العبقري في الرياضيات

المتتاليات العددية

الثالثة ثانوي

الشعب: ● تسيير وإقتصاد.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية)
الملخص // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

ملخص: حول المتتاليات العددية// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: تسيير وإ.

دراسة إتجاه تغيّر متتالية (u_n):

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

- في حالة $u_{n+1} - u_n > 0$، فإنّ: (u_n) متزايدة تماما.
- في حالة $u_{n+1} - u_n < 0$، فإنّ: (u_n) متناقصة تماما.
- في حالة $u_{n+1} - u_n = 0$، فإنّ: (u_n) ثابتة.

تقارب وتباعد متتالية:

- إذا كانت $\lim u_n = l$، **حيث:** $(l \in \mathbb{R})$ فإنّ: (u_n) **متقاربة**؛
- **في الحالات الأخرى** (u_n) **متباعدة.**

نتائج: (حول تقارب متتالية)

- إذا كانت (u_n)، **متزايدة تماما ومحدود من الأعلى** $u_n < A$ $(u_n \leq A)$ فهي: **متقاربة.**
- إذا كانت (u_n)، **متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل** $u_n > B$ $(u_n \geq B)$ فهي: **متقاربة.**

متتالية ثابتة:

- (u_n) **ثابتة**، معناه: $\boxed{u_{n+1} = u_n = \alpha \in \mathbb{R}}$. **(كل الحدود متساوية وتساوي الحد الأوّل)**

المتتالية الحسابية:

1) طريقة إثبات أنّ المتتالية (u_n) حسابية:

يكفي أن نُثبت أنّ: 1 الفرق $u_{n+1} - u_n$ **عدد ثابت** أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n = r}$.

2 **أو** نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد: $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.

حيث: r **عدد حقيقي**، يسمى أساس المتتالية **الحسابية** (u_n).

2) عبارة الحد العام لمتتالية حسابية: (u_n بدلالة n)؛ u_n يسمى **الحد العام.**

1 بصفة عامة $\boxed{u_n = u_p + (n - p)r}$، علاقة تربط بين **حدين مختلفين.**

2 $\boxed{u_n = u_0 + nr}$، في حالة u_0 هو **الحد الأوّل.**

3 $\boxed{u_n = u_1 + (n - 1)r}$، في حالة u_1 هو **الحد الأوّل.**

ملاحظة: 1 هذه العلاقات يُمكن إستعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض u_n بأي حد مُعطى في التمرين.

2 تُستعمل العلاقة 1، إذا كانت (u_n) **حسابية ومعرّفة بحدين مختلفين** وبإستعمال العلاقة نقوم

بحساب الأساس نجد: $\boxed{r = \frac{u_n - u_p}{n - p}}$.

3) مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

بصفة عامة: $\boxed{\text{المجموع} = (\text{عدد الحدود})\left(\frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}\right)}$.

حيث: $1 +$ دليل الحد الأوّل $-$ دليل الحد الأخير $=$ عدد الحدود.

4) خاصية الوسط الحسابي:

تكون الأعداد الحقيقية a، b وَ c بهذا الترتيب **حدوداً متتابعة من متتالية حسابية** إذا وفقط إذا كان $\boxed{a + c = 2b}$ أو $\boxed{b = \frac{a+c}{2}}$.

المتتالية الهندسية:

1) طريقة إثبات أن المتتالية (u_n) هندسية:

يكفي أن نُثبت أنّ: (1) الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ **عدد ثابت** أي: $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = q}$.

(2) أو نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد: $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$.

حيث: q **عدد حقيقي**، يسمى **أساس المتتالية الهندسية** (u_n).

2) عبارة الحد العام لمتتالية حسابية: (u_n بدلالة n)؛ u_n يسمى **الحد العام**.

(1) بصفة عامة $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$، علاقة تربط بين **حدين مختلفين**.

(2) $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$، في حالة u_0 هو **الحد الأوّل**.

(3) $\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$، في حالة u_1 هو **الحد الأوّل**.

ملاحظة: ❶ هذه العلاقات يُمكن إستعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض u_n بأي حد مُعطى في التمرين.

❷ تُستعمل العلاقة (1)، إذا كانت (u_n) **هندسية ومعرّفة بحدين مختلفين** وبإستعمال العلاقة نقوم بحساب الأساس نجد: $\boxed{q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}}$.

3) مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:

بصفة عامة: $\boxed{\text{المجموع} = (\text{الحد الأوّل})\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right)}$.

