مراجعة شاملة حول الدوال العددية (1)

إقتراح: خالد بخاخشة

بتصرف: غريب عصام

1) أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin(\pi x)}{x-1}\right) \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2021}-1}{x}$$

2) بين أن المعادلة $x^3+x=-4$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم أعط حصرا لـ α سعته 10^{-2} .

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر الدوال التالية :

3) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ و (Γ) تمثيلها البياني .

– بين أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما .

4) الدالة h معرفة كما يلي : $h(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ و ليكن (γ) تمثيلها البياني .

أ) عين مجموعة تعريف الدالة h ، ثم أحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف .

ب) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) عند النقطة ذات الفاصلة **0** .

5) لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي : $k(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ و (δ) تمثيلها البياني .

– أثبت أن المنحنى (δ) يقبل مماسين يشملان مبدأ المعلم يطلب تعيين معادلتيهما .

6) لتكن الدالة z المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $z(x)=2\cos^2 x+\sin 2x$ و (C) تمثيلها البياني .

أ) بين أن الدالة z دورية و دورها هو π ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة z و شكل جدول تغيراتها على المجال $[0;\pi]$.

ب) بين أن المستقيم ذي المعادلة $x=\dfrac{\pi}{8}$ هو محور تناظر للمنحنى (C) .

7) لتكن الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f_n(x)=(1+x)^n-1-nx$ حيث n عدد طبيعي و $n\geq 2$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $[0;+\infty[$.

ب) أثبت صحة متباينة برنولي التالية : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $(1+x)^n\geq 1+nx$.

8) لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=x\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

أ) عين مجموعة تعريف الدالة f ثم أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند **1** .

ب) عين عبارة $f'(x)$ ، ثم أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة **0** .

ج) يعطى جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	-1		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		1
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{7}{3}-4\sqrt{\frac{2}{3}}}$	$\searrow$	1

– أنشئ المنحنى (C_f) (يعطى $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.6$ و $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 0.3$) .

د) لتكن (λ) مجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوي و التي تحقق : $(x-1)x^2+(x+1)y^2=0$.

– بين أن المجموعة (λ) هي اتحاد منحنيين يطلب تعيين معادلتيهما ثم أنشئ المجموعة (λ) في نفس المعلم السابق .

9) لتكن الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي : $f_m(x)=\frac{x^2+(m-2)x+1-m}{x-2}$ حيث m وسيط حقيقي و ليكن (C_m) المنحنى الممثل للدالة f_m .

أ) بين أن كل المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها .

ب) أحسب $f'_m(x)$ ، ثم عين قيم الوسيط الحقيقي m التي تكون من أجلها الدالة f_m متزايدة تماما على مجال تعريفها .

ت) هل يقطع المنحنى (C_m) حامل محور الفواصل ؟ برر إجابتك .

ث) بين أن النقطة $\Omega_m(2\,;2+m)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_m) .

الحل

1) حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin(\pi x)}{x-1}\right) : FI \to \frac{0}{0}$$

نضع $f(x)=\sin(\pi x)$ ، لدينا $f(1)=\sin\pi=0$ و بالتالي :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

و لدينا $f'(x)=\pi\cos(\pi x)$ إذن :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}=\pi\cos(\pi)=-\pi$$

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}: FI \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{1+x-1+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

لدينا $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (نهاية شهيرة) و $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)=2$ و بالتالي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{2}{2}=1$$

$$3)\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2021}-1}{x}: FI \to \frac{0}{0}$$

نضع $g(x)=(x+1)^{2021}$ ، لدينا $g(0)=1^{2021}=1$ و بالتالي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2021}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$$

و لدينا $g'(x)=2021(x+1)^{2020}$ إذن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2021}-1}{x}=2021\times 1^{2020}=2021$$

2) تبيين أن المعادلة $x^3+x=-4$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3+x+4$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقها : $f'(x)=3x^2+1>0 : x\in\mathbb{R}$ أي أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، و لدينا $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ أي $\lim_{x\to-\infty}f(x)\times\lim_{x\to+\infty}f(x)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $x^3+x=-4 \Leftrightarrow x^3+x+4=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

– تعيين حصرا للعدد α سعته 10^{-2} :

لدينا $f(-1)=2$ و $f(-2)=-6$ و منه $\alpha\in]-2;-1[$. باستخدام طريقة التنصيف نجد $\alpha\in]-1.50;-1.25[$.

