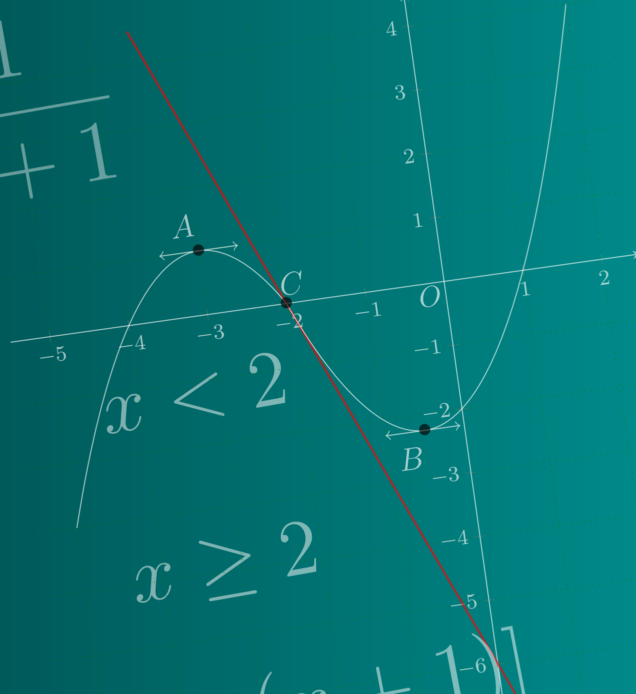
$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\frac{1}{x+1}$$




$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+\alpha & x<2\\ \frac{x^2}{x+1} & x\geq 2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$$

Meziane Maths :

# المجلة الشاملة في الدوال العددية

الأستاذ : مزيان محمد

01 النهايات

02 الإستمرارية

03 الإشتقاقية

04 دراسة الدوال

BAC 2022

**1 المستقيم المقارب العمودي :**

إذا كانت : $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\infty}$ تفسيرها البياني هو :

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $\boxed{x=a}$

**2 المستقيم المقارب الأفقي :**

إذا كانت : $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=a}$ تفسيرها البياني هو :

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $\boxed{y=a}$

**3 المستقيم المقارب المائل :**

إذا كانت : $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty}$ تفسيرها البياني هو

إحتمال أن يقبل $(C_f)$ مستقيم مقارب مائل .

**I** إذا طلب منا إثبات أن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $\infty$ يكفي أن نثبت أن : $\boxed{\lim_{x\to\infty}[f(x)-y]=0}$

**II** إذا طلب منا استنتاج معادلة المستقيم المقارب المائل نلاحظ شكل الدالة $f$ إذا كانت مكتوبة من الشكل $\boxed{f(x)=ax+b+h(x)}$ حيث $\boxed{\lim_{x\to\infty}h(x)=0}$ فإن معادلة المستقيم المقارب المائل هي : $\boxed{y=ax+b}$

**III** إذا طلب منا تعيين معادلة المستقيم المقارب المائل نحسب : $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}}$ فنجد العدد $a$ ثم نحسب $\boxed{\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]}$ فنجد العدد $b$ وتكون بذلك معادلة المستقيم المقارب المائل هي

$$\boxed{y=ax+b}$$

**4 المنحنى المقارب لمنحنى آخر :**

إذا كانت : $\boxed{\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0}$ نقول أن منحنى الدالة $f$ مقارب لمنحنى الدالة $g$ بجوار $\infty$

**5 حالات عدم التعيين :**

$$0\times\infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad +\infty-\infty$$

**طرق إزالة حالات عدم التعيين :**

**6 التحليل والإختزال :** تعتمد على إخراج العامل المشترك في البسط والمقام وإختزاله ثم التعويض وحساب النهاية

مثل : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2-2}}{-2x+1}$

**7 الضرب في المرافق :** تعتمد على الضرب في المرافق والقسمة عليه ثم الحصول على عامل في البسط يساوي عامل في المقام وبعد اختزالها نحسب ماتبقى ، مثل

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$$

**8 العدد المشتق :** نحدد عبارة $f(x)$ ونحسب قيمة $f(a)$ ثم نكتب النهاية المعطاة على الشكل $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وبعد حساب عبارة $f'(x)$ نحسب $f'(a)$ لأنها نتيجة النهاية المعطاة مثل

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$$

**9 لوبيتال :** تطبق هذه الطريقة فقط إذا كنا أمام حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$ وتعتمد على اشتقاق البسط واشتقاق المقام ثم التعويض والحساب مثل $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$

**10 الحصر :** $a$ يمثل عدد حقيقي أو $-\infty$ أو $+\infty$ , إذا كانت الدالة $f$ المعطاة محصورة بين دالتين $g$ و $h$ و $\boxed{\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=\ell}$ فإن $\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=\ell}$

مثل $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{\cos x}{x^2}$ حيث:

$$1-\frac{1}{x^2}\geq 1+\frac{\cos x}{x^2}\geq 1+\frac{1}{x^2}$$

**11 المقارنة :** إذا كانت $\boxed{f(x)\geq g(x)}$ وكانت $\boxed{\lim_{x\to a}g(x)=+\infty}$ فإن $\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=+\infty}$ أو إذا كانت $\boxed{f(x)\leq h(x)}$ و $\boxed{\lim_{x\to a}h(x)=-\infty}$ فإن $\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=-\infty}$ مثل $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}+4$ حيث :

$$x-\sqrt{x}+4\leq 3\sqrt{x}$$

**12 التركيب :** إذا كانت الدالة $f$ مركبة من دالتين $f=u\circ v$ فإننا نحسب أولا $\boxed{\lim_{x\to a}v(x)}$ فنجد $b$ ثم نحسب $\boxed{\lim_{x\to b}u(x)}$ فنجد $c$ نستنتج أن $\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=c}$ مثل $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x+1}{x-2}\right)$

**13 تبديل المتغير :** تعتمد على تبديل عبارات متشابهة بمتغيرجديد ثم حساب النهاية التي تكافئها مثل

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\sin y}{y}$$

## 1 الإستمرارية عند عدد حقيقي :

إذا كانت $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)}$ فإن الدالة $f$ مستمرة عند $a$

## 2 الإستمرارية على اليمين :

إذا كانت $\boxed{\lim\limits_{x\overset{>}{\to} a} f(x)=f(a)}$ فإن الدالة $f$ مستمرة على يمين $a$

## 3 الإستمرارية على اليسار :

إذا كانت $\boxed{\lim\limits_{x\overset{<}{\to} a} f(x)=f(a)}$ فإن الدالة $f$ مستمرة على يسار $a$

## 4 العمليات على الدوال المستمرة :

| العمليات | الإستمرارية |
|---|---|
| $f+g$ | مجموع دالتين مستمرتين هي دالة مستمرة |
| $fg$ | جداء دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة |
| $\frac{f}{g}$ | حاصل قسمة دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة |
| $f\circ g$ | مركب دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة |

## 5 دوال مستمرة :

| الدوال | مجال الإستمرارية |
|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $\mathbb{R}^+$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $\mathbb{R}$ |

## 6 مبرهنة القيم المتوسطة رقم 01 :

إذا كانت الدالة $f$ مستمرة على $]a;b[$ و $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $\boxed{f(x)=k}$ تقبل على الأقل حل في المجال $]a;b[$

- في حالة $k=0$ يمكن أن نبين أن : $\boxed{f(a)\times f(b)<0}$ بدل تبيان أن $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

## 7 مبرهنة القيم المتوسطة رقم 02 :

إذا كانت الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على $]a;b[$ و $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $\boxed{f(x)=k}$ تقبل حل وحيد $\alpha$ على $]a;b[$ أي $\boxed{f(\alpha)=k}$

- في حالة $k=0$ يمكن أن نبين أن : $\boxed{f(a)\times f(b)<0}$ بدل تبيان أن $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

## 8 طريقة التنصيف لحصر الحل :

إذا كانت المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ تقبل حل وحيد $\alpha$ ينتمي إلى $]a;b[$ فإنه يمكن تصغير سعة الحصر كمايلي

- إذا كان $\boxed{f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0}$ فإن : $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$ وهذا الحصر سعته $\frac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ للحصول على حصر أصغر للعدد $\alpha$
- إذا كان $\boxed{f(b)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0}$ فإن : $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$ وهذا الحصر سعته $\frac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$ للحصول على حصر أصغر للعدد $\alpha$

## 9 صورة المجال :

| المجال | $f$ متزايدة | $f$ متناقصة |
|---|---|---|
| $[a,b]$ | $[f(a),f(b)]$ | $[f(b),f(a)]$ |
| $[a,b[$ | $[f(a),\lim\limits_{x\to b}f(x)[$ | $]\lim\limits_{x\to b}f(x),f(a)]$ |
| $]a,b]$ | $]\lim\limits_{x\to a}f(x),f(b)]$ | $[f(b),\lim\limits_{x\to a}f(x)[$ |
| $]a,b[$ | $]\lim\limits_{x\to a}f(x),\lim\limits_{x\to b}f(x)[$ | $]\lim\limits_{x\to b}f(x),\lim\limits_{x\to a}f(x)[$ |

## 1 قابلية الإشتقاق عند عدد حقيقي :

إذا كانت : $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l}$ أو $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=l}$ فإن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عند العدد $a$ والعدد الحقيقي $l$ يسمى العدد المشتق (ميل المماس ، معامل توجيه المماس )

## 2 قابلية الإشتقاق على اليمين :

إذا كانت $\boxed{\lim\limits_{x\overset{>}{\to} a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l_D}$ فإن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عند العدد $a$ على اليمين