حيث: $1 +$ دليل الحد الأوّل $-$ دليل الحد الأخير $=$ عدد الحدود.

4) خاصية الوسط الهندسي:

تكون الأعداد الحقيقية a، b وَ c بهذا الترتيب **حدوداً متتابعة من متتالية هندسية** إذا وفقط إذا كان $\boxed{a \times c = b^2}$.

5) قوانين النهايات المتعلقة بالمتتاليات الهندسية:

(1) إذاكان: $q > 1$، فإنّ: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty}$.

(2) إذاكان: $-1 < q < 1$، فإنّ: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} q^n = 0}$.

(3) إذاكان: $q \leq -1$، فإنّ: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} q^n}$ **غير موجودة**.

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية -بكالوريات جزائرية)

التمارين// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

التمرين 01: (04 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = \alpha \,; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} \,; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1)برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2)في كل ما يلي $\alpha = 2$، ونُعرف المتتالية العددية (v_n) كما يلي: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$.

أ) احسب u_1، u_2.

ب) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0.

جـ) أكتب عبارة u_n بدلالة n. وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 02: (05 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

1.احسب u_1، u_2 و u_3.

2.أ. اثبت بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq -2$.

ب. جِد اتجاه تغير المتتالية (u_n). ماذا تستنتج؟

3.(v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + 2$.

أ. بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية.

ب. عبّر بدلالة n عن الحد العام v_n ثم u_n.

جـ. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د. احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 03: (04 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

1)نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3u_{n+1} = u_n + 4$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون $u_n \leq 2$.

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

جـ) استنتج مع التبرير أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

2)نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 2$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد حدّها الأول وأساسها.

ب) أكتب الحد العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج الحد العام u_n بدلالة n.

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + \cdots + u_n$.

التمرين 04: (05 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

(U_n) متتالية عددية معرّفة بـ $U_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1} = 3U_n - 2$.

1.احسب U_1، U_2.

2.لتكن المتتالية العددية (V_n) المعرفة بـ: $V_n = U_n - 1$.

أ-أثبت أنّ المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول V_0.

ب-اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n.

3.بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1} - U_n = (-4) \times 3^n$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n).

4.عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون: $U_0 + U_1 + \cdots + U_n = n - 79$.

التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

1) n عدد طبيعي، أُحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + e + e^2 + \cdots + e^n$

(S_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول 1؛ و e يُرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري).

2) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n + 4 + e^n$.

بيّن أنّ: $w_n = u_n + v_n$.

حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين الحد الأول وَالأساس لكل منهما.

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $4 + 6 + 8 + \cdots + (2n+4) = (n+1)(n+4)$.

4) استنتج المجموع S بدلالة n حيث: $S = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

التمرين 06: (06 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$.

1) احسب الحدود u_1، u_2 و u_3.

2) أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n < 2$.

ب-بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

جـ-استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$.

أ-بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب-اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

جـ-ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$$

التمرين 07: (05,5 نقطة) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$.

1) احسب الحدود u_1 و u_2.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > \frac{1}{3}$.

3)بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

4)لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب. اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

جـ. احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 08: (05 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{9}$.

1)أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب-بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

2)نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ-بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية، يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب-اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$.

جـ) ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

3)احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

التمرين 09: (05 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره $50000DA$ في صندوق التوفير والاحتياط.

يُقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.

يَسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره $5000DA$ (بعد حساب الفوائد).

يُرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008 + n$.

1)أ-أُحسب كلا من u_0، u_1 و u_2.

ب-هل المتتالية (u_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟ برّر إجابتك.

جـ-بيّن لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا، $u_{n+1} = 1{,}05u_n - 5000$.

2)نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 100000$.

أ-بين أن المتتالية (v_n) هندسية، حدّد أساسها وحدّها الأوّل.

ب-أُكتب v_n بدلالة n، ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n،

$u_n = -50000 \times (1{,}05)^n + 100000$.

3)أ-ما هو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015؟

ب-ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

التمرين 10: (05 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3}$؛ حيث a وسيط حقيقي.

1-عيّن قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2-نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية، ثمّ احسب عندئذٍ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية.

3-عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثمّ عيّن في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها.

4-نفرض $a = 4$. برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ: $u_n = 3^n + 2$، ثمّ بيّن أنّ:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3).$$

التمرين 11: (04 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$.