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$:

3) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ و (Γ) تمثيلها البياني .

– تبيين أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما :

لدينا $g(x)=x-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ حيث :

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{\sqrt{x^2}\times\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{|x|\times\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{x\times\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2x}{\sqrt{x^2}\times\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2x}{|x|\times\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2x}{-x\times\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2}{-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 2$$

بحيث : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$.

و بالتالي المنحنى (Γ) يقبل مستقيمين مقاربين هما :

- **المستقيم** $(\Delta_1): y = x+2$ **بجوار** $-\infty$.
- **المستقيم** $(\Delta_2): y = x-2$ **بجوار** $+\infty$.

4) الدالة h معرفة كما يلي : $h(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ و (γ) تمثيلها البياني .

أ) تعيين مجموعة تعريف الدالة h :

الدالة h معرفة إذا و فقط إذا كان $x+\sqrt{x^2+1}\geq 0$ أي أن $\sqrt{x^2+1}\geq -x$ ......(1) و لدينا مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن : $\sqrt{x^2+1}\geq\sqrt{x^2}$ **أي أن** $\sqrt{x^2+1}\geq|x|$ **، و لدينا** $\begin{cases}-x=|x|\,;x\in\left]-\infty;0\right]\\-x=-|x|\,;x\in\left[0;+\infty\right[\end{cases}$ **أي أنه مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن** $|x|\geq -x$ ......(2) **، بالتعدي بين (1) و (2) نجد** $\sqrt{x^2+1}\geq -x$ **من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، إذن الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$.**

– حساب النهايات عند حدود (أطراف) مجموعة التعريف :

1) $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} = +\infty : \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} : FI \to \infty-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}} = 0^+ : \lim_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2+1} = -\infty$$

ب) تبيين أن المنحنى (γ) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقها :

$$h'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} = \frac{\frac{2\sqrt{x^2+1}+2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$h'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\times\sqrt{x^2+1}}$$

لدينا $(T): y = f'(0)x + f(0)$ حيث $\begin{cases} f'(0) = \frac{1}{2} \\ f(0) = 1 \end{cases}$ و بالتالي $(T): y = \frac{1}{2}x + 1$.

5) الدالة k المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كما يلي : $k(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ و (δ) تمثيلها البياني .

– إثبات أن المنحنى (δ) يقبل مماسين يشملان مبدأ المعلم يطلب تعيين معادلتيهما :

ليكن المماسان هما : $(\Delta_1): y_1 = k'(x_1)(x - x_1) + k(x_1)$ و $(\Delta_2): y_2 = k'(x_2)(x - x_2) + k(x_2)$

عند النقطتين $M_1(x_1 ; y_1)$ و $M_2(x_2 ; y_2)$ على الترتيب .

المماسان يشملان المبدأ معناه : $\begin{cases} k'(x_1)(-x_1) + k(x_1) = 0 \\ k'(x_2)(-x_2) + k(x_2) = 0 \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} k'(x_1)x_1 = k(x_1) \\ k'(x_2)x_2 = k(x_2) \end{cases}$

و بالتالي :

الدالة k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ و مشتقها :

$$k'(x) = \frac{2x(x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

نحل في $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ المعادلة $\frac{x^2+1}{x^2-1} = -\frac{4x^2}{(x^2-1)^2}$:

المعادلة السابقة تكافئ $-4x^2(x^2-1) = (x^2+1)(x^2-1)^2$ أي أن $x^4 + 4x^2 - 1 = 0$.

نضع $t = x^2$ و بالتالي فالمعادلة السابقة تكافئ $t^2 + 4t - 1 = 0$ ، لدينا $\Delta = 20$ إذن للمعادلة حلان متمايزان هما : $t_1 = -2 - \sqrt{5}$ (مرفوض لأن $t \geq 0$) و $t_2 = -2 + \sqrt{5}$.