## 3 قابلية الإشتقاق على اليسار :

إذا كانت $\boxed{\lim\limits_{x\overset{<}{\to} a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l_G}$ فإن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عند العدد $a$ على اليسار

## 4 الإشتقاقية والإستمرارية :

إذا كانت الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عند العدد $a$ فإنها مستمرة عند $a$

## 5 معادلة المماس :

إذا كانت الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عند $a$ فإن منحناها البياني يقبل مماس معادلته الديكارتية $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$ حيث $\boxed{f'(a)=l}$

## 6 نقطة زاوية :

إذا كانت الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $a$ حيث $\boxed{l_D\neq l_G}$ فإن منحناها البياني يقبل نصف مماس على اليمين معامل توجيهه $l_D$ ونصف مماس على اليسار معامل توجيهه $l_G$ والنقطة $A(a;f(a))$ تسمى نقطة زاوية

## 7 نقطة الإنعطاف :

إذا كانت $\boxed{f'(a)=0}$ و $f'(x)$ لا تغير اشارتها عند $a$ أو إذا كانت $\boxed{f''(a)=0}$ و $f''(x)$ تغير اشارتها عند $a$ أو المماس $(T)$ يخترق المنحنى $(C_f)$ عند $a$ فإن النقطة $A(a;f(a))$ تسمى نقطة إنعطاف

## 8 المماس الموازي لمحور التراتيب :

إذا كانت $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty}$ فإن الدالة $f$ غير قابلة للإشتقاق عند $a$ ومنحناها البياني يقبل نصف مماس عمودي موازي لمحور التراتيب معادلته $\boxed{x=a}$

## 9 المماس الموازي لمحور الفواصل :

إذا كانت $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0}$ فإن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عند $a$ ومنحناها البياني يقبل مماس أفقي موازي لمحور الفواصل معادلته $\boxed{y=f(a)}$

## 10 مشتقات الدوال المرجعية :

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|
| $a$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $ax+b$ | $a$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^2$ | $2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |

## 11 العمليات على المشتقات :

| الدالة المشتقة | العمليات | |
|---|---|---|
| $u'+v'$ | $u+v$ | مجموع دالتين |
| $ku'$ | $ku$ | ضرب دالة بعدد حقيقي |
| $u'v+v'u$ | $uv$ | جداء دالتين |
| $-\dfrac{u'}{u^2}$ | $\dfrac{1}{u}$ | مقلوب دالة |
| $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ | $\dfrac{u}{v}$ | حاصل قسمة دالتين |

## 12 مشتقات الدوال المركبة :

| الدالة المشتقة | الدالة | |
|---|---|---|
| $a\times u'(ax+b)$ | $u(ax+b)$ | |
| $v'(x)\times u'(v(x))$ | $u(x)\circ v(x)$ | |
| $\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ | $\sqrt{u(x)}$ | $u(x)>0$ |
| $nu'(x)u^{n-1}(x)$ | $u^n(x)$ | $n\in\mathbb{N}^*$ |
| $\dfrac{-nu'(x)}{u^{n+1}(x)}$ | $\dfrac{1}{u^n(x)}$ | $n\in\mathbb{N}^*$ |
| $-u'(x)\sin u(x)$ | $\cos u(x)$ | |
| $u'(x)\cos u(x)$ | $\sin u(x)$ | |

**1 الدالة الزوجية :** إذا كانت $\boxed{f(-x)=f(x)}$ نقول أن الدالة $f$ زوجية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

**2 الدالة الفردية :** إذا كانت $\boxed{f(-x)=-f(x)}$ نقول أن الدالة $f$ فردية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمركز المعلم.

**3 الدالة الدورية :** إذا كانت $\boxed{f(x+p)=f(x)}$ نقول أن الدالة $f$ دورية وتمثيلها البياني يعيد نفسه عند كل مجال طوله $p$ .

**4 مركز التناظر :** إذا كانت $\boxed{f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta}$ نقول أن التمثيل البياني لدالة $f$ يقبل مركز تناظر هو النقطة $A(\alpha;\beta)$.

**5 محور التناظر :** إذا كانت $\boxed{f(2\alpha-x)-f(x)=0}$ نقول أن التمثيل البياني لدالة يقبل محور تناظر هو المستقيم ذو المعادلة $x=\alpha$.

**6 التقاطع مع محور الفواصل :** لتعيين نقط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل نحل المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ و نجد فواصل هذه النقط مع العلم أن ترتيباتها معدومة.

**7 التقاطع مع محور التراتيب :** لتعيين نقط تقاطع $(C_f)$ مع محور التراتيب نحسب $\boxed{f(0)}$ ونجد ترتيبات هذه النقط مع العلم أن فواصلها معدومة.

**8 استنتاج تمثيل بياني من آخر :**

❶ إذا كانت $\boxed{h(x)=|f(x)|}$ فإن $(C_h)$ منطبق على $(C_f)$ لما يكون $(C_f)$ فوق محور الفواصل.
و $(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون $(C_f)$ تحت محور الفواصل.

❷ إذا كانت $\boxed{h(x)=f(|x|)}$ فإن $(c_h)$ منطبق على $(C_f)$ لما يكون $x>0$ .
و $(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لمحور التراتيب لما يكون $x<0$.

❸ إذا كانت $\boxed{h(x)=-f(x)}$ فإن $(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل .

❹ إذا كانت $\boxed{h(x)=f(-x)}$ فإن $(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لمحور التراتيب .

❺ إذا كانت $\boxed{h(x)=f(x+a)+b}$ فإن $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-a\vec{i}+b\vec{j})$.

❻ إذا كانت $\boxed{h(x)=-f(-x)}$ فإن $(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لمركز المعلم .

**9 الوضعية النسبية :** لمعرفة الوضع النسبي لـ $(C_f)$ بالنسبة لمسقيم $(\Delta)$ ندرس إشارة الفرق $\boxed{f(x)-y}$

- ✍ إذا كان الفرق سالب نقول أن $(C_f)$ تحت $(\Delta)$.
- ✍ إذا كان الفرق موجب نقول أن $(C_f)$ فوق $(\Delta)$.
- ✍ إذا كان الفرق معدوم نقول أن $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$.

**10 المناقشة البيانية :**

نحاول أن نكتب المعادلة على إحدى هذه الأشكال :

❶ المعادلة من الشكل $\boxed{f(x)=m}$ أو $\boxed{f(x)=f(m)}$ فإن المناقشة تكون أفقية موازية لمحور الفواصل .

❷ المعادلة من الشكل $\boxed{f(x)=ax+m}$ أو $\boxed{f(x)=ax+f(m)}$ حيث $a$ ثابت و $m$ وسيط حقيقي فإن المناقشة تكون مائلة موازية للمستقيم ذو المعادلة $y=ax$ .

❸ المعادلة من الشكل $\boxed{f(x)=mx+b}$ أو $\boxed{f(x)=f(m)x+b}$ حيث $b$ ثابت و $m$ وسيط حقيقي فإن المناقشة تكون دورانية حول النقطة $A(0;b)$.

**11 دراسة تغيرات الدالة :**

تتضمن دراسة تغيرات الدالة ما يلي :

- ✍ حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف .
- ✍ حساب الدالة المشتقة .
- ✍ تعيين إشارة الدالة المشتقة .
- ✍ تعيين إتجاه تغير الدالة من إشارة المشتقة .

**12 التقريب التآلفي :**

أحسن تقريب تآلفي لدالة $f$ بجوار $x_0$ هو :

$$\boxed{f(x)\approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$$

لحساب قيمة تقريبية لـ $f(x_0+h)$ نحسب :

$$\boxed{f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)}$$

بالتوفيق و النجاح إن شاء الله في بكالوريا 2022

## تمرين رقم -1- : Meziane Maths

أحسب النهايات التالية :

1. $\lim_{x\to-\infty} x^3+2x^2-1$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{x^3+x+1}$
3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{5-x^2}{2x^2-x}$
4. $\lim_{x\to+\infty} x^4-6x^2+5$

## تمرين رقم -2- : Meziane Maths

أحسب النهايات التالية :

1. $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$
2. $\lim_{x\to2} \frac{x^4-16}{x^3-8}$
3. $\lim_{x\to+\infty} 2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

## تمرين رقم -3- : Meziane Maths

أحسب النهايات التالية :

1. $\lim_{x\to2} \frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}$
4. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

## تمرين رقم -4- : Meziane Maths

أحسب النهايات التالية :

1. $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
2. $\lim_{x\to0} \frac{\cos x-1}{x}$
3. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
4. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$

## تمرين رقم -5- : Meziane Maths

أحسب النهايات التالية :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+x}-\sqrt{x}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$
4. $\lim_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

## تمرين رقم -6- : Meziane Maths

أحسب النهايات التالية :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x}+1}$
2. $\lim_{x\to-\infty} x+\sin x$
3. $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}+4$
4. $\lim_{x\to-\infty} 3x+\frac{\cos x}{x+1}$

## تمرين رقم -7- : Meziane Maths

أحسب النهايات التالية :

1. $\lim_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{\pi x+2}{2x+3}\right)$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$
4. $\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan^2 x+1}$

## تمرين رقم -8- : Meziane Maths

أحسب نهايات الدوال التالية عند أطراف مجموعة تعريفها وفسرها هندسيا.