1)أ-احسب الحدود: u_1، u_2، u_3 و u_4.

ب-هل المتتالية (u_n) رتيبة على $\mathbb{N}$؟ برّر إجابتك.

2)أ-بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$.

ب-استنتج أن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 4$ هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

جـ-اكتب v_n، ثمّ u_n بدلالة n.

د-بيّن أنّ (u_n) متقاربة.

3)باستعمال عبارة u_n، تأكد ثانية من نتيجة السؤال 1) ب-.

التمرين 12: (05 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

أجب بصحيح أو خطأ، مع التبرير، في كل حالة من الحالات الآتية:

1/ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln u_n$.

أ) إذا كانت (u_n) متقاربة فإنّ (v_n) متقاربة.

ب) إذا كانت (u_n) متناقصة فإنّ (v_n) متناقصة.

جـ) إذا كانت (u_n) هندسية فإنّ (v_n) حسابية.

2/ إحصاء.

التمرين 13: (04,5 نقطة) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

1-أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n > -3$

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

جـ) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

2-لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = 18$

أ) بيّن أنّ: $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$.

ب) احسب الأساس q ثمّ عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

جـ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_n = v_n - 3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

التمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1)نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$.

أ)(u_n) حسابية، ب)(u_n) هندسية، جـ)(u_n) ليست هندسية ولا حسابية.

2)(v_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $v_0 = 1$ وأساسها 4؛ قيمة n التي من أجلها يكون $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 2015$، هي:

أ)$n = 31$، ب)$n = 32$، جـ)$n = 33$.

3) **دّالة عددية.**

4) 5) 6) **إحتمالات.**

التمرين 15: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

بيّنت دراسة أنّ 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يُحالون على التقاعد سنوياً وبالمقابل يُوظف 3000 عامل سنوياً. علماً أنّ سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ: u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$ أي $u_0 = 50$.

1)احسب u_1 و u_2.

2)أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

3)من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = 60 - u_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n؛ ثمّ استنتج u_n بدلالة n.

جـ) قَدِّر عدد العمال سنة 2017.

د) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n).

هـ) احسب نهاية المتتالية (u_n). هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟

التمرين 16: (04,5 نقطة) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

(V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل $V_0 = 18$ والعلاقة: $V_0 + V_1 + V_2 = 38$.

1/بيّن أنّ أساس المتتالية (V_n) هو $q = \frac{2}{3}$.

2/أ) اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (V_n).

جـ) احسب نهاية (V_n).

3/نضع $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$.

أ) احسب S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

ب) جِد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$.

التمرين 17: (05 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

نعتبر المتتالية (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 5$ و $U_{n+1} = \frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7}$.

1)احسب الحدّين U_1 و U_2.

2)أ-برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $U_n > 1$.

ب-بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

جـ-ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (U_n)؟

3)لتكن المتتالية (V_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n - 1$.

أ-بيّن أنّ (V_n) متتالية هندسية مُعيّنا أساسها وحدّها الأوّل.

ب-اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $U_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$.

جـ-احسب نهاية (U_n).

التمرين 18: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1)أ) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 3$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2)(v_n) المتتالية المعرّفة بـ: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = 3 - u_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ثم عيّن حدّها الأول.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

التمرين 19: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل n طبيعي، $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1)احسب u_1، u_2، u_3 ثم خمّن اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2)نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة بـ: من أجل كل n طبيعي، $v_n = u_{n+1} - u_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يُطلب تعيين حدها الأول.

ب) عيّن v_n بدلالة n ثم استنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

3)نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

أ) احسب S_n بدلالة n.

ب) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = S_n + u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

التمرين 20: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأول u_0 حيث $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

1)أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 2$.

ب) عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2)لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = 2u_n - 4$.

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل v_0.

ب) جِد عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3)احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 21: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول v_0 حيث $v_0 = 1$. (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

1)احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

2)نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرّفتين كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n،

$w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ و $u_n = w_n - v_n$.

بيّن أنّ: المتتالية (u_n) حسابية، حدّد أساسها r وحدّها الأول u_0.

3)أثبت أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $4 + 6 + 8 + \cdots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$.

4)استنتج المجموع T_n بدلالة n حيث $T_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

التمرين 22: (04 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I)لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي:

$u_0 = 50$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 6$ و $v_n = u_n - 20$.

