حل للمعادلة $f(x)=m$.

5.أ-بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=x+2+\ln 4-\dfrac{2e^{x}}{e^{x}+1}$ ،

ب-بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+\ln 4$ و المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+2+\ln 4$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C)

6.أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ).

7.نعتبر α العدد الحقيقي الموجب .

ماذا يمثل التكامل التالي: $I(\alpha)=\int_{0}^{\alpha}[f(x)-x-\ln 4]dx$ ؟

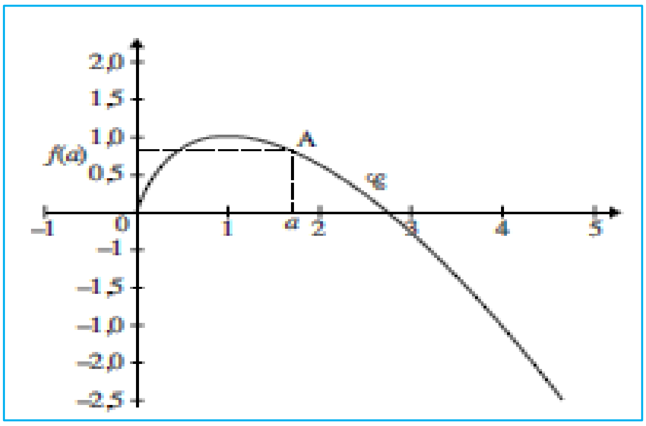
ب- بين أن $I(\alpha)=2\ln\left(\dfrac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)$.

ج-احسب α من أجل $I(\alpha)=1$.

التمرين السادس — دالة لوغاريتمية — Bac FRANCE-Métropole 2010

مدة الانجاز 45د

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x(1-\ln(x))$. الشكل الموضح أسفله هو المنحنى (C) الممثل للدالة f



1.أدرس حسب قيم x اشارة $f(x)$.

2.احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. (نقبل أن $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$).

3. أحسب $f'(x)$.

ب-عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4.ليكن a عدد حقيقي موجب تماما نعتبر المماس (T_a) مماس المنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة a.

احسب بدلالة a احداثيي النقطة A' نقطة تقاطع المماس (T_a) مع محور التراتيب.

5.لتكن $A(a)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و محور الفاصل و المستقيمات ذات المعادلة: $x=a$ و $x=e$.

احسب $A(a)$ من أجل $a\prec e$

التمرين السابع — دالة أسية — Bac MAROC 2020

مدة الانجاز 45د

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على© بما يلي: $f(x)=-x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$ و (C) المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2.أ-برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب- حل المعادلة $e^{x-2}-4=0$ ثم بين أن المنحنى (C) يوجد فوق (Δ) على المجال $]-\infty;2+\ln 4]$ و تحت (Δ) على المجال $[2+\ln 4;+\infty[$.

3.بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$.

4.أ-بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$.

ب-شكل جدول تغيرات الدالة f

5. ثم بين أن $A(2;2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

6.بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$.

7.أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين $\ln 2\simeq 0,7$ ، $\ln 3\simeq 1,1$).

التمرين الثامن | دالة لوغاريتمية | Bac MAROC 2020

مدة الانجاز 40د

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$.

1.أ-بين أن لكل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$

ب-بين أن الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

ج-استنتج أن لكل x من المجال $[1;+\infty[$ ، $0\leq \ln x\leq 2\sqrt{x}$. لاحظ أن: $(2\sqrt{x}-2\leq 2\sqrt{x})$.

د-بين أنه من اجل كل x من $[1;+\infty[$ ، $0\leq\frac{(\ln x)^3}{x^2}\leq\frac{8}{\sqrt{x}}$ ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^2}$.

2.أ-بين أن الدالة G المعرفة بما يلي: $G(x)=x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)$ هي دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$.

ب-احسب التكامل $\int_1^4 g(x)dx$.

التمرين التاسع — دالة أسية — Bac MAROC 2021

مدة الانجاز 35د

1. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $e^{2x}-4e^{x}+3=0$

ب- حل في المتراجحة: $e^{2x}-4e^{x}+3\leq 0$

ج- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}$.

2.بين أن المعادلة : $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ تقبل حلا في المجال $[-1;0]$.

التمرين العاشر — دالة عددية — Bac FRANCE

مدة الانجاز 55د

لتكن الدالتان f و g المعرفتان كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^{2}+x+\dfrac{1}{x}\right)$ و $g(x)=2x^{3}+x^{2}-1$.

وليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1.بين أنه من أجل كل $x\neq 0$ لدينا: $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الاشارة.

2.أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

3.أ-بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيدا α حيث $\alpha\in]0;1[$.

ب- استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$.

4.شكل جدول تغيرات الدالة f .

5. لتكن النقطتين $I\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$ و $J(1;1)$.

أ-بين أن المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J.

ب-عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة I .

ج-أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المماس (T).

6.أرسم المماس (T) و المنحنى (C).(نأخذ $f(\alpha)\simeq 0.8$)

7.ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة: $x^{3}+x^{2}-3mx+1=0$.

8.أحسب مساحة الحيز S المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=1$ و $x=e$

التمرين الحادي عشر | دالة أسية | Bac TUNISIE 2014

مدة الانجاز 35د

1. لتكن f الدالة العددية المعرفةعلى $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$ و $\left(C_f\right)$ التمثيل الباني الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1.تحق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$ ثم استنتج أن الدالة f فردية.

2.احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3.أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2$ و أعط جدول تغيرات الدالة f .

ب-استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$.

4.بن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]=0$ فسر بيانيا.

5.انشئ في المعلم السابق المستقيم الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{2}x$ ثم أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$.

في المعلم السابق المستقيم الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{2}x$ ثم أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$.

التمرين الثاني عشر | دالة عددية | Bac Liban juin 2010

مدة الانجاز 55د

I.لتكن u الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $u(x)=x^2-2+\ln x$

1.أ-احسب نهايتي الدالة عند 0 و $+\infty$.

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة u.

2.بين أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$ يطلب تعيين حصر له سعته 10^{-2}.

3.عين حسب قيم x اشارة $u(x)$.

4.بين أن: $\ln\alpha=2-\alpha^2$

II.نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$

1.احسب من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)$ بدلالة $u(x)$.

2.استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$.

III. ليكن في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

Γ المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية و M نقطة من Γ.

1.نعتبر النقطة $A(0;2)$ ، بين ان المسافة AM تعطى بالعبارة: $AM=\sqrt{f(x)}$.

2.لتكن g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ-بين أن الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$.

ب-بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P التي يطلب تعيين احداثياها.

ج-بين أن: $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. هل المستقيم (AP) و مماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان؟

التمرين الثالث عشر
المتتاليات
Bac Antilles Guyane FRANCE-2012

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n}u_n \end{cases}$

1.احسب u_3,u_2 و u_4.

2.أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، u_n موجبة تماما.

ب-بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- ماذا يمكن القول عن المتتالية (u_n).

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. نضع: $v_n=\dfrac{u_n}{n}$.

أ-بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول v_1 .

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n=\dfrac{n}{2^n}$.

4.نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln x-x\ln 2$.

أ-احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب-استنتج نهاية المتتالية (u_n).

مدة الانجاز 40د

التمرين الرابع عشر

المتتاليات

Bac Amérique du Sud Novembre 2013

مدة الانجاز 40د

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=xe^{1-x}$.

1.بين أنه من اجل كل x عدد حقيقي، $f(x)=e\times\dfrac{x}{e^x}$.

2. عين نهاية الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$ عند ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

II.من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و نعتبر الدالتان g_n و h_n المعرفتان على:

$$g_n(x)=1+x+x^2+...+x^n \quad \text{و} \quad h_n(x)=1+2x+...+nx^{n-1}$$

1.بين انه من أجل كل عدد حقيقي x: $(1-x)g_n(x)=1-x^{n+1}$.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

3.نضع $S_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$:

أ-احسب بدلالة n المجموع S_n ب-احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

1.