1. $f(x)=2x+3-\frac{5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$
2. $g(x)=|x-5|-\frac{\sqrt{x}}{x}$
3. $h(x)=\frac{\sin x}{x}$
4. $k(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

## تمرين رقم -9- : Meziane Maths

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية:

1. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
2. $\lim_{x\to0} \frac{1-cosx}{x}$
3. $\lim_{x\to3} \frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$
4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{sin3x}{2cosx-1}$
5. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tanx-1}{2cosx-\sqrt{2}}$
6. $\lim_{x\to0^+} \frac{sinx}{\sqrt{1-cosx}}$

## تمرين رقم -10- : Meziane Maths

أحسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة :

1. $\lim_{x\to2} \frac{x^3-8}{x^2-3x+2}$
2. $\lim_{x\to-1} \frac{x^2-x+2}{x^3-3x^2-x+3}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-2}{4x+3}}$
4. $\lim_{x\to+\infty} (x-2\sqrt{x})$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

## تمرين رقم -11- : Meziane Maths

أحسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة :

1. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-2x)$

2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$

3. $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2021}-1}{x-1}$

6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{cosx}{x-\frac{\pi}{2}}$

7. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2sinx-1}{6x-\pi}$

## تمرين رقم -12- : Meziane Maths

في كل حالة من الحالات التالية عين اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة $f$ ثم أحسب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف وعين معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة $f$

1. $f(x)=\dfrac{-x^2+4x}{x^2-4x+3}$

2. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$

3. $f(x)=2x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

4. $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$

5. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

6. $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$

7. $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

8. $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$

## تمرين رقم -13- : Meziane Maths

بيّن أن المعادلة : $x^5-3x^4+x^2-1=0$ لها على الأقل حلاً في المجال $[0;3]$ .

## تمرين رقم -14- : Meziane Maths

بيّن أن المعادلة: $-x^3+x+1=0$ تقبل حلًا وحيدًا في المجال $[1;2]$ .

## تمرين رقم -15- : Meziane Maths

بيّن أن المعادلة: $\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{2}\cos x$ تقبل على الأقل حلًا في المجال $[2\pi;3\pi]$ .

## تمرين رقم -16- : Meziane Maths

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بـ : $f(x)=\tan x-x-1$

1. بيّن أن $f$ دالة مستمرة على المجال $[0;\frac{\pi}{2}[$ .
2. بيّن أن $f$ دالة متزايدة تمامًا على المجال $[0;\frac{\pi}{2}[$ .
3. حدد صورة المجال $[0;\frac{\pi}{2}[$ بالدالة $f$ .
4. استنتج أنه يوجد عدد وحيد $\alpha$ من المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$ حيث : $\tan\alpha=\alpha+1$ .

## تمرين رقم -17- : Meziane Maths

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي :
$f(x)=x^3+3x+8$

1. أُدرس تغيرات الدالة $f$.
2. بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلًا وحيدا $\alpha$ حيث :
$-1.52<\alpha<-1.51$
3. عين اشارة $f(x)$ حسب قيم $x$ .

## تمرين رقم -18- : Meziane Maths

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي :
$f(x)=\cos^3 x-3\cos x+2$

1. أُدرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $[0;\pi]$ .
2. استنتج أنّه يوجد $\alpha$ وحيد من المجال $[0;\pi]$ حيث $f(\alpha)=\sqrt{2}$ .

## تمرين رقم -19- : Meziane Maths

نعتبر $f$ دالة عددية مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث :
$f([0;1])=[0;1]$ نضع من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $[0;1]$
$g(x)=f(x)-x$ .

1. بيّن أن : $g(0)g(1)\leq 0$ .
2. استنتج أنه يوجد $\alpha$ من المجال $[0;1]$ حيث $f(\alpha)=\alpha$.

## تمرين رقم -20- : Meziane Maths

لتكن $f$ دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $[0;1]$ : $1<f(x)\leq 2$ ، ولتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي : $g(x)=xf(x)-1$.

1. بيّن أن الدالة $g$ مستمرة على المجال $[0;1]$ .
2. حدّد اشارة كل من $g(0)$ وَ $g(1)$ .
3. استنتج أنه يوجد عدد $c$ من المجال $]0;1[$ حيث : $f(c)=\dfrac{1}{c}$ .

## تمرين رقم -21- : Meziane Maths

لتكن $f$ دالة عددية مستمرة على المجال $[0;1]$ . نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $[0;1]$ بما يلي : $g(x)=x(x-1)f(x)-2x+1$

1. بيّن أن الدالة $g$ مستمرة على المجال $[0;1]$ .
2. أحسب $g(0)g(1)$ .
3. استنتج أنه يوجد $\alpha$ من المجال $]0;1[$ حيث : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha-1}$.

## تمرين رقم –22– : Meziane Maths

ليكن $p$ و $q$ عددين من $\mathbb{R}_+^*$ ولتكن $f$ دالة عددية مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث : $f(0) \neq f(1)$ . نعتبر الدالة العددية $g$ والمعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي : $g(x) = f(x) - \dfrac{pf(0)+qf(1)}{p+q}$

1. بيّن أن الدالة $g$ مستمرة على المجال $[0;1]$ .
2. حدّد إشارة الجداء $g(0)g(1)$ .
3. بيّن أنه يوجد $c$ من المجال $]0;1[$ حيث : $f(c) = \dfrac{pf(0)+qf(1)}{p+q}$

## تمرين رقم –23– : Meziane Maths

1. بيّن أن المعادلة : $x^3+x-1=0$ تقبل حلًا وحيدًا $\alpha$ ينتمي إلى المجال $]0;1[$ .
2. حدد حصراً للعدد $\alpha$ سعته $0.25$ .
3. بيّن أن المعادلة : $x^3-6x^2+6=0$ تقبل حلًا وحيدًا $\beta$ ينتمي إلى المجال $[0;4]$
4. حدد حصراً للعدد $\beta$ سعته $0.5$ .

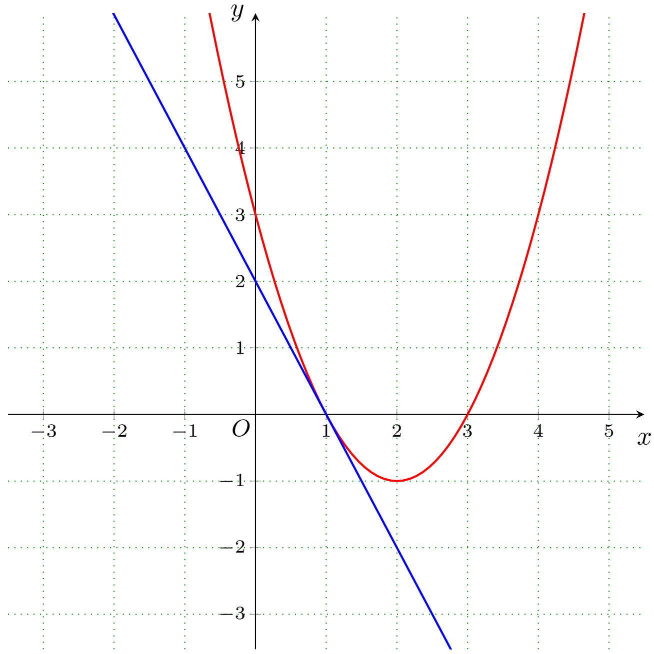
## تمرين رقم –24– : Meziane Maths

في كل حالة ،أُدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند القيمة $a$ ،وفسّر النتيجة المحصل عليها بيانيًا.

1. $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ ، $a=1$ من اليمين.
2. $f(x) = x^2-1+|x-2|$ ، $a=2$ .
3. $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} \,;\, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ , $a=0$ .

## تمرين رقم –25– : Meziane Maths

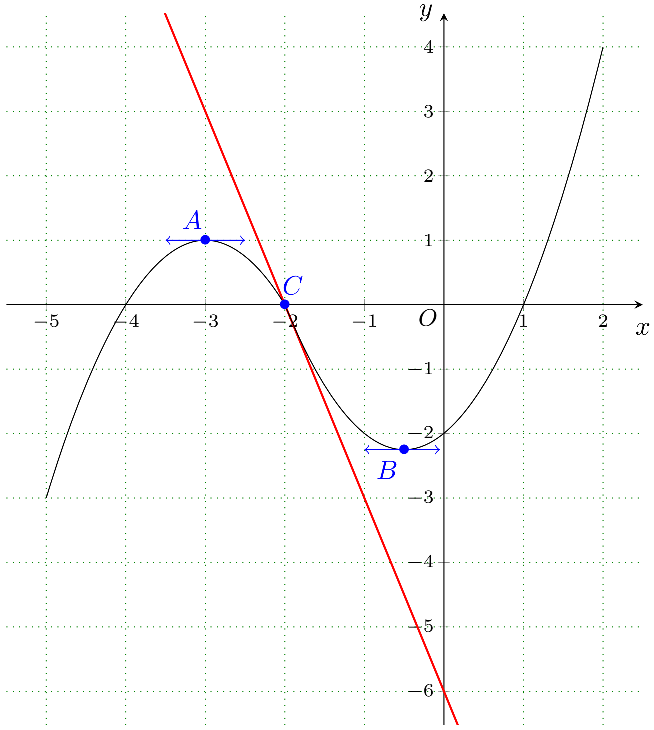
المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ . نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = ax^2+bx+c$ حيث $a,b,c$ أعداد حقيقية. $(C_f)$ تمثيلها البياني في الشكل المقابل .