و منه : $x_1 = \sqrt{-2+\sqrt{5}}$ و $x_2 = -\sqrt{-2+\sqrt{5}}$.

– كتابة معادلة المماسين :

بملاحظة أن الدالة k زوجية (أي أن $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\} : k(-x) = k(x)$

و $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\} : k'(-x) = -k(x)$) فإن $k\left(\sqrt{-2+\sqrt{5}}\right) = k\left(-\sqrt{-2+\sqrt{5}}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}}$

و $-\frac{4\sqrt{-2+\sqrt{5}}}{14-6\sqrt{5}} = k'\left(\sqrt{-2+\sqrt{5}}\right) = -k'\left(-\sqrt{-2+\sqrt{5}}\right)$.

$$(T_1): y = -\frac{4\sqrt{-2+\sqrt{5}}}{14-6\sqrt{5}}x$$

$$(T_2): y = \frac{4\sqrt{-2+\sqrt{5}}}{14-6\sqrt{5}}x$$

6) الدالة z المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $z(x) = 2\cos^2 x + \sin 2x$ و (C) تمثيلها البياني .

أ) تبيين أن الدالة z دورية و دورها هو π :

لدينا من أجل كل x و $x + \pi$ من $\mathbb{R}$:

$$z(x+\pi) = 2\cos^2(x+\pi) + 2\sin\left[2(x+\pi)\right] = 2\cos^2(x+\pi) + 2\sin(2x+2\pi)$$

- **تذكير بدساتير الدوال المثلثية :**

1) مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$ و بالتالي :

$\cos^2(x+\pi)=(-\cos(x))^2=\cos^2 x$.

2) الدالة $x\mapsto \sin x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ دورية و دورها هو 2π إذن مهما يكن x من $\mathbb{R}$

فإن $\sin(x+2\pi)=\sin x$.

و بالتالي :

$$z(x+\pi)=2\cos^2(x)+2\sin(2x)=z(x)$$

مما سبق نجد أن الدالة z دورية و دورها هو π .

- **دراسة اتجاه تغير الدالة z و تشكيل جدول تغيراتها على المجال $[0;\pi]$:**

الدالة z قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقها :

$$z'(x)=-4\cos x\sin x+2\cos 2x=-2\sin x+2\cos 2x$$

$$z'(x)=2(\cos 2x-\sin 2x)=2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)$$

$$z'(x)=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)$$

لدينا $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ و بالتالي :

$$z'(x)=2\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

إشارة $z'(x)$ من إشارة $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$:

- **لدينا $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)>0$ لما $2x+\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right[$ أي لما $x\in\left]-\frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{8};\frac{9\pi}{8}\right[$**

إذن z متزايدة تماما على المجال $x\in\left]0;\frac{\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{8};\pi\right[$.

- **لدينا $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)<0$ لما $2x+\frac{\pi}{4}\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ أي لما $x\in\left]\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{8}\right[$ إذن z متناقصة تماما على**

المجال $x\in\left]\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{8}\right[$.

- **جدول تغيرات الدالة z على المجال $[0;\pi]$:**

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		π
$z'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$z(x)$	2	$\nearrow$	$z\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\searrow$	$z\left(\frac{5\pi}{8}\right)$	$\nearrow$	2

$z\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 2.4142$

$z\left(\frac{5\pi}{8}\right) \approx -0.4142$

ب) تبيين أن المستقيم ذي المعادلة $x = \frac{\pi}{8}$ هو محور تناظر للمنحنى (C) :

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $\frac{\pi}{4} - x \in \mathbb{R}$:

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]$$

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]^2 + \sin\left[\frac{\pi}{2} - 2x\right]$$

- **تذكير :**

1) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

2) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

و بالتالي :

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x\right]^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos 2x - \sin 2x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)\right]^2 + \cos 2x = 2\times\frac{1}{2}\left(\cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x \sin x\right) + \cos 2x$$

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + 2\cos x \sin x + \cos 2x$$

- **تذكير :**

1) **مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن** $2\cos x \sin x = \sin 2x$.