الجزء -أ- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=x\ln(x)-x+1$

1.دراسة تغيرات الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث

$$g'(x)=\ln(x)+x\left(\frac{1}{x}\right)-1$$
$$=\ln(x)$$

و منه

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	

و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

النهايات:

$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)-x+1=1$ لأن $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ نهاية شهيرة.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\ln(x)-x+1$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln(x)-1+\frac{1}{x}\right]$$
$$=+\infty$$

جدول تغيرات g :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖ 1	↘	0	↗	$+\infty$

لدينا $g(1)=0$ (يمكن أن نلاحظ من خلال جدول تغيرات الدالة g أن $g(x)\geq 0$ من أجل كل $x\succ 0$)

.2

أ-اثبات أن المنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما 1 و e.

نقوم بحل المعادلة:

$$x\ln(x)-x+1=\ln(x)$$

أي: $g(x)=\ln(x)$ أي $\Leftrightarrow x\ln(x)-x+1-\ln(x)=0$

$$\Leftrightarrow (\ln(x)-1)(x-1)=0$$

تكافؤ: $\ln(x)-1=0$ و $x-1=0$ و عليه $x=e$ و $x=1$.

و منه المنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما 1 و e.

ب-بين أنه من أجل كل x من $[1;e]$ ، $x\ln(x)-x+1\le\ln(x)$.

$x\ln(x)-x+1\le\ln(x)$ تكافؤ $x\ln(x)-x+1-\ln(x)\le 0$ و عليه نحل المتراجحة $(\ln(x)-1)(x-1)\le 0$.

x	0 1 e $+\infty$
$x-1$	- 0 +
$\ln(x)-1$	- 0 +
$(\ln(x)-1)(x-1)$	+ 0 - 0 +

و منه نلاحظ أن من أجل x من $[1;e]$، $(\ln(x)-1)(x-1)\le 0$.

3.أ- نحسب J بالتكامل بالتجزئة : $J=\int_1^e (x-1)\ln(x)dx$

نضع $v'(x)=x-1$ و بالتالي $v(x)=\frac{x^2}{2}-x$.

و $u(x)=\ln(x)$ و عليه $u'(x)=\frac{1}{x}$.

اذن J يصبح

$$J=\int_1^e (x-1)\ln(x)dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx$$

و عليه

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2x}-\frac{x}{x}\right)dx$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e$$

اذن:

$$=\frac{e^2}{2}-e-\left(\frac{e^2}{4}-e-\frac{1}{4}+1\right)$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e-\frac{3}{4}=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}$$

و بالتالي : $J=\int_1^e (x-1)\ln(x)dx=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}$.

ب.مساحة الحيز المحددة بالمنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ و المستقيمات ذات المعادلة : $x=1$ و $x=e$.

لدينا المنحنى (C) يقع تحت المنحنى $(C_{\ln})$ من أجل كل x من $[1;e]$ و بالتالى نسمي S مساحة الحيز.

$$S=\left(\int_1^e \ln(x)-g(x)dx\right)\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

$$=\left(\int_1^e \ln(x)-x\ln(x)+x-1dx\right)4$$

$$=\left(\int_1^e -\ln(x)(x-1)+x-1dx\right)4$$

$$=\left(\int_1^e -\ln(x)(x-1)dx+\int_1^e x-1dx\right)4$$

$$=\left(-J+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^e\right)4$$

$$=-4J+\left(\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}+1\right)4$$

$$=-4\left(\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}\right)+2e^2-4e+2$$

$$=-e^2+3+2e^2-4e+2$$

$$=e^2-4e+5$$ و منه $S=e^2-4e+5$

الجزء –ب- نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ الشكل: $f(x)=\frac{1}{x-1}\ln(x)$.

1. نهايتي الدالة f عند 1 و $+\infty$:

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}\ln(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$ (نرفع ح ع نت باستعمال العدد المشتق).

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}\ln(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x-1}\approx\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.

2. اتجاه تغير الدالة ثم f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x-1}\ln(x)\right)'=\left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\frac{x-1-x\ln(x)}{x}}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x-1-x\ln(x)}{x(x-1)^2}$$

$$=\frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$$

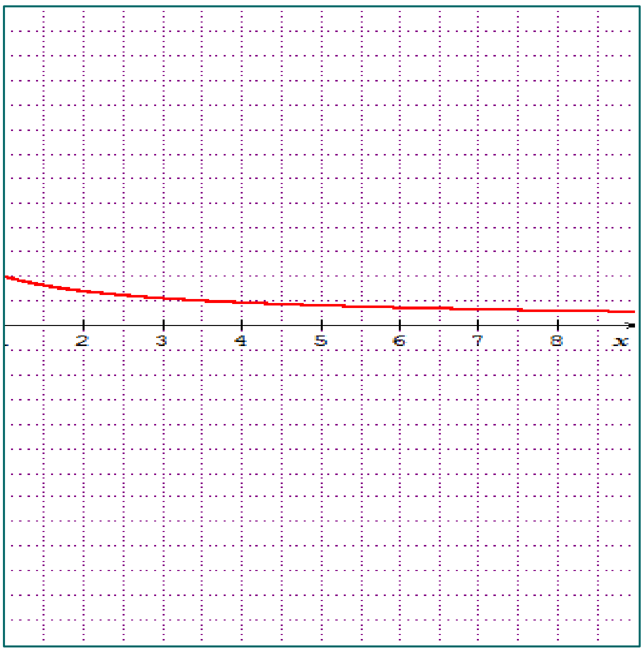
اذن اشارة $f'(x)$ من اشارة $-g(x)$. وعليه:

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	-

و بالتالي للدالة f متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

3.رسم المنحنى الممثل للدالة f.



4. اثبات أن المعادلة : $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α حيث $3.5 \prec \alpha \prec 3.6$.

الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متناقصة تماما على $]1;+\infty[$).

حيث: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \end{cases} \Leftarrow \frac{1}{2}\in[0;1]$ و لدينا $f(3.5)\geq \frac{1}{2}$ و $f(3.6)\leq \frac{1}{2}$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α حيث $3.5 \prec \alpha \prec 3.6$.

الجزء – ج- نعتبر الدالة h المعرفة على $]1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

1. α حل للمعادلة : $h(x)=x$ تكافئ $h(\alpha)=\alpha$

لدينا $h(\alpha)=\ln(\alpha)+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}$.........(1) و نعلم أن α حل للمعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ أي $f(\alpha)=\frac{1}{2}$ بالتعويض نجد

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha-1}\ln(\alpha)=\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2\ln(\alpha)=\alpha-1 \\ &\Leftrightarrow \ln(\alpha)=\frac{\alpha-1}{2}=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

نعوض هذه النتيجة في العبارة (1) نجد:

$$\begin{aligned} (1).........h(\alpha)&=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2} \\ h(\alpha)&=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\alpha \\ &=\alpha \end{aligned}$$

2. أدرس اتجاه تغير الدالة h.

الدالة h قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ حيث $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$

من أجل كل x من $]1;+\infty[$ لدينا $h'(x)\succ 0$ و عليه الدالة h متزايدة تماما على $]1;+\infty[$.

3. نضع $I=[3;4]$ بين انه من أجل كل عنصر x من I، $h(x)\in I$

لدينا $3\leq x\leq 4$ أي أن

$$\left.\begin{array}{l}\ln 3 \le \ln(x) \le \ln 4 \\ 2 \le \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2} \le \dfrac{5}{2}\end{array}\right\} \ln 3+2 \Rightarrow \le \ln(x)+\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \le \ln 4+\frac{5}{2}$$

$$3 \le h(x) \le 4$$
$$\Rightarrow h(x) \in I$$

2.

I. لتكن f المعرفة بالشكل: $f(x)=2x+\dfrac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}$

1.تعين D_f مجموعة تعريف الدالة f: الدالة f من أجل: $2\left(e^x-1\right) \neq 0$ و منه $e^x-1 \neq 0$ و عليه $x \neq 0$ ⇔ $e^x \neq 1$. اذن $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$.