1. بقراءة بيانية أُحسب كلًا من : $f(1)$ ، $f(2)$ و $f'(1)$.
2. باستعمال النتائج السابقة عيّن $a,b,c$ .

## تمرين رقم –26– : Meziane Maths

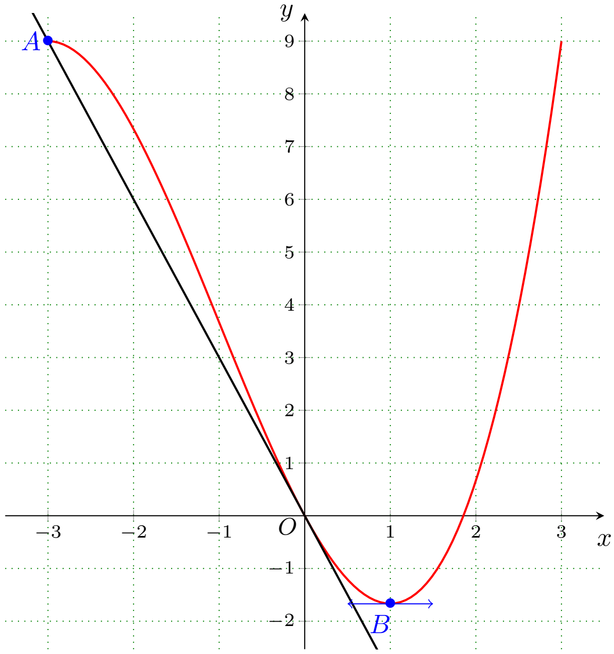
المنحنى $(C_f)$ التالي هو لدالة $f$ قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.



1. عيّن مجموعة تعريف الدالة $f$ .
2. بقراءة بيانية عيّن العدد المشتق للدالة $f$ عند كل من $-3$ ، $\dfrac{-1}{2}$ و $-2$ علمًا أن ترتيب النقطة $B$ هو $-\dfrac{9}{4}$.
3. استنتج معادلات المماسات للمنحنى $(C_f)$ عند $A$ ، $B$ و $C$ .
4. هل توجد مماسات أخرى للمنحنى $(C_f)$ موازية لمماسه عند النقطة $C$ ؟

## تمرين رقم –27– : Meziane Maths

الشكل الموالي هو التمثيل البياني $(C_f)$ لدالة $f$ معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .



المنحنى $(C_f)$ يحقق الشروط التالية :
يمر بمبدأ المعلم $O$، ويشمل النقطة $A(-3;9)$، يقبل في النقطة $B$ التي فاصلتها 1 مماسًا أفقيًا ويقبل المستقيم $(OA)$ كمماس له.

1. ماهو معامل توجيه المستقيم $(OA)$ ؟

2. نفرض أن $f$ معرفة على $[-3;3]$ بـ: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، حيث $a$ ، $b$ , $c$ , و $d$ أعداد حقيقية.
   ا) بيّن باستعمال الشروط السابقة أنّ :
   $a=\dfrac{1}{3}, b=1, c=-3, d=0$ .
   ب) حلّل $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة $f$ .

## تمرين رقم -28- : Meziane Maths

الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{|x|}{x+1}$ , وليكن $(C_f)$ منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1. أُدرس استمرارية الدالة $f$ عند القيمة 0.
2. أُدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند القيمة 0 وفسّر النتيجة بيانيًا وأُكتب معادلتي نصفي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 وماذا تسمى هذه النقطة.
3. أُحسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها وفسّر النتائج بيانيا .
4. أُدرس اتجاه تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها.
5. ارسم $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ و المنحنى $(C_f)$ .

## تمرين رقم -29- : Meziane Maths

$f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$ وليكن $(C_f)$ منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1. عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث يكون للمنحنى $(C_f)$ مستقيم معادلته : $y=x-3$ و $f$ تقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.
2. أُدرس تغيرات الدالة $f$ .
3. أثبت أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسين $(D_1)$ و $(D_2)$ معامل توجيه كل منهما $-3$ ، يطلب إعطاء احداثيات نقطتي التماس $M_1$ و $M_2$ ومعادلتي المماسين $(D_1)$ و $(D_2)$ .
4. أُرسم بدقة المماسين $(D_1)$ و $(D_2)$ ثم المنحنى $(C_f)$.
5. ناقش بيانيًا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد نقاط تقاطع المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta_m)$ الذي معادلته $y=-3x+m$ .

## تمرين رقم -30- : Meziane Maths

$f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+2\sqrt{|x|}$ وليكن $(C_f)$ منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أُدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند القيمة 0 وفسّر النتيجة بيانيا وماذا تسمى النقطة ذات الفاصلة 0 .
2. أُحسب نهايات الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$ .
3. بيّن أن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ثم أُحسب $f'(x)$ ثم أُدرس اتجاه تغير الدالة $f$.
4. شكل جدول تغيرات الدالة $f$.
5. عيّن احداثيات نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.
6. أُرسم المنحنى $(C_f)$ في المجال $[-9;4]$ .

## تمرين رقم -31- : Meziane Maths

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\dfrac{1}{x+1}$.
وليكن $(C_f)$ المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس .

1. أُدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة $f$ عند القيمة $x_0=-2$ ثم فسّر النتيجة بيانيًا.
2. أُدرس تغيرات الدالة $f$.
3. أُحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)]$ وفسّر النتائج بيانيًا.
4. عيّن عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ثم احسب فاصلة نقطة تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محور الفواصل.
5. أُرسم بدقة المنحنى $(C_f)$ وبصفة خاصة نصفي المماسين عند النقطة الزاوية.

## تمرين رقم -32- : Meziane Maths

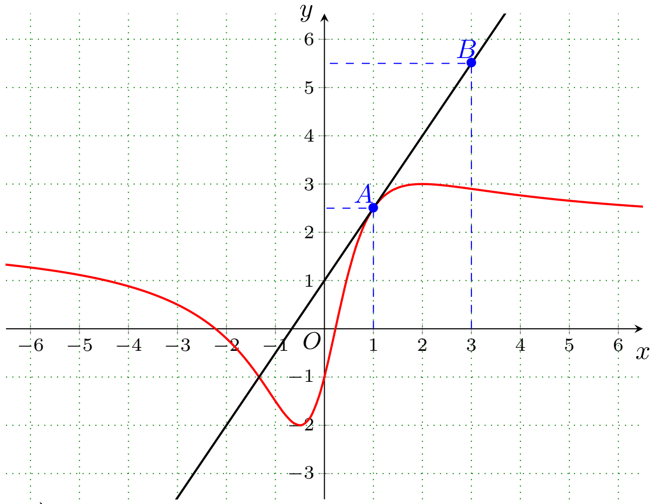
$f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-x+\alpha & x<2\\ \dfrac{x^2}{x+1} & x\geq 2\end{cases}$$
حيث $\alpha$ عدد حقيقي.
وليكن $f$ المنحنى البياني الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس.

1. اوجد العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون الدالة $f$ مستمرة عند القيمة 2 . نفرض في كل مما يلي : $\alpha=\dfrac{2}{3}$ .
2. أُدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة عند القيمة 2 ثم فسّر النتيجة بيانيًا. ثم أُدرس تغيرات الدالة $f$.
3. بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلته. .
   أرسم $(C_f)$ .

## تمرين رقم –33– : Meziane Maths

المنحنى البياني الممثل للدالة $f$ المعرفة بالعبارة $(C_f)$ :

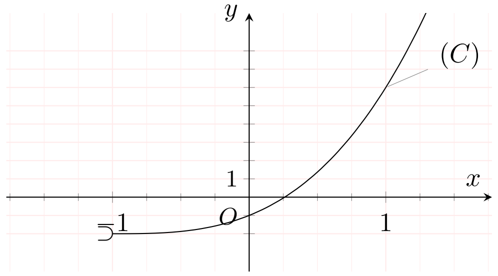
$$f(x) = a + \frac{bx}{x^2+1} + \frac{c}{x^2+1}$$




- عيّن الأعداد الحقيقية $a, b, c$ علمًا أن المماس عند النقطة $A\left(1;\frac{5}{2}\right)$ يشمل النقطة $B\left(3;\frac{11}{2}\right)$ والمماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 يوازي حامل محور الفواصل.

## تمرين رقم –34– : Meziane Maths

المنحنى $(C)$ المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي: $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$




1. (ا) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة $g$ وحدد $g(0)$ و إشارة $g(\frac{1}{2})$ .

(ب) على وجود عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha) = 0$ .

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$ .

2. $f$ هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي: $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ وليكن $(\Gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ .

(ا) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^3}$

(ب) عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا .

(ج) أُحسب: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x+1)]$ وفسر النتيجتين بيانيا .

(د) شكل جدول تغيرات الدالة $f$

3. نأخذ $\alpha \simeq 0.26$ ، عين مدور $f(\alpha)$ إلى $10^{-2}$.

4. أُرسم المنحنى $(\Gamma)$

## تمرين رقم –35– : Meziane Maths

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2-8x+16}{x-3}$ وليكن $(C)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. عين الأعداد حقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حيث من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{3\}$ : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$

2. أحسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة التعريف، ثم فسر النتائج هندسيا .

3. أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

4. بين أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته : $y = x - 5$ مقارب مائل لـ $(C_f)$

5. أدرس الوضعية النسبية بين $(C_f)$ و $(\Delta)$.

6. أحسب $f(6-x) + f(x)$ , ماذا تستنتج ؟

7. أرسم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$.

8. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة : $f(x) = m$.