1)برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 0,7 يُطلب تعيين حدّها الأول v_0، وكتابة عبارة v_n بدلالة n.

2)أ. اكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n.

ب. عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

II)تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة: ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين في سنة $2016 + n$ أي $u_0 = 50$

1)ما هو عدد المشتركين في سنة 2017؟ ثم في سنة 2018؟

2)أ. برّر العبارة $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 6$.

ب. ابتداءً من أي سنة يُصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك؟

التمرين 23: (04 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $2u_{n+1} = u_n + 6$.

1)أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 6$.

ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنّها متقاربة.

2)نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 6$.

أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب حساب حدّها الأول v_0.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

3)احسب بدلالة n ما يلي: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ وَ $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$.

التمرين 24: (04 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0 = -4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

1)أ) احسب كلا من u_1 و u_2.

ب) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 8$.

2)ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنّها متقاربة.

3)من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $v_n = u_n - \alpha$، حيث α عدد حقيقي.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$.

ب) عيّن قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، يُطلب تعيين حدّها الأول v_0.

جـ) نضع $\alpha = 8$، عبّر عن v_n بدلالة n، ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$.

4)احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

التمرين 25: (04 نقاط بكالوريا 2019// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases}$.

1)احسب حدّها الأول u_0 وأساسها r.

2)اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3)بيّن أنّ العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية ثمّ احسب كلا من المجموعين S_1 و S_2.

حيث $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{1344}$ وَ $S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{1344}$.

-استنتج حساب المجموع S_3 حيث: $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{1343}$.

4)(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = e^{6-2u_n}$.

-احسب المجموع $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}$.

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية -بكالوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

حل التمرين 01: (04 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $\begin{cases} u_0 = \alpha \,; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} \,; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) البرهان بالتراجع أنّه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

(u_n) **ثابتة** معناه $\boxed{u_0 = u_n = u_{n+1} = \alpha \in \mathbb{R}}$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$، لدينا: $u_0 = -\frac{8}{3}$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n = -\frac{8}{3}$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} = -\frac{8}{3}}$.

البرهان: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} = \frac{2}{3}\left(-\frac{8}{3}\right) - \frac{8}{9} = \frac{-16}{9} - \frac{8}{9} = \frac{-16-8}{9} = \frac{-24}{9} = -\frac{8}{3}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** أنّه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) لدينا: $\alpha = 2$، نجد: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} \end{cases}$؛ المتتالية (v_n) معرّفة كما يلي: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$.

أ) حساب u_1، u_2:

- $u_1 = \frac{2}{3}u_0 - \frac{8}{9} = \frac{2}{3}(2) - \frac{8}{9} = \frac{12-8}{9} = \frac{4}{9}$؛
- $u_2 = \frac{2}{3}u_1 - \frac{8}{9} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{8}{9} = \frac{8-24}{27} = \frac{-16}{27}$.

ب) اثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0:

(نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

يُمكن تعويض u_n مباشرة

$\boxed{u_n = v_n - \frac{8}{3}}$

لدينا: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}u_n + \frac{16}{9} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2\times 8}{3\times 3} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}v_n$

أي: $\boxed{v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n}$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = \frac{2}{3}}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = u_0 + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}}$.

جـ) كتابة عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $\begin{cases} v_n = v_0 \times q^n = \frac{14}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ v_n = u_n + \frac{8}{3} \end{cases}$، إذن: $\boxed{u_n = v_n - \frac{8}{3} = \frac{14}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{8}{3}}$.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (لأنّ $-1 < \frac{2}{3} < 1$)، إذن: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{8}{3}}$.

حل التمرين 02: (05 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$

1.حساب u_1، u_2 و u_3:

- $u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 1 = \frac{1}{2}(1) - 1 = -\frac{1}{2}$؛
- $u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{5}{4}$؛
- $u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}\right) - 1 = -\frac{13}{8}$.

2.أ. اثبات بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq -2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$، لدينا: $u_0 = 1 \geq -2$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n \geq -2$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} \geq -2}$

البرهان: **حسب فرضية التراجع،** لدينا: $u_n \geq -2$

ومنه: $\frac{1}{2}u_n \geq -1$

وعليه: $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq -1 - 1$

أي: $\boxed{u_{n+1} \geq -2}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq -2$.