2.بين أنه من أجل كل x من D_f ،

أي $2x+\dfrac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}=2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\left(e^x-1\right)}$ نوحد المقامات

$$=f(x)$$

3. نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2x+\frac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}=+\infty$$ بعد راسة اشارة المقام.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} 2x+\frac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}$$

و
$$\lim_{x\to +\infty} 2x+\frac{e^x}{2e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}=+\infty$$

4.أ- المستقيم (Δ) :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)-y=\lim_{x\to +\infty} 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}-\left(2x+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x-1}$$
$$=0$$

و بالتالي المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=2x+\dfrac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب- الوضع النسبي للمنحنى (C) و للمستقيم (Δ) :

ندرس اشارة الفرق : $f(x)-y$ نجد أن الاشارة من اشارة العبارة $\frac{1}{e^x-1}$ أي e^x-1 .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		-	0	+	
$f(x)-y$		-	0	+	
الوضعية		(C) يقع تحت (Δ)		(C) يقع فوق (Δ)	

.II 1.حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2e^{2x}-5e^x+2\succ 0$.

نضع $t=e^x$ و بالتالي المتراجحة تصبح $2t^2-5t+2\succ 0$. $t_1=2$ و $t_2=\frac{1}{2}$.

تكافئ $x_1=\ln t_1=\ln 2$ و $x_2=\ln t_2=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$ و منه

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$2e^{2x}-5e^x+2$		+	0	-	0	+	

و بالتالي حلول المتراجحة $2e^{2x}-5e^x+2\succ 0$ هي المجال $]-\ln 2;\ln 2[$.

2.أ-احسب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x)=2-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

و منه

$$=\frac{2(e^x-1)^2-e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}+2-4e^x-e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$$

ب-اتجاه تغير الدالة f: اشارة $f'(x)$ من اشارة البسط أي: $2e^{2x}-5e^x+2$ (تم مناقشة اشارتها في السؤال السابق).

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\ln 2;+\infty[$.

حلول مقترحة

و متناقصة تماما على المجال $]0;\ln 2]$.

جدول تغيرات f .

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(ln2)$	$\nearrow$	$+\infty$

حيث $f(ln2)=2\ln(2)+1=1+\ln 4$

3.ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C) على المجال $]0;+\infty[$.

4.ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=2x+m$

حلول المعادلة $f(x)=2x+m$ هس فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+m$.

من أجل $m\leq\frac{1}{2}$ لا يوجد حلول.

من أجل $m\succ\frac{1}{2}$ يوجد حل واحد.

الجزء -ج-ليكن n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و نعرف العدد I_n حيث: $I_n=\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}\left[\frac{e^x}{e^x-1}\right]dx$

1-أ.حساب العدد I_n ك:

أي

$$I_n=\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}\left[\frac{e^x}{e^x-1}\right]dx=\left[\ln\left(e^x-1\right)\right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}$$
$$=\ln\left(e^{\ln(n+1)}-1\right)-\ln\left(e^{\ln(n)}-1\right)$$
$$=\ln\left(n+1-1\right)-\ln\left(n-1\right)$$
$$=\ln\left(n\right)-\ln\left(n-1\right)$$
$$=\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

ب--احسب النهايات التالية:

$$\lim_{n\to 1} I_n=\lim_{n\to 1}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=+\infty$$

و $$\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=0$$

2. نعتبر من أجل كل عدد طبيعي $n\succ 1$ ، المجموع S_n حيث $S_n=I_2+I_3+...+I_n$. حساب S_n .

حسب الخواص الجبرية للدالة اللوغاريتم

$$S_n=I_2+I_3+...+I_n$$
$$=\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+...+\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times...\times\frac{n}{n-1}\right)$$
$$=\ln(n)$$

3.أ- حساب $A(n)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلة: $y=2x+\frac{1}{2}$ ، $x=\ln 2$ و $x=\ln(n+1)$

على المجال $[\ln 2;\ln(n+1)]$ بالمنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) اذن

$$A\left(n\right)=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\left[f(x)-y\right]dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\left[2x+\frac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}-2x-\frac{1}{2}\right]dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\left[\frac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}-\frac{1}{2}\right]dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\left[\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)}-1\right]dx$$

و منه

$$A(n)=\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^x-1\right)-x\right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{\ln(n+1)}-1\right)-\ln(n+1)\right]-\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{\ln(2)}-1\right)-\ln(2)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln(n)-\ln(n+1)\right]+\frac{1}{2}\ln 2$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+\ln\left(\sqrt{2}\right)$$

ب-عين نهاية $A\left(n\right)$: $\lim_{n\to+\infty} A_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+\ln\left(\sqrt{2}\right)=\ln\left(\sqrt{2}\right)$

3.

لدينا الدالة f المعرفة على $[0;2\pi]$ كما يلي : $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)+1$.

1.أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0;2\pi]$ حيث

$$f'(x)=-\sin(x)-2\frac{1}{2}\sin(2x)$$

و منه

$$=-\sin(x)-\sin(2x)$$
$$=-[\sin(x)+\sin(2x)]$$

نذكر هنا أنه علينا استعمال مشتق مركب دالتين: $[(f\circ g)(x)]'=g'(x)\times f'(g(x))$

ب- لدينا $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$ بالتعويض في ما سبق نجد

أي

$$f'(x)=-[\sin(x)+\sin(2x)]$$
$$=-[\sin(x)+2\sin(a)\cos(a)]$$

و بالتالي من أجل كل x من $[0;2\pi]$، $f'(x)=-\sin(x)[1+2\cos(x)]$

2.حل في المجال $[0;2\pi]$ المعادلة : $\sin(x)[1+2\cos(x)]=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(x)=0\\ [1+2\cos(x)]=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0, x=\pi, x=2\pi\\ \cos(x)=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=\frac{2}{3}\pi, x=\frac{4}{3}\pi\end{array}\right.$$

$$S=\left\{0;\frac{2}{3};\pi;\frac{4}{3}\pi;2\pi\right\}$$

3.أ- اشارة $f'(x)$:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;2\pi]$. لدينا :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0
$f(x)$	2,5	↘	0,25	↗	0,5	↘	0,25	↗	2,5

حلول مقترحة

حيث:

$$f(0)=\cos 0+\frac{1}{2}\cos 0+1=1+\frac{1}{2}+1=2,5\,;$$

$$f(\pi)=\cos\pi+\frac{1}{2}\cos(2\pi)+1=-1+\frac{1}{2}+1=0,5\,;$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1-\frac{3}{4}=0,25.$$

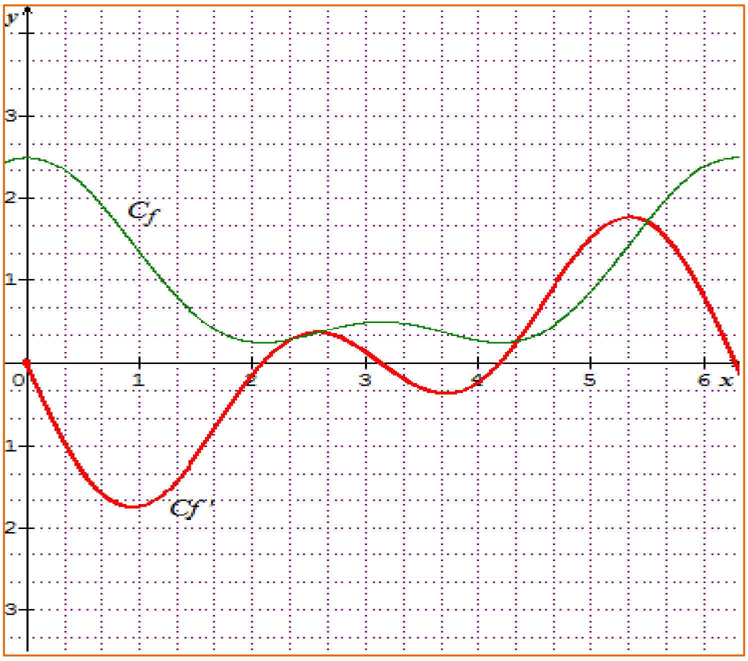
$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)+1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)+1$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0,25.$$

$$f(2\pi)=\cos(2\pi)+\frac{1}{2}\cos(4\pi)+1=1+\frac{1}{2}+1=2,5\,.$$

4.رسم المنحنى الممثل للدالة f : نستعين بقيم مساعدة من أجل دقة الرسم:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2,5	1,3	0,3	0,5	0,3	0,9	2,4



4.