## تمرين رقم –36– : Meziane Maths

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$ المنحنى البياني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(C_f)$

1. (ا) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(ب) أحسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)$ , $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ , $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ , ثم فسر النتائج هندسيا

2. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3. أكتب معادلة للماس $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة .

4. (ا) بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ فإن : $f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2-1}$ .

(ب) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له .

(ج) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ مع المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$.

5. بين أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$

6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-1,1[$ يطلب إيجاد حصر ل $\alpha$ سعته $10^{-1}$

7. أنشئ $(\triangle)$ و $(C_f)$ .

## تمرين رقم –37– : Meziane Maths

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=|x+1|-\dfrac{4}{x-1}$
$(C_f)$ منحناها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها
2. أكتب عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة
3. أحسب $f'(x)$ وأدرس اشارتها , ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .
4. بين ان المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين $(\triangle)$ و $(\triangle')$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب
5. أدرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\triangle)$ على المجال $]1;+\infty[$ و $(\triangle')$ على المجال $]-\infty;-1[$.

(ا) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ , ماذا تستنتج ؟

(ب) أعط تفسيرا لهذه النتيجة .

(ج) أكتب معادلتي نصفي المماسين $(T_1)$ و $(T_2)$ ل $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$ .

7. أنشئ كلا من $(C_f)$ , $(\triangle)$ , $(\triangle')$ ونصفي المماسين
8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ حلول المعادلة : $f(x)=m+1$ .

## تمرين رقم –38– : Meziane Maths

$f$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$
و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. شكل جدول تغيرات الدالة $f$
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x-1]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x+3]$ وماذا تستنتج ؟
3. بين أن النّقطة $\omega(\frac{1}{2},\frac{-1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ .
4. أثبت أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما هو $\frac{5}{2}$ , ثم جد معادلتيهما .
5. بين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{5}{8}$
6. أنشئ $(C_f)$ ثم استنتج اشارة $f(x)$ حسب قيم $x$ .
7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $t$ وجود وعدد وإشارة حلول المعادلة : $2x-1-(t+1)\sqrt{x^2-x+1}=0$

## تمرين رقم –39– : Meziane Maths

I) لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي :
$f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$ وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=ax+b+\dfrac{cx}{x^2-1}$ حيث $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
2) أدرس تغيرات $f$ ثم عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(C)$
3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[\frac{-4}{5};\frac{-1}{2}]$
4) أرسم بعناية المستقيمات المقاربة والمنحنى $(C)$
5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^3-(m+1)x^2+m+1=0$

II) لتكن الدالة $h$ المعرفة بـ : $h(x)=\dfrac{|x|-x^2+1}{x^2-1}$
1) أثبت أن الدالة $h$ زوجية.
2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ فإن $h(x)=f(x)$
3) إستنتج مما سبق إنشاء المنحنى $(C')$ الممثل للدالة $h$ في نفس المعلم

## تمرين رقم –40– : Meziane Maths

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$، نعتبر المنحنى $(C)$ الذي معادلته : $x(x^2+y^2)+y^2-3x^2=0$

1) نفرض الدالة $f$ المعرفة على $]-1;3]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x+1}}$
✍ بين أن المنحنى $(C)$ هو إتحاد المنحنين $(C_1)$ و $(C_2)$ الممثلين للدالتين $f$ و $-f$ على الترتيب.
2) -أ- عين كلا من : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}$ ماذا تستنتج ؟
-ب- فسر النتائج هندسيا
3) أحسب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ، ماذا تستنتج؟
4) -أ- بين أنه من أجل كل $x\in]-1;0[\cup]0;3[$ يكون : $f'(x)=\dfrac{3x-x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$
-ب- إستنتج إشارة $f'(x)$
-جـ- أحسب : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
-د- شكل جدول تغيرات الدالة $f$.
5) أنشئ $(C_1)$، ثم أكمل إنشاء المنحنى $(C)$.

## تمرين رقم –41– : Meziane Maths

I) ليكن كثير الحدود : $g(x)=x^3-3x+2$
1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $g(x)=(x-1)(x^2+x-2)$
2) أدرس إشارة كثير الحدود $h(x)$ حيث : $h(x)=xg(x)$.

II) لتكن الدالة $f$ ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :
$f(x)=\dfrac{x^3+x^2+3x-1}{x^2}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$
1) بين أنه من أجل كل عدد $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^4}$

2) أدرس تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل يطلب تعيين معادلتهما.

4) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

5) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $\frac{1}{4} \prec \alpha \prec \frac{1}{2}$

6) أرسم المنحنـــى $(C_f)$

## تمرين رقم -42- : Meziane Maths

$f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$ و $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أدرس تغيرات الدالة $f$.

2) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية $\alpha$ ، $\beta$ ، $\gamma$ بحيث يكون من أجل $x\in D_f$:
$$f(x)=\alpha x+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

3) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيم مائل يطلب تعيين معادلته.

4) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

5) أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.

6) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(\Delta)$ معامل توجيهه 1 ، و أكتب معادلة له.

7) أنشيء المماس $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$.

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

## تمرين رقم -43- : Meziane Maths

لتكن الدالة $f$ المعرفة بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-2x+1$، وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) برر ان الدالة $f$ معرفة من أجل كل عدد حقيقي $x$ .

2) أحسب الدالة المشتقة للدالة $f$.

✍ بين أنه من أجل $x\prec 0$ لدينا : $f'(x)\prec 0$.

✍ بين أنه من أجل $x\succeq 0$ لدينا : $f'(x)\prec 0$

3) بين أنه من أجل كل $x\prec 0$ لدينا : $f(x)+3x-1=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$،

✍ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x-1]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

4) بين أنه من أجل كل $x\succ 0$ لدينا : $f(x)+x-1=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$،

✍ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x-1]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5) أرسم $(C_f)$

## تمرين رقم -44- : Meziane Maths

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=x+\sqrt{x^2-2x} & ; x\preceq 0\\ f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{x^2} & ; x\succ 0\end{cases}$$
وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا عند $-\infty$

2) -أ- أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)}{x}$ . ماذا يمكن القول بالنسبة للدالة $f$ ؟ ومالتفسير الهندسي للنتيجة ؟

- ب - بين انه من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ تكون : $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-2x}\times\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)}$،

ومن اجل كل $x\in]0;+\infty[$ تكــــون : $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$

- جـ - شكل جدول تغيرات الدالة $f$

3) - أ - بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x-3$ مقارب للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$.

- ب - أدرس وضعية المنحنى $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

4) بين أن المنحنى $(C)$ يقبل نقطة انعطاف $\Omega$ يطلب تعين إحداثياها.

5) أنشـــــئ المستقيمات المقاربة والمنحنى $(C)$.

## تمرين رقم -45- : Meziane Maths

لتكن الدالة $f$ المعرفة بـ : $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$، وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) عين $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$

2) أدرس قابلية الإشتقاق للدالة $f$ عند القيمتين $x_0=-1$ و $x_0=5$

3) أدرس تغيرات الدالة $f$

4) برهن أن $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

5) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيمين المقاربين.

6) برهن أن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ $(C_f)$

7) أرسم $(C_f)$ و المستقيمات المقاربة.

8) عين مجموعة تعريف الدالة $h$ المعرفة بـ : $h(x)=\sqrt{x^2-4|x|-5}$

9) بين أن الدالة $h$ زوجية وأرسم منحناها البياني في المعلم السابـــــــــق.

## تمرين رقم -46- : Meziane Maths

لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة كما يلي :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-cosx}{sinx} & ;\ x\in]-\pi;0[\cup]0;\pi[\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$$ ،

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أثبت أن الدالة $f$ مستمرة عند $x_0=0$

2) أثبت أن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق من أجل القيمة $x_0=0$

3) بين أن الدالة $f$ فردية، ثم أدرس تغيراتها.

4) أثبت أن مبدأ المعلم هو نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$

5) عين إحداثيات النقطة $A$ التي يكون فيها المماس للمنحنى $(C_f)$ موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y=x$

6) لتكن $h$ الدالة العددية المعرفة على $]0;\pi[$ : $h(x)=f(x)-x$

✍ أثبت أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث :
$$\frac{3\pi}{4}\prec\alpha\prec\frac{7\pi}{8}$$

✍ ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة؟

7) أرسم المنحنى $(C_f)$ باستعمال النتائج السابقــــــــــة.

## تمرين رقم -47- : Meziane Maths

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=|x-2|+\dfrac{1}{x-1}$، وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أدرس استمرارية وقابلية الإشتقاق عند القيمة $x_0=2$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) أدرس تغيرات الدالة $f$ وأكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(C_f)$

3) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]0;\frac{1}{2}[$.

4) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2-x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]$

5) أرسم المنحنى $(C_f)$ والمستقيمات المقاربة.

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة :

$$|x-2|+\frac{1-m(x-1)}{x-1}=0$$

7) $g$ دالة معرفة كما يلي : $g(x)=\left||x|-2\right|+\dfrac{1}{|x|-1}$

✍ بين أن الدالة $g$ زوجية

✍ بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ : $f(x)=g(x)$

✍ إستنتج مما سبق التمثيل البياني للدالة $g$ و أنشئه في نفس المعلم .