2) **مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن** $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

و بالتالي :

$$z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\cos^2 x + \sin 2x = z(x)$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $\frac{\pi}{4} - x \in \mathbb{R}$: $z\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = z(x)$ إذن المستقيم ذي المعادلة $x = \frac{\pi}{8}$ الموازي لحامل محور التراتيب (yy') هو محور تناظر للمنحنى (C) .

7) الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f_n(x) = (1+x)^n - 1 - nx$ حيث n عدد طبيعي و $n \geq 2$.

أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $[0;+\infty[$:

الدالة f_n قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و مشتقها :

$$f'_n(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n\left[(1+x)^{n-1} - 1\right]$$

إشارة $f'_n(x)$ من إشارة $(1+x)^{n-1} - 1$ لأن $n \geq 2$.

لدينا من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$: $1+x \geq 1$ و بالتالي $n \geq 2 :$ $(1+x)^{n-1} \geq 1^{n-1}$ حيث $1^{n-1} = 1$ و منه $n \geq 2 : (1+x)^{n-1} \geq 1$ أي أن $n \geq 2 : (1+x)^{n-1} - 1 \geq 0$ إذن من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فإن $f'_n(x) \geq 0$ و الدالة f_n متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

ب) إثبات صحة متباينة برنولي (من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $(1+x)^n \geq 1 + nx$) :

لدينا من السؤال السابق : الدالة f_n متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ و بالتالي مهما يكن x من المجال $[0;+\infty[$ فإن : $f_n(x) \geq f_n(0)$ حيث $f_n(0) = 0$ أي أن $f_n(x) \geq 0$ أي $(1+x)^n - 1 - nx \geq 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ و من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ لدينا : $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

- دراسة الحالتين $n = 0$ و $n = 1$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$:

- من أجل $n = 0$: $\begin{cases} (1+x)^0 = 1 \\ 1 + 0 \times x = 1 \end{cases}$ و منه $(1+x)^0 \geq 1 + 0 \times x$.
- من أجل $n = 1$: $\begin{cases} (1+x)^1 = 1 + x \\ 1 + 1 \times x = 1 + x \end{cases}$ و منه $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \times x$.

مما سبق فإنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ أي أن متباينة برنولي صحيحة .

8) الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

أ)تعيين مجموعة تعريف الدالة f :

الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $\frac{1-x}{x+1} \geq 0$ و $x + 1 \neq 0$ أي أن $x \neq -1$.

إشارة الكسر $\frac{1-x}{x+1}$ من إشارة الجداء $(1-x)(x+1)$ حيث $x \neq -1$ و بالتالي :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(1-x)(x+1)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

- إذن $ID_f =]-1;1]$.

– **دراسة قابلة اشتقاق الدالة f عند 1 :**

الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1 (عند 1 بقيم أكبر) لأنه لا توجد قيم على يمين 1 في مجال تعريف الدالة f ($ID_f =]-1;1]$) و بالتالي فالدالة غير قابلة للاشتقاق عند 1 .

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;1[$ و مشتقها :

$$f'(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}+x\frac{\frac{-x-1+1-x}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}}$$