1.أ-بقراءة بيانية بما أن المنحنى (C) يشمل النقطة B فان نجد $f(1)=2$.

و $f'(1)$ هو معامل توجيه مماس منحنى الدالة f في النقطة ذات الفاصلة 1 أي النقطة B. نلاحظ أن المماس يوازي محور الفواصل و بالتالي معامل توجيهه يساوي 0 و منه $f'(1)=0$.

ب- حساب $f'(x)$:

أي: $$f'(x)=\frac{\left(\frac{b}{x}\right)x-a+b\ln(x)}{x^2}=\frac{b-a+b\ln(x)}{x^2}$$ اذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{(b-a)-b\ln(x)}{x^2}$

ج-استنتاج قيمتي العددين a و b:

لدينا $f(1)=2$ و $f'(1)=0$. $f(1)=\dfrac{a+b\ln(1)}{1}=a$ و عليه $a=2$.

$f'(1)=\dfrac{(b-a)-b\ln(1)}{1^2}=b-2=0$ و منه $b=2$.

بعد التعويض نجد $f'(x)=\dfrac{-2\ln(x)}{x^2}$.

2.أ- لدينا $f'(x)=\dfrac{-2\ln(x)}{x^2}$ و منه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $x^2\succ 0$ اذن اشارة $f'(x)$ من اشارة الدالة $x\mapsto -2\ln(x)$ أي من اشارة $x\mapsto -\ln(x)$.

اتجاه تغير الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	0	−

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

ب-حساب نهايتي الدالة f:

حلول مقترحة

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2+2\ln(x)}{x}=-\infty$ لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} 2+2\ln(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\end{cases}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2\ln(x)}{x}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+2\frac{\ln(x)}{x}\\ &=0\end{aligned}$$

لأن: حسب التزايد المقارن لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{\ln(x)}{x}=0$

ج-جدول تغيرات الدالة f.

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3.أ- بين أن المعادلة : $f(x)=1$ تقبل حل وحيد على المجال $]0;1]$.

الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]0;1]$.

حيث $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ و $f(1)=2$ و بالتالي $1\in]-\infty;2]$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة : $f(x)=1$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;1]$.

ب- من خلال جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أنه يوجد حل وحيد β لأن الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و لدينا كذلك $f(1)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ اذن $1\in]0;2]$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة : $f(x)=1$ تقبل حل وحيد β على المجال $]1;+\infty[$

باستعمال خاصية *Tableau* المتوفرة في الألة الحاسبة العلمية نحسب صور للدالة f من المجال $]1;+\infty[$ نجد أن الحل ينتمي للمجال $]5;6[$ و بالتالي $n=5$. اذن $5\prec\beta\prec 6$.

5.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}$.

1.نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}=-\infty$$

2.لدينا:

$$f(x)+f(-x)=x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}-x+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}$$

أي:

$$=2\ln 4+\frac{2}{e^x+1}+\frac{2}{\frac{1}{e^x}+1}$$

$$=2\ln 4+\frac{2\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=2\ln 4+2$$

اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)+f(-x)=2+2\ln 4$.

و عليه النقطة $\left(0;1+\ln 4\right)$ هي مركز تناظر المنحنى (C).

3.اتجاه تغير الدالة f.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=1-2\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$

اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ لأن $e^{2x}+1>0$ و $\left(e^x+1\right)^2>0$

و عليه فان الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4-أ. لدينا الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=m$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$.

ب-ليكن α حل المعادلة $f(x)=3$ باستعمال الآلة الحاسبة نتحصل على $f(1,1)=2,98<3$ و $f(1,2)=3,04>3$

اذن $1,1<\alpha<1,2$.

ج- من أجل أي قيمة ل m العدد $(-\alpha)$ حل للمعادلة $f(x)=m$.

من السؤال 2.

$$f(-\alpha)=2+2\ln 4-f(\alpha)=2+2\ln 4-3=2\ln 4-1$$

و عليه $(-\alpha)$ حل للمعادلة من أجل $m=2\ln 4-1$.

5.أ-من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$\begin{aligned}
x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}&=x+\ln 4+\frac{2+2e^x-2e^x}{e^x+1}\\
&=x+\ln 4+\frac{2\left(e^x+1\right)}{e^x+1}+\frac{-2e^x}{e^x+1}\\
&=x+\ln 4+2-\frac{2e^x}{e^x+1}\\
&=f(x)
\end{aligned}$$

ب- لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x)-y&=\lim_{x\to+\infty} x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}-(x+\ln 4)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0
\end{aligned}$$

اذن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+\ln 4$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

و لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x)-y&=\lim_{x\to-\infty} x+\ln 4+2-\frac{2e^x}{e^x+1}-(x+\ln 4+2)\\
&=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2e^x}{e^x+1}=0
\end{aligned}$$

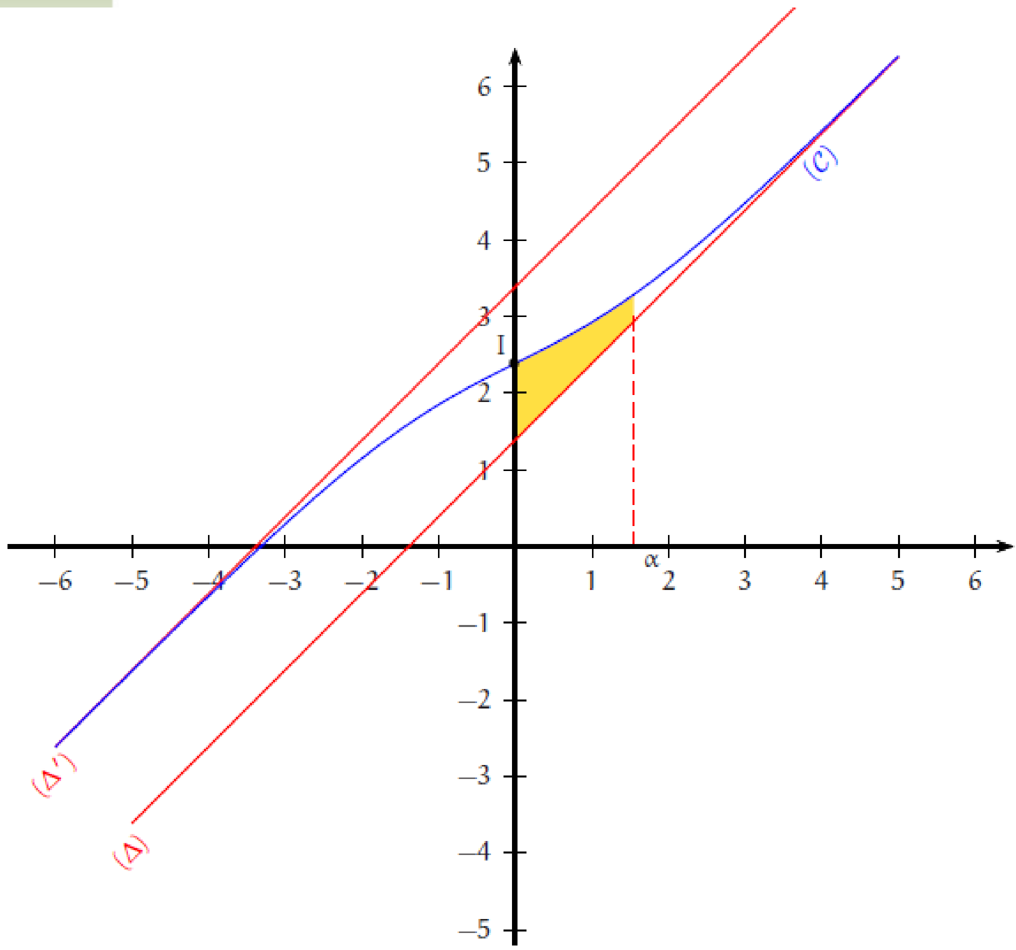
و بالتالي المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+2+\ln 4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$.