## تمرين رقم -48- : Meziane Maths

$f$ دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أدرس تغيرات الدالة $f$

2) -أ- بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما $(D)$ معادلته $y=x$

-ب- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ و $(D)$

3) -أ- بين أن $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ حيث $1.3 \prec x_0 \prec 1.4$

-ب- عين معادلة $(\Delta)$ مماسا للمنحنى $(C_f)$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

-ج- أرسم $(\Delta)$ و $(C_f)$ في نفس المعلم

4) $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=|f(x)|$، $(C_g)$ منحنى الدالة $g$ في المعلم السابق.

✍ بين كيف يمكن إنشاء $(C_g)$ إنطلاقا من $(C_f)$، ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة الحلول المعادلة ذات المجهول $x$ : $g(x)=m^2$ .

## تمرين رقم -49- : Meziane Maths

$f$ دالة معرفة على $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ بـــ : $f(x)=x\times tanx$.

1) أدرس شفعية الدالة $f$.

2) أحسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها.

3) بين أنه من أجل كل $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ تكون : $f'(x)=\dfrac{2x+sin2x}{2cos^2x}$

4) - أ - نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ كما يلي : $g(x)=2x+sin2x$

✍ أدرس تغيرات الدالة $g$ على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

- ب - إستنتج تغيرات الدالة $f$ على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

5) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ على المجال $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

6) أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند ذات الفاصلة $\dfrac{\pi}{4}$

7) - أ - أنشيء $(T)$ والمنحنى $(C_f)$.

- ب - ماهو عدد حلول المعادلة $(E)$ ، حيث :

$$tanx=\frac{1}{x} \qquad (E).$$

## تمرين رقم -50- : Meziane Maths

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\sin 3x-3\sin x$ , وليكن $(C_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1. بين ان الدالة $f$ دورية ودورها $2\pi$ .

2. أدرس شفعية الدالة $f$ , ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $(C_f)$ ؟

3. (ا) قارن بين $f(x)$ و $f(\pi-x)$ , فسر النتيجة هندسيا

(ب) استنتج مماسبق مجالا لدراسة الدالة $f$ .

4. بيّن انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ تكون :

$$f'(x)=-6\sin x\times\sin 2x$$

5. أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ , ثم شكل جدول تغيراتها .

6. أنشئ المنحنى $(C_f)$ على المجال $[-2\pi;2\pi]$.

## تمرين رقم -51- : Meziane Maths

**الجزء الأول :**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=x-\sqrt{1+x^2}$.

وليكن $(C_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. (ا) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ , ثم فسر النتيجة هندسيا .

(ب) بيّن أن المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$ .

2. (ا) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون :

$\sqrt{1+x^2}-x>0$ .

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

(ج) أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $0$ .

3. (ا) أنشئ المماس $(T)$ والمنحنى $(C_f)$ .

(ب) حل بيانيا المتراجحة : $f(x)>2x-1$ .

(ج) تحقق أنه من أجل كل $x>0$ يكون :

$$x\left(1+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=1+f(x).$$

## الجزء الثاني :

لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ بـ :

$$\begin{cases} g(x)=\tan x-\sqrt{1+\tan^2 x}\ldots\ldots -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$$

وليكن $(\Gamma)$ هو المنحنى الممثل للدالة $g$ .

1. بين أن : $\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .
2. أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{-\pi}{2}} g(x)$ , ثم فسر النتيجة هندسيا .
3. بين أنه من أجل كل $x$ من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ يكون : $g(x)=\frac{\sin x-1}{\cos x}$
4. ادرس تغيرات الدالة $g$ ثم أنشئ منحناها $(\Gamma)$ في معلم آخر

## الجزء الثالث :

لتكن الدالة $h$ المعرفة على $]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} h(x)=x-\sqrt{1+x^2}\ldots\ldots\ldots x\leq 0 \\ h(x)=2-x-\sqrt{x^2-4x+5}\ldots\ldots x\geq 2 \end{cases}$$

وليكن $(C_h)$ منحناها البياني في المعلم الأول

1. بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى $C_h$ .
2. شكل جدول تغيرات الدالة $h$
3. أنشئ المنحنى $(C_h)$ في نفس معلم الدالة $f$ .

### تمرين رقم -52- : Meziane Maths

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للإشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها. لها جدول التغيرات التالي:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ حيث $a$، $b$ و $c$ أعداد حقيقية .

1) أحسب $f'(x)$.

2) اعتمادا على جدول تغيرات الدالة $f$ :

أ) عين الأعداد الحقيقية $a$، $b$ و $c$ .

ب) عين $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ج) قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة $f$ معللا إجابتك .

3) نأخذ فيما يلي : $c=\frac{1}{4}$ ، $b=1$ ، $a=1$ وليكن $(C)$ المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس .

أ) بين أنه عندما يؤول $x$ إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ فإن المنحنى $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته : $y=x+1$ .

ب) أدرس وضعية المنحنى $(c)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ .

ج) أثبت أن النقطة $\omega(1,2)$ مركز تناظر للمنحنى $(C)$.

د) عين نقط تقاطع المنحنى $(C)$ مع حامل محور الفواصل .

4) $\lambda$ عدد حقيقي ، عين بيانيا، حسب قيم $\lambda$ عدد حلول المعادلة $f(x)=|\lambda|$.

### تمرين رقم -53- : Meziane Maths

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أدرس تغيرات الدالة $f$ .

2) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية $c,b,a$ بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن $-1$ : $f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$.

3) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية له , ثم أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ .

4) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ معامل توجيهه يساوي $1$ , أكتب معادلة ديكارتية لـ $(T)$ .

5) أنشئ المماس $(T)$ و المنحنى $(C_f)$ .

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

### تمرين رقم -54- : Meziane Maths

I) لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^4-4x-3$.

1) أدرس تغيرات الدالة $g$ .

2)أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث : $-0.7<\alpha<-0.69$ و $1.78<\beta<1.79$.

ب) عين إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ .

II) $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\frac{x^4+1}{x^3-1}$ و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ وحدته $2cm$.

1) عين نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها .

2) أ) عين الأعداد الحقيقية : $a,b,c,d,e$ حيث : $f(x)=ax+b+\frac{cx^2+dx+e}{x^3-1}$ و $(x\neq 1)$.

ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ للمنحنى $(C_f)$ يطلب تعيين معادلته , ثم أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

3)أ) بين أنه من أجل كل $x\neq 1$ يكون : $f'(x)=\frac{x^2\times g(x)}{(x^3-1)^2}$ .

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة $f$ , شكل جدول تغيراتها .

ج) أعط حصرا لكل من : $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

4) أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $-1$.

5) أنشئ كلا من المماس $(T)$ و $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$.

6) $h$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $h(x)=\frac{x^4+1}{|x^3-1|}$.

أ) أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

ب) إشرح كيفية إنشاء المنحنى $(C_h)$ الممثل للدالة $h$ إنطلاقا من $(C_f)$.

ج) أنشئ المنحنى $(C_h)$ في نفس المعلم السابق.

### تمرين رقم -55- : Meziane Maths

I) لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

1. -أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

-ب- أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

2. -أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0,7\prec\alpha\prec 0,8$

-ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

3. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4. -أ- بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ :

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

-ب- استنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلته.

-ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و $(\Delta)$

5. -أ- بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

-ب- استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$ ثم شكل جدول تغيراتها.(نأخذ $f(\alpha)\approx-0.1$)

6. أحسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$

7. أنشيء المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$

8. لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$ و $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق

-أ- تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $h(x)=f(x)-2$

-ب- استنتج أن $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ $(C_h)$

## تمرين رقم -56- : Meziane Maths

✍ نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$f(x)=\dfrac{x^3-8}{(x+1)^2}$ ،

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $1cm$ على محور الفواصل و $0.5cm$ على محور التراتيب)

1) أ) أحسب كل من النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

2) أ) عين الأعداد الحقيقية $a$، $b$ و $c$ بحيث يكون: من أجل كل $x\neq-1$ ، $f(x)=x+a+\dfrac{bx+c}{(x+1)^2}$.

ب) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

ج) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

3) أ) بين أنه من أجل كل $x\neq-1$ فإن:

$f'(x)=\dfrac{(x+4)(x^2-x+4)}{(x+1)^3}$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ على مجالي مجموعة تعريفها، ثم شكل جدول تغيراتها.

4) أكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 2.

5) عين احداثيي النقطة $A$ من $(C_f)$ التي يكون فيها المماس $(T')$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$. ثم اكتب معادلة للمماس $(T')$.

6) أنشئ كلا من $(\Delta)$ $(T)$ و $(C_f)$.

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=x-m$.

8) نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{|x^3-8|}{(x+1)^2}$ ، و $(C_h)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة $h$ عند 2.

ب) إشرح كيفية انشاء المنحنى $(C_h)$ إعتمادا على المنحنى $(C_f)$ ثم أنشئه.

## تمرين رقم -57- : Meziane Maths

✍ نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x^3+9x}{3x^2+1}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

2) بين أنه ن أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(-x)+f(x)=0$. فسر النتيجة بيانيا.

3) أ) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

ب) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

4)أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإن:

$f'(x)=\left(\dfrac{3(x^2-1)}{3x^2+1}\right)^2$.

ب) إستنتج اتجاه تغير الدالة $f$، ثم شكل جدول تغيراتها.

5)أ) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطتي انعطاف $A$ و $B$ .

ب) أكتب معادلتي المماسين $(T_A)$ و $(T_B)$ في النقطتين $A$ و $B$.

6)أ) أكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ والمماس $(T)$. ماذا تستنتج؟

7) أنشئ كلا من $(\Delta)$ $(T)$ و $(C_f)$.