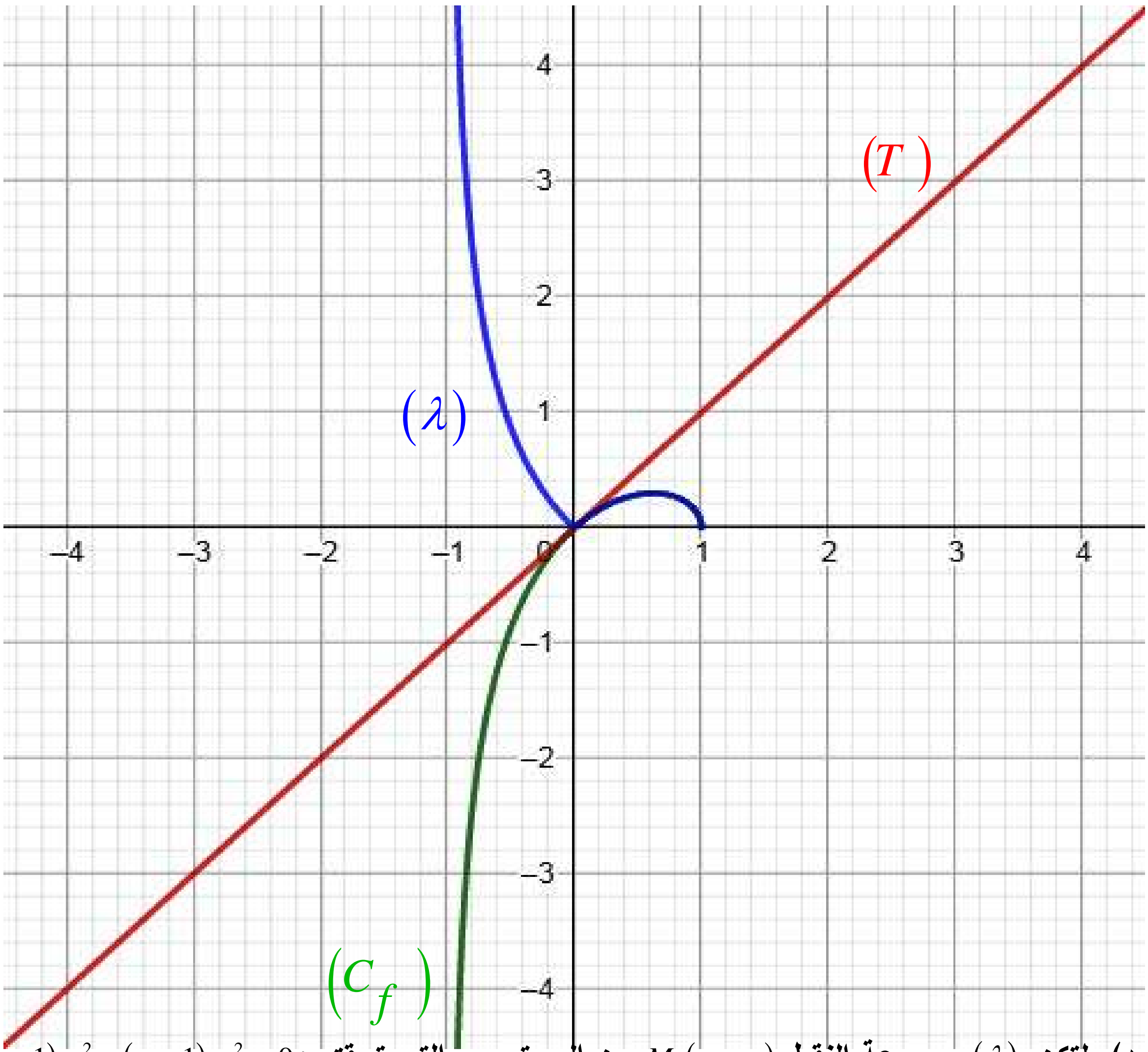
$$f'(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}-\frac{x^2}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}}$$

– **كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :**

لدينا $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ **حيث** $x_0=0$ **أي أن** $(T): y=f'(0)x+f(0)$ **و لدينا**

$\begin{cases} f'(0)=1 \\ f(0)=0 \end{cases}$ **إذن :** $(T): y=x$.

ج) إنشاء المنحنى (C_f) :



د) لتكن (λ) مجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوي و التي تحقق: $(x-1)x^2+(x+1)y^2=0$.

– تبيين أن المجموعة (λ) هي اتحاد منحنيين يطلب تعيين معادلتيهما :

لدينا : $(\lambda):(x-1)x^2+(x+1)y^2=0$: و بالتالي :

$$(\lambda):(x+1)y^2=-x^2(x-1)$$

$$(\lambda):(x+1)y^2=x^2(1-x)$$

$$(\lambda):y^2=x^2\times\frac{1-x}{x+1}\quad;\quad x\neq -1$$

$$(\lambda):y=\pm\sqrt{x^2\times\frac{1-x}{x+1}}\quad;\quad x\in]-1;1]$$

$$(\lambda):y=|x|\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\quad;\quad x\in]-1;1]$$

$$(\lambda):y=\begin{cases}-x\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}} & ;\quad x\in]-1;0]\\ x\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}} & ;\quad x\in[0;1]\end{cases}$$

$$(\lambda):y=\begin{cases}-f(x) & ;\quad x\in]-1;0]\\ f(x) & ;\quad x\in[0;1]\end{cases}$$

- المجموعة (λ) هي اتحاد منحنيين هما منحنى الدالة الذي ينطق على (C_f) لما $x \in [0;1]$ و منحنى الدالة نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل (xx') لما $x \in]-1;0]$.