6.الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ):

بدراسة اشارة الفرق $f(x)-y$ نجد: $f(x)-y=\frac{2}{e^x+1}>0$.

اذن المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) على $\mathbb{R}$.

الرسم (غير مطلوب)



7.نعتبر α العدد الحقيقي الموجب .

لدينا: $I(\alpha)=\int_0^\alpha [f(x)-x-\ln 4]\,dx$

$I(\alpha)$ يمثل مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمان الذين معادلاتهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

ب- لدينا:

اذن:

$$\begin{aligned}
I(\alpha)=I(\alpha)&=\int_0^\alpha [f(x)-x-\ln 4]\,dx=\\
&=\int_0^\alpha 2-2\frac{e^x}{e^x+1}\,dx\\
&=\left[2x-2\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^\alpha .\\
&=2\alpha-2\ln\left(e^\alpha+1\right)+2\ln 2\\
&=2\left[\ln e^\alpha-\ln\left(e^\alpha+1\right)+\ln 2\right]\\
&=2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1}\right)
\end{aligned}$$

حلول مقترحة

ج-حساب α من أجل $I(\alpha)$:

نجد من هذا:

$$I(\alpha)=1 \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}=e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{\alpha}=e^{\frac{1}{2}}\left(e^{\alpha}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha}\left(2-e^{\frac{1}{2}}\right)=e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\left(2-e^{\frac{1}{2}}\right)}$$

6.

1. اشارة $f(x)$: على المجال $]0;+\infty[$ أي $x\succ 0$

لدينا : $\begin{array}{l}1-\ln x\succ 0\\ \ln x\prec 1\Leftrightarrow x\prec e\end{array}$ نلخص اشارة $f(x)$ في الجدول التالي:

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2.احسب نهايات الدالة f :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\left(1-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} x-x\ln x=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\ln x\right)=-\infty$.

3.الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث $f'(x)=1-\ln x+x\left(\frac{-1}{x}\right)=-\ln(x)$

ب- اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f'(x)=-\ln(x)$ و بالتالي اشارة م اشارة $\left[-\ln x\right]$ اذن:

الدالة متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

حلول مقترحة

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = 1\times(1-\ln 1) = 1.$

4.معادلة المماس (T_a) مماس المنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة a تعطى بالعبارة: $(T_a): y = f'(a)(x-a)+f(a)$

$y=-\ln(a)(x-a)+a-a\ln a$ أي $y=-x\ln(a)+a$.

من أجل $x=0$ نجد $y=a$ و منه $A'(0;a)$ النقطة A' نقطة تقاطع المماس (T_a) مع محور التراتيب.

5.حساب $A(a)$:

في الحالة $a\prec e$:

$$A(a)=\int_a^e f(x)dx$$

$$=\int_a^e x(1-\ln(x))dx=\int_a^e x-x\ln(x)dx$$

$$=\int_a^e xdx-\int_a^e x\ln(x)dx$$ نضع: $I=\int_a^e x\ln(x)dx$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^e-I$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{a^2}{2}-I$$

نحسب التكامل I بالتجزئة:

نضع $v'(x)=x$ و بالتالي $v(x)=\frac{x^2}{2}$.

و $u(x)=\ln(x)$ و عليه $u'(x)=\frac{1}{x}$.

حلول مقترحة

اذن

$$I=\int_a^e x\ln(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_a^e-\int_a^e\frac{x^2}{2x}dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln a-\int_a^e\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln a-\left[\frac{x^2}{4}\right]_a^e$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln a-\frac{e^2}{4}+\frac{a^2}{4}$$

اذن

$$A(a)=\frac{e^2}{2}-\frac{a^2}{2}-\left(\frac{e^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln a-\frac{e^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\ln a+\frac{e^2}{4}-\frac{a^2}{4}$$

$$=-\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\ln a+\frac{e^2}{4}$$

7.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

1.النهايات:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)=-\infty$ لأن :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}-x+\frac{5}{2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)=-\infty\end{cases}$$

و أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)=+\infty$ لأن:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}-x+\frac{5}{2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)=0\end{cases}$$

2.أ- المستقيم المقارب (Δ):

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-y$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$$

$$=0$$

و عليه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب- حل المعادلة: $e^{x-2}-4=0$ تكافئ $e^{x-2}=4$ معناه $x-2=\ln 4$ أي $x=2+\ln 4$. و منه $S=\{2+\ln 4\}$.

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) ندرس اشارة الفرق: $f(x)-y$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$$

و منه اشارة الفرق: $f(x)-y$ من اشارة $-\left(e^{x-2}-4\right)$ لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{2}e^{x-2}\succ 0$.

x	$-\infty$	$2+\ln 4$	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	-
الوضعية	(C) يقع فوق (Δ)	$(C)\cap(\Delta)=\{(2+\ln 4; f(2+\ln 4))\}$	(C) يقع تحت (Δ)

وعليه المنحنى (C) يوجد فوق (Δ) على المجال $]-\infty;2+\ln 4]$ و تحت (Δ) على المجال $[2+\ln 4;+\infty[$.

3.حساب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2x}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}-\left(\frac{e^{-2}}{2}\right)\frac{e^{x}}{x}\left(e^{x-2}-4\right)$$
$$=-\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

اذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$.

4.أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=-1-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)+e^{x-2}\left(-\frac{1}{2}e^{x-2}\right)$$
$$=-1-\left(e^{x-2}\right)^2+2e^{x-2}$$
$$=-\left[1+\left(e^{x-2}\right)^2-2e^{x-2}\right]$$
$$=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-\left(e^{x-2}-1\right)^2\le 0$. أي $f'(x)\le 0$ اذن الدالة f متناقصة على $\mathbb{R}$.

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

5. نقطة انعطاف:

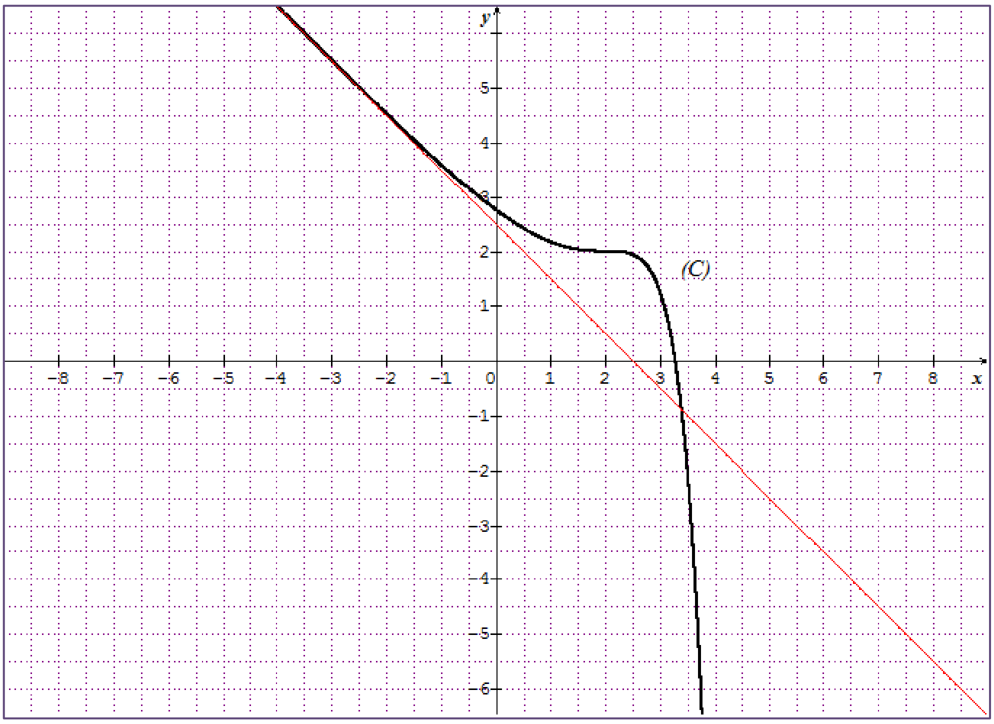
لدينا الدالة المشتقة الأولى $f\,'$ تنعدم من أجل $x=2$ و لا تغير من اشارتها اذن النقطة $A\left(2;f\left(2\right)\right)$ حيث

$$f(2)=-2+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{2-2}\left(e^{2-2}-4\right)$$
$$=-2+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=2$$

ثم بين أن $A\left(2;2\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى $\left(C\right)$.