8) هل توجد مماسات لـ $(C_f)$ توازي المستقيم $(\Delta)$؟ عينها إن وجدت.

9) أنشئ كلا من $(\Delta)$، $(T)$ و $(C_f)$.

10) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلتين: $f(x)=mx$ و $f(x)=m$.

## تمرين رقم -58- : Meziane Maths

أولا : لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x)=-x^3+6x^2-13x+8$.

1) أدرس تغيرات الدالة $g$ .

2) أحسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ .

ثانيا : لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ : $f(x)=-x+1+\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$

و ليكن $(C_f)$ منحنى الدالة $f$ في معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $f'(x)$ ثم تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{2\}$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$.

2) أستنتج إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

3) بين أن $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين $(\Delta)$ و $(D)$ حيث : $(\Delta)$ هو المستقيم المقارب المائل .

4) أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$ .

5) أكتب معادلة لـ $(T)$ مماس $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 3 .

6) أرسم $(D)$ , $(\Delta)$ , $(T)$ و $(C_f)$ .

## تمرين رقم −59− : Meziane Maths

أولا : $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^3+3x+8$ .

1) أدرس تغيرات الدالة $g$ .

2) بين أن للمعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[-2;-1]$ .

3) أدرس حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$ .

ثانيا : لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+1}$.

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أدرس تغيرات الدالة $f$ .

2) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ واعط حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

3) بين أنه توجد 4 أعداد حقيقية $a,b,c,d$ بحيث : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$ .

4) إستنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له.

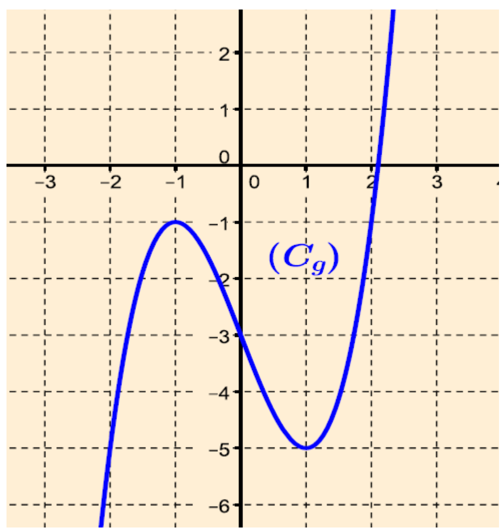
5) أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ .

6) عين فاصلتي النقطتين $A$ و $B$ من المنحني بحيث يكون فيهما المماس موازيا لـ $(\Delta)$ .

7) أنشئ $(\Delta)$ و $(C_f)$ .

## تمرين رقم −60− : Meziane Maths

I) المنحنى $(C_g)$ أدناه هو التمثيل البياني للدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=ax^3+bx+c$ .




1) أنجز جدول تغيرات الدالة $g$ .

2) إستعمل الشكل لتجد الأعداد الحقيقية $a,b,c$ .

3) بين أن المعادلة $x^3-3x-3=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $\left]2,\dfrac{11}{5}\right[$ .

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

II) $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ كما يلي : $f(x)=1+\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ : $f'(x)=\dfrac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$.

2) عين دون حساب قيمة $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا .

3) أحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف و فسر النتيجة بيانيا .

4) أنجز جدول تغيرات الدالة $f$ .

5) بين أن : $f(\alpha)=3\alpha+1$ و أعط حصر لـ $f(\alpha)$ .

6) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=2x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ .

7) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

8) أنشئ المستقيمات المقاربة و المنحنى $(C_f)$.

## تمرين رقم −61− : Meziane Maths

I) $g$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $g(x)=ax+\dfrac{b}{(x+1)^3}$

حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان و $(C_g)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أوجد العددين الحقيقين $a$ و $b$ بحيث المنحنى $(C_g)$ يشمل النقطة $A(0;1)$ و يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=3x$ .

2) نضع : $a=3$ و $b=1$ .

أ) أحسب نهايات الدالة $g$ عند حدود مجموعة تعريفها و إستنتج معادلة المستقيم المقارب العمودي .

ب) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ : $g'(x)=\dfrac{3(x^2+2x)(x^2+2x+2)}{(x+1)^4}$ .

ج) أدرس إشارة $g'(x)$ و أنجز جدول تغيرات الدالة $g$ .

د) إستنتج إشارة $g(x)$ .

3) بين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر للمنحى $(C_g)$.

II) $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ : $f'(x)=g(x)$ .

2) إستنتج جدول تغيرات الدالة $f$ .

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[0;1]$ و حلا وحيدا آخر $\beta$ حيث : $-\dfrac{3}{2}<\beta<-1$ .

4) أحسب $f(2)$ و $f(-2)$ ثم أنشئ المنحنى $(C_f)$.

## تمرين رقم −62− : Meziane Maths

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=ax+b+\dfrac{1}{2x}$

حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين العددين $a$ و $b$ علما أن : $f(-1)=-2$ و $f'(-1)=0$ .

II) في كل ما يلي نعتبر : $a=\frac{1}{2}$ و $b=-1$ .

1) أحسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة التعريف .

2) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ ثم أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ .

3) أدرس إتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $x$ : $f(-x)+f(x)=-2$, ماذا تستنتج ؟

5) هل يقطع $(C_f)$ حامل محور الفواصل ؟ برر .

6) أنشئ كل من $(\Delta)$ و $(C_f)$ .

III) نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $h(x)=\frac{x^2-3x+3}{2x-2}$ و $(C_h)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق .

1) تحقق أنه من أجل كل $x\neq 1$ : $h(x)=f(x-1)+\frac{1}{2}$.

2) إستنتج أن $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ثم أنشئ المنحنى $(C_h)$.

## تمرين رقم -63- : Meziane Maths

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{1-3x}{1+x^3}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة التعريف .

ب) إستنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتين لها .

2) أ) بين أن من أجل كل $x\neq 1$ فإن : $f'(x)=\frac{3(x-1)(2x^2+x+1)}{(1+x^3)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة $f$ ثم شطل جدول تغيراتها .

ج) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

3) أ) أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمماس $(T)$.

4) أحسب $f(-2)$ ثم أنشئ كلا من $(T)$ و $(C_f)$.

5) نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\frac{3|x|-1}{1+|x|^3}$ و $(C_h)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

أ) بين أن الدالة $h$ زوجية .

ب) إشرح كيفية إنشاء المنحنى $(C_h)$ إعتمادا على المنحنى $(C_f)$ ثم أنشئه .

ج) أدرس قابلية إشتقاق الدالة $h$ عند 0.

د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة : $h(x)=m$ .

## تمرين رقم -64- : Meziane Maths

I) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$g(x)=x^3-6x^2+12x-2$ .

1) أدرس تغيرات الدالة $g$ .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0.1<\alpha<0.2$ ثم جد حصرا للعدد $\alpha$ سعته $10^{-1}$ .

3) إستنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$ .

II) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{-x^3+4x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها, ثم فسر النتيجة بيانيا.

2) أ) عين الأعداد الحقيقية $a$ , $b$ و $c$ بحيث يكون من أجل كل $x\neq 2$ : $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}$ .

ب) إستنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلته .

ج) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

3) أ) بين أنه من أجل كل $x\neq 2$ فإن : $f'(x)=\frac{-g(x)}{(x-2)^3}$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة $f$ على مجالي مجموعة تعريفها, ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

4) بين أن : $f(\alpha)=-2+\frac{9}{(\alpha-2)}$ , ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

5) أكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 3.

6) أنشئ كلا من $(\Delta)$ و $(C_f)$ . (نأخذ $f(\alpha)\approx 0.7$ ).

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=-m$ .

8) نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=f(-|x|)$ و $(C_h)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

أ) أدرس قابلية إشتقاق الدالة $h$ عند 0 .

ب) بين أن الدالة $h$ زوجية ثم إشرح كيفية إنشاء المنحنى $(C_h)$ إعتمادا على المنحنى $(C_f)$ ثم أنشئه .

## تمرين رقم -65- : Meziane Maths

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) عين نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة التعريف.

ب) ادرس تغيرات الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها.

2) أ) عين الأعداد الحقيقية $a$ , $b$ و $c$ بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ : $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}$.

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(d)$ الذي معادلته $y=x-2$ ؟ برر.

ج) حدّد وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(d)$ ، لتكن $A$ نقطة تقاطع $(C_f)$ و $(d)$ .

3) ارسم $(C_f)$ و $(d)$ .(تؤخذ الوحدة $2cm$ على $(ox)$ و $1cm$ على $(oy)$ ).

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-\infty,1[$ إستنتج قيمة مقربة إلى $10^{-2}$ للعدد $\alpha$ .

5) عين معادلة المماس للمنحني $(C_f)$ الذي معامل توجيهه 1.

6) ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ حيث $m$ وسيط حقيقي.

7) أ) نريد إيجاد نتيجة السؤال 5) باستعمال الحساب بين أن فواصل نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ هي حلول المعادلة $(E)$ التالية: $(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$

ب) جد حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة $(E)$.

## تمرين رقم -66- : Meziane Maths

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي :

$f(x)=\dfrac{-x^3-2x^2+7x+12}{(x+2)^2}$ و ليكن $(C_f)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب) فسر هندسيا النهاية عند $-2$ .

2) أ) عين الأعداد الحقيقية $a,b,c,d$ بحيث من أجل كل $x$ يختلف عن $-2$ تكون : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}+\dfrac{d}{(x+2)^2}$ .

ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ للمنحنى $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$.

ج) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

3) أ) بين أنه من أجل كل $x\neq 2$ تكون :
$f'(x)=\dfrac{(-x-1)(x^2+5x+10}{(x+2)^3}$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أ) أحسب $f(-3)$ ثم حدد نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.

ب) حدد أيضا نقطة تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب.

5) أنشئ المنحنى $(C_f)$.

6) $m$ عدد حقيقي , عين قيم $m$ حتى يكون للمعادلة : $f(x)=m$ ثلاث حلول سالبة .

7) $g$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=f(|x|)$.

أ) بين أن الدالة $g$ زوجية .

ب) إشرح كيف يتم إنشاء المنحنى $(C_g)$ إنطلاقا من المنحنى $(C_f)$.

ج) أنشئ المنحنى $(C_g)$ في نفس المعلم السابق.

## تمرين رقم -67- : Meziane Maths

✍ لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3-3x^2+4x$, و $(C_g)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أدرس تغيرات الدالة $g$ .

2) برهن أن $(C_g)$ يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها ثم برهن أن هذه النقطة هي مركز تناظر للمنحنى $(C_g)$.

3) $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان .
برهن أنه إذا كان $\beta>\alpha$ فإن $g(\beta)>g(\alpha)$ ثم إستنتج مقارنة العددين $g(2021)$ و $g(2022)$ دون حساب قيمتها .

4) أعط إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم إستنتج وضعية $(C_g)$ بالنسبة لمحور الفواصل .

5) أرسم المنحنى $(C_g)$.

✍ نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$, $(C_f)$ منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) عين العددين الحقيقين $a$ و $b$ حيث : $f(x)=ax+\dfrac{bx}{(x-1)^2}$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ , $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, ثم فسر النتيجة هندسيا .

3) أحسب $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$, ثم فسر النتيجة هندسيا .

4) بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$.

5) إستنتج إتجاه تغير الدالة $f$ على مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

6) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ ثم أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

7) بين أنه يوجد مماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ في نقطة وحيدة $A$ يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة لـ $(T)$.

8) أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.

9) إعط إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$ ثم إستنتج وضعية $(C_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل .

10) أرسم $(T), (\Delta)$ ثم $(C_f)$ في معلم جديد يختلف عن $(C_g)$.

11) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلات التالية :

$f(x)=m$ ; $f(x)=|m|-1$ ; $f(x)=f(m)$ ; $-\dfrac{x}{(x-1)^2}=m$ ;

$f(x)=x+m^2-4$ ; $x^3-2x^2=mx(x-1)^2$.

✍ لتكن الدوال العددية التالية : $h_1$ , $h_2$ , $h_3$ حيث :

$h_1(x)=f(|x|)$ و $D_{h_1}=\mathbb{R}-\{-1;1\}$, $h_2(x)=|f(x)|$ و $D_{h_2}=D_f$, $h_3(x)=f(x-1)+2$ و $D_{h_3}=\mathbb{R}-\{2\}$

1) بين أن $h_1$ دالة زوجية .

2) إشرح كيف يتم رسم المنحنيات $(C_{h_1}), (C_{h_2}), (C_{h_3})$ إنطلاقا من منحنى $(C_f)$ ثم أنشئها .

✍ لتكن الدالة $k$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $k(x)=f(x^2)$

1) أدرس إتجاه تغير الدالة $k$ ثم شكل جدول تغيراتها.

## تمرين رقم -68- : Meziane Maths

✍ **الجزء الأول :** لتكن الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بجدول تغيراتها كالتالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-5$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

I) تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x}$ حيث : $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية

1) أحسب الدالة المشتقة $f'$ بدلالة $a$ و $c$

2) بالإستعانة بجدول تغيرات الدالة $f$ عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$.

3) عين $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

4) استنتج معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -1$ .

5) أجب بصح أو خطأ مع التبرير :

أ)- $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$

ب)- المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$

ج)- المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا $\beta$ في المجال .$]2.5; 2.7[$

د)- $f'(3) > 0$

6) استنتج إشارة الدالة $f$ .

✍ **الجزء الثاني :** نأخذ في ما يلي $a = 1; b = -3; c = 1$ وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أن $(C_f)$ يقبل المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x - 3$ مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ و $-\infty$

2) أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$

3) بين أن $f(-x) + f(x) = -6$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

4) أنشئ $(C_f)$ و المستقيمات المقاربة.

5) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي $m$ إشارة و عدد حلول المعادلة : $f(x) = m$ .

✍ **الجزء الثالث :** $g$ دالة ذات المتغير الحقيقي $x$ معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $g(x) = [f(x)]^2$

1) أوجد نهايات الدالة $g$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أحسب $g(-1)$ , $g(1)$ ، $g(\alpha)$ و $g(\beta)$

3) بإستعمال مشتق مركب دالتين أحسب $g'(x)$

4) استنتج جدول تغيرات الدالة $g$ (دون دراسة تغيراتها).

## تمرين رقم -69- : Meziane Maths

✍ نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعلاقة الموالية: $f(x) = 1 - x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أحسب كل من النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

2) من أجل كل عدد حقيقي $x$،احسب $f'(x)$، ثم استنتج القيمة العددية لـ $f'(0)$.

3) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، لدينا العلاقة التالية : $1 - (x^2+1)\sqrt{x^2+1} \leq 0$. ثم استنتج أن النقطة $\omega(0,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$.

4) إستنتج اتجاه تغير الدالة $f$ مشكلا جدول تغيراتها.

5) أثبت أن النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.

6) أثبت أن المستقيمين $(\Delta_0)$ و $(\Delta_1)$ المعرفين كما يلي: $(\Delta_0) : y = -x$ و $(\Delta_1) : y = -x + 2$ مقاربين مائلين للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ بهذا الترتيب.

7) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$، حيث $\alpha$ ينتمي إلى المجال $]1,8; 1,9[$.

8) أكتب معادلة للماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة $\omega$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(T)$.

9) أرسم في نفس المعلم $(\Delta_0)$ ، $(\Delta_1)$ ، $(T)$ و $(C_f)$.

10) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة: $x = (m-1)\sqrt{x^2+1}$ .

## تمرين رقم -70- : Meziane Maths

✍ $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ و $(C_g)$ تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.

المستقيم $(D)$ هو مماس للمنحنى $(C_g)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

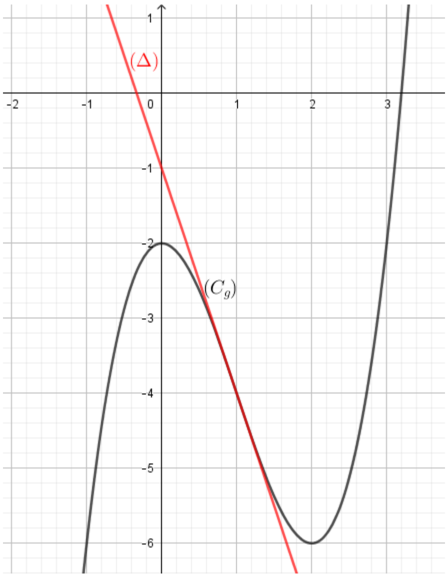
**بقراءة بيانية :**

1) أحسب كل من : $g'(0)$ , $g'(2)$ , $g'(1)$ و $g''(1)$ .

2) شكل جدول تغيرات الدالة $g$.

3) حدد إشارة $g(3)$ و $g\left(\frac{7}{2}\right)$ ثم إستنتج وجود عدد حقيقي $\alpha$ وحيد من المجال $\left]3;\frac{7}{2}\right[$ بحيث $g(\alpha) = 0$ ثم تحقق أن : $3.1 < \alpha < 3.2$.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.




✍ $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ , أحسب $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) بين أنه من أجل كل $x \neq 1$ : $f'(x) = \frac{(x-1)\times g(x)}{(x-1)^4}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

3) أحسب $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x)$ ثم إستنتج أن $(C_f)$يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له .

4) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

5) عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}\right)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

6) بين أن : $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصر لـ $f(\alpha)$ تدور النتائج إلى $10^{-2}$.

7) أكتب معادلة المستقيم $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{3}$.

8) جد نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات.

9) أنشئ $(\Delta)$ , $(C_f)$.

10) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

✍ $h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $h(x)=\dfrac{|x^3+1|}{(x-1)^2}$ و $(C_h)$ تمثيلها البياني .

1) أكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة $h$ عند القيمة $-1$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) إستنتج رسم المنحنى $(C_h)$ إنطلاقا من $(C_f)$.

## تمرين رقم -71- : Meziane Maths

I) $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$.

1) أدرس نهايات الدالة $g$ .

2) أدرس إتجاه تغير الدالة $g$ , شكل جدول التغيرات .

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $g(x)=0$ .

4) إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\leq 0$.

II) لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x)=-x+1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا :

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

2) أحسب النهايات ،ادرس اتجاه التغير و شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

3) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f(x)+f(-x)=2$ ماذا تستنتج ؟

4) أكتب معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) بين أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1<\alpha<2$ .

6) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x-2]$ ماذا تستنتج ؟

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ ماذا تستنتج ؟

7) أنشئ $(C_f)$ .

8) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ : $m\sqrt{x^2+1}-x=(-x+1)\sqrt{x^2+1}$ .

بالتوفيق و النجاح إن شاء الله في بكالوريا 2022