الإنشاء في المعلم السابق .

9) الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي : $f_m(x)=\dfrac{x^2+(m-2)x+1-m}{x-2}$ حيث m وسيط حقيقي و ليكن (C_m) المنحنى الممثل للدالة f_m .

أ)تبيين أن كل المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها :

لتكن $I_m(x_m;y_m)\in(C_m)$ و بالتالي : $y_m=\dfrac{x_m^2+(m-2)x_m+1-m}{x_m-2}$ أي أن

$y_m(x_m-2)=x_m^2+(m-2)x_m+1-m$ أي $y_mx_m-2y_m=x_m^2+mx_m-2x_m+1-m$ و منه

$y_mx_m-2y_m-x_m^2-mx_m+2x_m-1+m=0$ و يكافئ

$m(-x_m+1)+y_mx_m-2y_m-x_m^2+2x_m-1=0$ معناه : $\begin{cases}-x_m+1=0\\ y_mx_m-2y_m-x_m^2+2x_m-1=0\end{cases}$

و بالتالي : $\begin{cases}x_m=1\\ -y_m-1^2+2-1=0\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x_m=1\\ y_m=0\end{cases}$ أي أن $I_m(1;0)$.

- كل المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة هي النقطة ذات الإحداثيات $(1;0)$.

ب) حساب $f'_m(x)$:

الدالة f_m قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{2\}$ و مشتقها :

$$f'_m(x)=\frac{(2x+m-2)(x-2)-x^2-(m-2)x-1+m}{(x-2)^2}$$

$$f'_m(x)=\frac{x^2-4x-m+3}{(x-2)^2}$$

- تعيين قيم الوسيط الحقيقي m التي تكون من أجلها الدالة f_m متزايدة تماما على مجال تعريفها :

الدالة f_m متزايدة تماما على مجال تعريفها معناه $f'_m(x)>0$ أي أن $\dfrac{x^2-4x-m+3}{(x-2)^2}>0$ و بما أن $x\in\mathbb{R}-\{2\}: (x-2)^2>0$ و معامل x^2 موجب تماما في البسط نجد أن $\Delta_m>0$ (مميز البسط)

و بالتالي : $(-4)^2-4(-m+3)>0$ أي $4m+4>0$ و منه $m>-1$ إذن $m\in]-1;+\infty[$ حتى تكون الدالة f_m متزايدة تماما على مجال تعريفها .

ت) المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل لأن النقطة ذات الإحداثيات $(1;0)$ تنتمي إلى المنحنيات (C_m) و تنتمي إلى محور الفواصل (xx') .

ث) تبيين أن النقطة $\Omega_m(2;2+m)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_m) :

لدينا من أجل $4-x\in\mathbb{R}-\{2\}$ و $x\in\mathbb{R}-\{2\}$:

$$f(4-x)+f(x)=\frac{(4-x)^2+(m-2)(4-x)+1-m}{4-x-2}+\frac{x^2+(m-2)x+1-m}{x-2}$$
$$f(4-x)+f(x)=-\frac{16+x^2-8x+4m-mx-8+2x+1-m}{x-2}+\frac{x^2+(m-2)x+1-m}{x-2}$$
$$f(4-x)+f(x)=\frac{-16-x^2+8x-4m+mx+8-2x-1+m+x^2+(m-2)x+1-m}{x-2}=\frac{(2m+4)x-4m-8}{x-2}$$
$$f(4-x)+f(x)=\frac{2(m+2)(x-2)}{x-2}$$
$$f(4-x)+f(x)=2(m+2)$$

- من الشكل $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ و بالتالي النقطة $\Omega_m(2;2+m)$ مركز تناظر للمنحنى (C_m) .

إعداد و كتابة : غريب عصام