6.بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$. (تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة).

7.أنشئ $\left(\Delta\right)$ و $\left(C\right)$ في نفس المعلم (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين $\ln 2\simeq 0,7$ ، $\ln 3\simeq 1,1$).



8.

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ بما يلي: $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$.

1.أ- الدالة العددية g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ،

أي:

$$g'(x)=2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$$
$$=\frac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x\sqrt{x}-x}{x^2}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

و بالتالي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$

ب-لدينا $x\in[1;+\infty[$ أي $x\geq 1$

و بما أن $\sqrt{x}\geq 1$ تكافؤ $\sqrt{x}-1\geq 0$ اذن $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}\geq 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

ج-استنتاج أن لكل x من المجال $[1;+\infty[$ ، $0\leq \ln x\leq 2\sqrt{x}$ لاحظ أن $(2\sqrt{x}-2\leq 2\sqrt{x})$.

لدينا $\sqrt{x}\geq 1$ و بما أن الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.افان $g(x)\geq g(1)$ أي $g(x)\geq 0$

و بالتالي: $2\sqrt{x}-2-\ln x\geq 0$ أي $2\sqrt{x}-2\geq \ln x$ و حسب الملاحظة لدينا $2\sqrt{x}\geq 2\sqrt{x}-2\geq \ln x$ اذن حسب خاصة التعدي

لدينا $0\leq \ln x\leq 2\sqrt{x}$. من الواضح أن من أجل كل x من المجال $[1;+\infty[$ ، $\ln x\geq 0$

د- مما سبق لدينا

أي

$$0\leq \ln x\leq 2\sqrt{x}$$
$$0\leq (\ln x)^3\leq \left(2\sqrt{x}\right)^3$$
$$0\leq (\ln x)^3\leq 8x\sqrt{x}$$
$$0\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2}$$
$$0\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \frac{8\sqrt{x}}{x}$$
$$0\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \frac{8}{\sqrt{x}}$$

اذن من اجل كل x من $[1;+\infty[$ ، $0 \le \frac{(\ln x)^3}{x^2} \le \frac{8}{\sqrt{x}}$

استنتاج النهاية $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$:

لدينا $0 \le \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} \le \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}}$ لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$ و منه حسب مبرهنة الحصر $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = 0$.

$0 \le \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} \le 0$

2.أ- الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$. معناه $G'(x) = g(x)$

الدالة G قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ،

$$G'(x) = \left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)+\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)x$$

أي $= -1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x+\frac{2x}{3\sqrt{x}}-1 = -2-\ln(x)+\frac{4}{3}\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{x}}{3}$

$= -2-\ln(x)+2\sqrt{x} = g(x)$

ب-احساب التكامل $\int_1^4 g(x)dx$:

$$\int_1^4 g(x)dx = [G(x)]_1^4 = G(4)-G(1) = \frac{19}{3}-4\ln 4$$

9.

1. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $e^{2x}-4e^x+3=0$

نضع: $e^x = t$ و منه المعادلة تصبح: $t^2-4t+3=0$ أي : $t_1 = 1$ و $t_2 = 3$.

و لدينا $e^x = t$ تكافئ: $x = \ln t$ أي $x_1 = \ln 1 = 0$ و $x_2 = \ln 3$ اذن $S = \{0;\ln 3\}$..

2. ب- حل في المتراجحة: $e^{2x}-4e^x+3 \le 0$.

مما سبق لدينا : $e^{2x}-4e^x+3=0$ تكافئ: $S = \{0;\ln 3\}$ اذن اشارة العبارة : $e^{2x}-4e^x+3$ كالتالي

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

و عليه حلول المتراجحة: $e^{2x}-4e^{x}+3\leq 0$ هي: $S=[0;ln3]$.

ج- حسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}$. عند التعويض المباشر تظهر حالة عدم التعيين من الشكل $\left(0/0\right)$ و بالتالي نرفعها عن طريق التحليل للبسط و المقام.

مما سبق ن أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{2x}-4e^{x}+3=\left(e^{x}-3\right)\left(e^{x}-1\right)$ و $e^{2x}-1=\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-1\right)$

اذن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{x}-3\right)\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{x}-3\right)}{\left(e^{x}+1\right)}=\dfrac{-2}{2}=-1$

2.اثبات أن المعادلة : $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ تقبل حجلا قفي المجال $[-1;0]$.

نضع $f(x)=e^{2x}+e^{x}+4x$. حيث الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x)=2e^{2x}+e^{x}+4$ نلاحظ أن $f'(x)\geq 0$ يعني أن الهدالة متزايدة تماما على .

دالة f هي مجموع دوال مستمرة على $\mathbb{R}$ اذن هدي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$.

و من جهة أخرى لدينا $f(0)=2\succ 0$ و $f(-1)=e^{-2}+e^{-1}-4\prec 0$ اذن $f(-1)\times f(0)\prec 0$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ تقبل حلا في المجال $[-1;0]$.

.10

لتكن الدالتان f و g المعرفتان كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^{2}+x+\dfrac{1}{x}\right)$ و $g(x)=2x^{3}+x^{2}-1$.

1.اثبات أنه من أجل كل $x\neq 0$ لدينا: $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الاشارة.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*}$: $f'(x)=\dfrac{1}{3}\left(2x+1-\dfrac{1}{x^{2}}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2x^{3}+x^{2}-1}{x^{2}}\right)=\dfrac{2x^{3}+x^{2}-1}{3x^{2}}=\dfrac{g(x)}{3x^{2}}$

اذن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{3x^{2}}$ و لدينا $x\in\mathbb{R}^{*}$ يعني: $3x^{2}>0$ و منه اشارة $f'(x)$ من نفس الاشارة $g(x)$.

2.دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x^3+x^2-1\right) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x^3+x^2-1\right) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x)=6x^2+2x$.

$$g'(x)=0 \Rightarrow 6x^2+2x=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{-1}{3} \end{array}\right\}.$$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g\left(\frac{-1}{3}\right)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $g\left(\dfrac{-1}{3}\right)=\dfrac{-26}{27}$

$g(0)=-1$

3.أ-اثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيدا α حيث $\alpha\in\left]0;1\right[$. الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\left]0;1\right[$ و $g(0)=-1<0$ ، $g(1)=2>0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α . (لم يطلب تعيين حصره).

ب- استنتاج حسب قيم x اشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

4.شكل جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	||	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

نحسب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

5. لتكن النقطتين $I\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$ و $J(1;1)$.

أ-اثبات أن المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J . حيث: $I\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$ و $J(1;1)$.

نعين معادلة المستقيم (IJ):

معامل توجيه المستقيم (IJ) هو : $a=\frac{y_J-y_I}{x_J-x_I}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{2}{3}$ و بالتالي المستقيم (IJ) من الشكل: $y=\frac{2}{3}x+b$.

$J\in(IJ)$ و منه: $(IJ):\mathrm{y}=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

من جهة ثانية نعين معادلة المماس للمنحنى (C) في النقطة J أي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و نجد: $\mathrm{y}=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J.

ب-تعين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة I .

$$(T): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$

$$(T): y=\frac{-2}{3}(x+1)-\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{-2}{3}x-1$$

ج-دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و المماس (T).

ندرس اشارة الفرق $f(x)-\mathrm{y}$ نجد:

حلول مقترحة

$$f(x)-y=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{-2}{3}x-1\right)=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{3x}$$

باستعمال القسمة نتحصل: نلاحظ ان (-1) جذر للبسط

$$f(x)-y=\frac{(x+1)^2(x+1)}{3x}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		-	0	+			
$3x$			-		‖	+	
$f(x)-y$		+	0	-	‖	+	

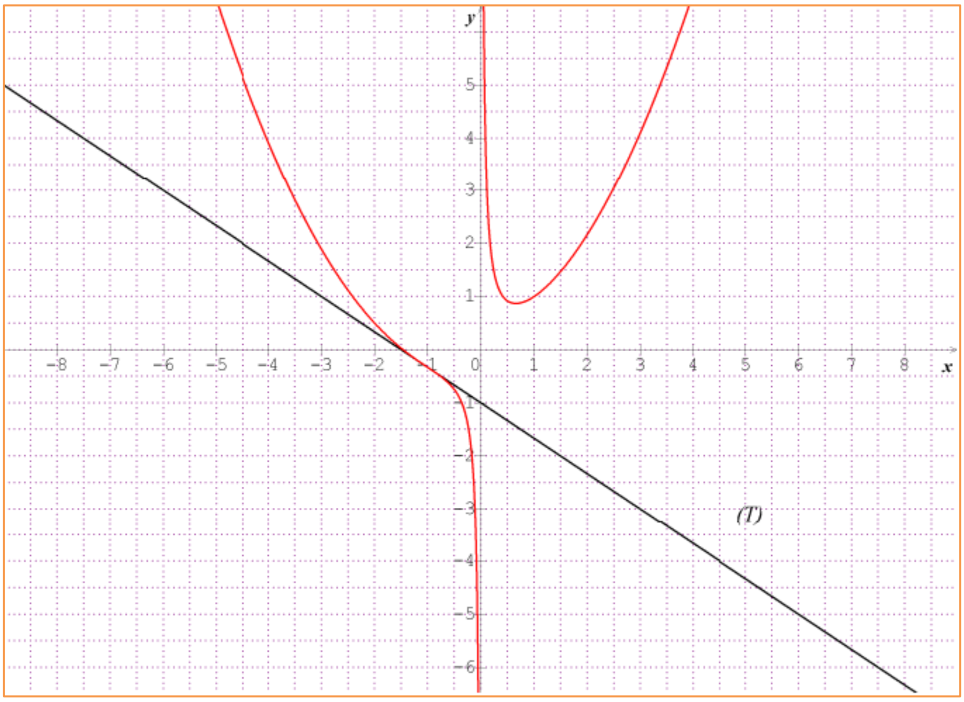
اذن من أجل $x\in]-\infty;-1[$ (C) يقع فوق المماس (T).

من أجل $x\in]-1;0[$ (C) يقع تحت المماس (T).

من أجل $x\in]0;+\infty[$ (C) يقع فوق المماس (T).

المنحنى (C) يتقاطع مع المماس (T) في النقطة $I\left(-1;\frac{-1}{3}\right)$.

6.رسم المماس (T) و المنحنى (C).(نأخذ $f(\alpha)\simeq 0.8$).



7.المناقشة

لدينا:
$$x^3+x^2-3mx+1=0 \Rightarrow x^3+x^2+1=3mx$$
$$\Rightarrow x^2+x+\frac{1}{x}=3m$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=m \Rightarrow f(x)=m$$

حلول هذه المعادلة بيانيا هي تعين فواصل نقط تقاطع المنحنى مع (C) المستقيم ذا المعادلة: $y=m$.

لما $m\in\left]-\infty,f(\alpha)\right[$ يوجد حل واحد .

لما $m=f(\alpha)$ يوجد حلان أحدهما حل وحيد مضاعف

لما $m\in\left]f(\alpha),+\infty\right[$ يوجد ثلاث حلول

8.حساب مساحة الحيز S المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=1$ و $x=e$

لدينا من أجل $x\in[1;e]$ ، $f(x)>0$ و بالتالي:

$$S=\int_1^e f(x)-ydx=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}\int_1^e\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^e=\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}+\ln e\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}+1\right)-\frac{5}{18}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}\right)-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{3}\right)u.a$$

.11

1. لتكن f الدالة العددية المعرفةعلى $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$.

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{\frac{1}{e^{x}}+1}=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$
$$=\frac{e^{x}+1-1}{e^{x}+1}=\frac{e^{x}+1}{e^{x}+1}-\frac{1}{e^{x}+1}$$
$$=1-\frac{1}{e^{x}+1}$$

وعليه $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$

استنتاج: من أجل كل x و $-x$ من $\mathbb{R}$ ،

$$f(-x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$=1+\frac{1}{2}x-2+\frac{2}{e^{x}+1}$$
$$=-1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{e^{x}+1}$$
$$=-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}\right)=-f(x)$$

اذن الدالة f فردية.

2.احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}=-\infty$.

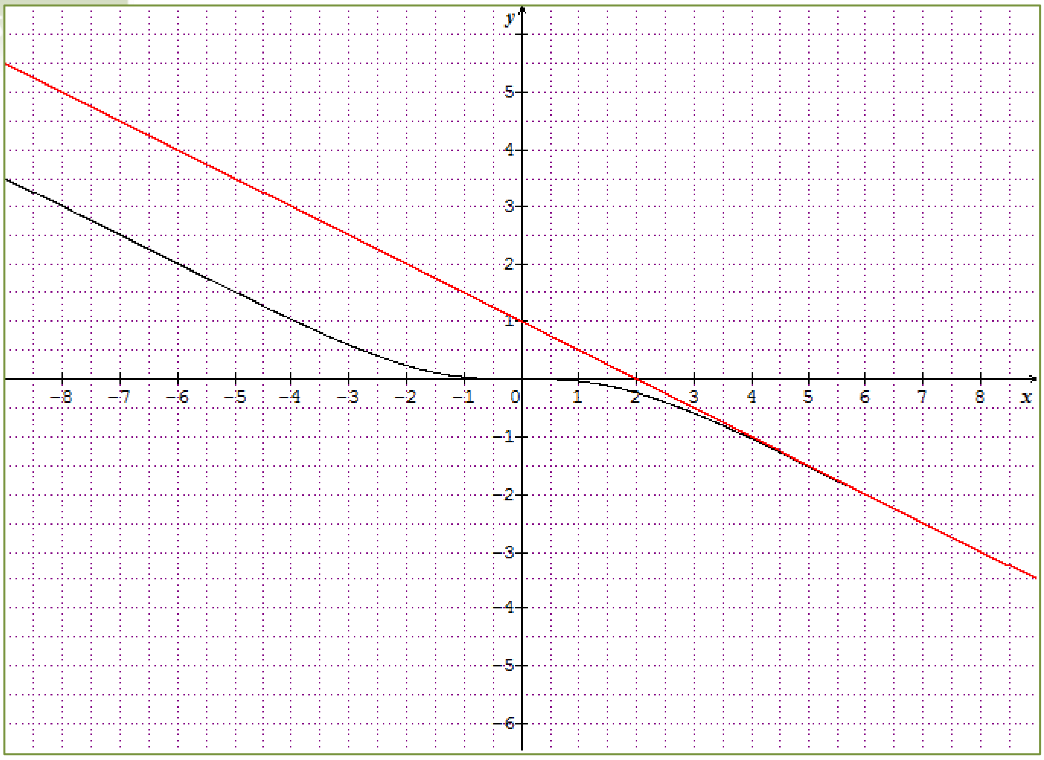
3.أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$
$$=\frac{-\left(e^{x}+1\right)^{2}+4e^{x}}{2\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$
$$=\frac{-\left(e^{x}-1\right)^{2}}{2\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

و بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)\leq 0$ اذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

5.انشئ في المعلم السابق المستقيم الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{2}x$ ثم أرسم المنحنى $\left(C_{f}\right)$.



12.

I. u الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ ، $u(x)=x^2-2+\ln x$

1.أ- النهايات

$$\lim_{x\to 0} u(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2-2+\ln x\right)=-\infty$$

و كذلك

$$\lim_{x\to +\infty} u(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-2+\ln x\right)=+\infty$$

ب-اتجاه تغير الدالة u على $]0;+\infty[$:

الدالة u قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، $u'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ و عليه على المجال $]0;+\infty[$ ، $u'(x)>0$

اذن الدالة u متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2. الدالة u مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

و لدينا $\lim_{x\to 0} u(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} u(x)=+\infty$

لدينا $u(1)=-1$ اذن نأخذ قيم حقيقية أكبر تماما من 1. بالآلة الحاسبة نتحصل :

حلول مقترحة

و $u(1,31)=-0,01<0$ و $u(1,32)=0,02>0$ و منه $u(1,31)<u(\alpha)<u(1,32)$ أي $1,31<\alpha<1,32$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $u(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$ حيث $1,31<\alpha<1,32$

3.اشارة $u(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+

4. لدينا:

$$u(\alpha)=0$$
$$\alpha^2-2+\ln\alpha=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=2-\alpha^2$$

اذن: $\ln\alpha=2-\alpha^2$

II.نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$

1.احسب من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)$ بدلالة $u(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$:

$$f(x)=2x+2\left(-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x)$$
$$=\frac{2\left(x^2-2\ln x\right)}{x}$$
$$=\frac{2u(x)}{x}$$

2.استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ اشارة $f'(x)$ من اشارة $u(x)$ أي:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

اذن الدالة f متناقصة على المجال $]0;\alpha[$ و متزايدة على المجال $]\alpha;+\infty[$.

III. 1.نعتبر النقطة $A(0;2)$، بين ان المسافة AM تعطى بالعبارة: $AM=\sqrt{f(x)}$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $AM=\sqrt{(x-0)^2+(\ln x-2)^2}=\sqrt{x^2+(\ln x-2)^2}=\sqrt{f(x)}$

2.لتكن g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

و عليه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}>0$ اذن اشارة $g'(x)$ من اشارة $f'(x)$

و هكذا الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$.

ب-بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P .

من السؤال.(II. 2) الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ تبلغها عند α و بما ان الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$. المسافة AM أصغرية من أجل $x=\alpha$ و عليه $P(\alpha;\ln\alpha)$.

ج-لدينا

أي:

$$\begin{aligned}AP&=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha^2+(2-\ln\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+\left(2-2-\alpha^2\right)^2}\\&=\sqrt{\alpha^2+\left(\alpha^2\right)^2}=\sqrt{\alpha^2\left(1+\left(\alpha^2\right)\right)}\\&=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\end{aligned}$$

و عليه : $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. معامل توجيه المستقيم (AP) هو: $a=\dfrac{y_p-y_A}{x_P-x_A}=\dfrac{\ln\alpha-2}{\alpha}$

و معامل توجيه مماس المنحنى Γ عند النقطة P هو: $a'=\dfrac{1}{\alpha}$

لدينا:

$$a\times a'=\frac{\ln\alpha-2}{\alpha}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\ln\alpha-2}{\alpha^2}=-1$$
$$\ln\alpha=2-\alpha^2$$

اذن المستقيم (AP) و مماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان.

.13

1.حساب الحدود:

$$u_2=\frac{1+1}{2(1)}u_1=\frac{1}{2}$$
$$u_3=\frac{3}{4}u_2=\frac{3}{8}$$
$$u_4=\frac{4}{6}u_3=\frac{1}{4}$$

2.أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، u_n موجبة تماما أي $u_n>0$.

من اجل $n=1$، $u_1=\frac{1}{2}>0$ و عليه $u_1>0$.

ليكن $n\geq 1$ نفرض أن $u_n>0$ و نتحقق من أن $u_{n+1}>0$. أي: $\frac{n+1}{2n}u_n>0$.

لدينا $u_n>0$ و $\frac{n+1}{2n}>0$ فبالتالي $\frac{n+1}{2n}u_n>0$ اذن $u_{n+1}>0$.

و عليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراج فان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n>0$.

ب- ليكن $n\geq 1$ ،
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2n}\leq\frac{n+n}{2n}=1$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$$
حيث: $u_n\neq 0$

فبالتالي: $u_{n+1}<u_n$.اذن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 0 اذن هي متقاربة.

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. نضع: $v_n=\frac{u_n}{n}$.

لدينا : $v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{2}$

أ- ليكن $n\geq 1$
$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{2n}u_n=\frac{u_n}{2n}=\frac{1}{2}\frac{u_n}{n}=\frac{1}{2}v_n$$
$$\Leftrightarrow v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$$

و عليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1=\frac{1}{2}$.

و بالتالي: $v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$

ب- لدينا $v_n = \frac{u_n}{n}$ أي $u_n = nv_n$. و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n = \frac{n}{2^n}$

4.نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

أ-نهاية الدالة f عند $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) &= \lim_{x\mapsto+\infty} \ln x - x\ln 2\\ &= \lim_{x\mapsto+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \ln 2\right) = -\infty\end{aligned}$$

ب- نهاية المتتالية (u_n).

اعلم أن المتتالية (u_n) متقاربة و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم،

لدينا :
$$u_n = \frac{n}{2^n} = \frac{e^{\ln(n)}}{e^{n\ln(2)}} = e^{\ln(n) - n\ln 2} = e^{f(n)}$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{f(n)} = e^{\lim_{n\to+\infty} f(n)} = 0$$
اذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

.14

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^{1-x}$.

1.ليكن x عدد حقيقي $f(x) = xe^{1-x} = x\times e\times e^{-x} = ex\frac{1}{e^x}$

اذن بين أنه من اجل كل x عدد حقيقي، $f(x) = e\times\frac{x}{e^x}$.

2.
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{1-x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} e\times\frac{x}{e^x} = 0$$
اذن $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$.

3. اتجاه تغير الدالة f الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{1-x} > 0$ و بالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		+	0	-	

جدول تغيرات:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

II.1. ليكن x عدد حقيقي،

$$\begin{aligned}(1-x)g_n(x) &= g_n(x)-xg_n(x)\\ &=\left(1+x+x^2+...+x^n\right)-x\left(1+x+x^2+...+x^n\right)\\ &=\left(1+x+x^2+...+x^n\right)-\left(x+x^2+...+x^n+x^{n+1}\right)\\ &=1-x^{n+1}\end{aligned}$$

اذن من أجل كل $x\neq 1$ ، $g_n(x)=\dfrac{\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)}$.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1،

نلاحظ أن أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x)=g_n{}'(x)$ و عليه

و بالتالي:

$$\begin{aligned}g'_n(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x)+\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}\\ &=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

3.نضع $S_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$:

حساب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = f(1)+f(2)+\ldots+f(n) = \frac{1}{e^0}+\frac{2}{e^1}+\frac{3}{e^2}+\ldots+\frac{n}{e^{n-1}}$$
$$= 1+2\left(\frac{1}{e}\right)^1+3\left(\frac{1}{e}\right)^2+\ldots+n\left(\frac{1}{e}\right)^n$$
$$= h_n\left(\frac{1}{e}\right)$$
$$= \frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n+1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = ne^{-n-1} = e^{-2}ne^{1-n} = e^{-2}f(n)$

و عليه $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} e^{-2}f(n) = 0$.

و كذلك $(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n = (n+1)e^{-n} = f(n+1)$

و عليه نستنتج ان: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2$.