ب. ايجاد اتجاه تغير المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

- لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 1$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n \geq -2$

ومنه: $-\frac{1}{2}u_n \leq 1$ وعليه: $-\frac{1}{2}u_n - 1 \leq 1 - 1$ أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n \leq 0}$

إذن: (u_n) **متناقصة تماما.**

الاستنتاج:

بمأنّ (u_n) **متناقصة تماما وَمحدودة من الأسفل** ($u_n \geq -2$) فإنّها **متقاربة.**

3.لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + 2$.

أ. تبيان أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

نُعوّض u_n مباشرة

$\boxed{u_n = v_n - 2}$

لدينا: $v_n = u_n + 2$، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 + 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 = \frac{1}{2}(v_n - 2) + 1 = \frac{1}{2}v_n - 1 + 1 = \frac{1}{2}v_n$$

أي: $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = \frac{1}{2}}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3}$.

ب. التعبير بدلالة n عن الحد العام v_n ثمّ u_n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$؛ ولدينا: $v_n = u_n + 2$ إذن: $\boxed{u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2}$.

جـ. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (لأنّ $-1 < \frac{1}{2} < 1$)، إذن: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2}$.

د. حساب، بدلالة n، المجموع S_n حيث، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + \cdots + (v_n - 2)$

ومنه: $S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) - 2(n - 0 + 1) = v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) - 2(n - 0 + 1)$

وعليه: $S_n = 3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right) - 2(n+1) = 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 2(n+1)$.

حل التمرين 03: (04 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

1) لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة بـ $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 3u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$.

$3u_{n+1} = u_n + 4$ معناه: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$

أ) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون $u_n \leq 2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$، لدينا: $u_0 = -1 \leq 2$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n \leq 2$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} \leq 2}$

البرهان: **حسب فرضية التراجع**، لدينا: $u_n \leq 2$

ومنه: $\frac{1}{3}u_n \leq \frac{2}{3}$

وعليه: $\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$

أي: $\boxed{u_{n+1} \leq 2}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n \leq 2$.

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

- لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3}-u_n=\left(\frac{1}{3}-1\right)u_n+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3}$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n \le 2$

ومنه: $-\frac{2}{3}u_n \ge -\frac{4}{3}$

وعليه: $-\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3} \ge -\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$ أي: $\boxed{u_{n+1}-u_n \ge 0}$، إذن: (u_n) متزايدة تماماً.

جـ) استنتاج مع التبرير أنّ المتتالية (u_n) متقاربة:

بمأنّ (u_n) متزايدة تماماً وَمحدودة من الأعلى ($u_n \le 2$) فإنّها متقاربة.

2) لدينا: من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-2$.

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد حدّها الأول وأساسها:

(نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

يُمكن تعوّيض u_n
$\boxed{u_n=v_n+2}$

لدينا: $v_n=u_n-2$

ومنه: $v_{n+1}=u_{n+1}-2=\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3}-2=\frac{1}{3}u_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(u_n-2)=\frac{1}{3}v_n$

أي: $\boxed{v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n}$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q=\frac{1}{3}}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0=u_0-2=-1-2=-3}$.

ب) كتابة الحد العام v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n=-3\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

استنتاج الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n=u_n-2$ إذن: $\boxed{u_n=-3\left(\frac{1}{3}\right)^n+2}$

جـ) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ (لأنّ $-1<\frac{1}{3}<1$)، إذن: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2}$.

د) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n=u_0+\cdots+u_n$:

لدينا: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=(v_0+2)+(v_1+2)+\cdots+(v_n+2)$

ومنه: $S_n=(v_0+v_1+\cdots+v_n)+2(n-0+1)=v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)+2(n-0+1)$

ويكون: $S_n=-3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right)+2(n+1)=-\frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+2(n+1)$.

حل التمرين 04: (05 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: (U_n) متتالية عددية معرّفة بـ $\begin{cases}U_0=-1\\U_{n+1}=3U_n-2\end{cases}$.

1.حساب U_1، U_2:

- $U_1=3U_0-2=3(-1)-2=-5$؛
- $U_2=3U_1-2=3(-5)-2=-17$.

2.لدينا: (V_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $V_n = U_n - 1$.

أ-إثبات أنّ المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول V_0: (نكتب V_{n+1} بدلالة V_n)

لدينا: $V_n = U_n - 1$

ومنه: $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = 3U_n - 2 - 1 = 3U_n - 3 = 3(U_n - 1) = 3V_n$

أي: $\boxed{V_{n+1} = 3V_n}$

إذن: (V_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = 3}$ وحدّها الأول $\boxed{V_0 = U_0 - 1 = -1 - 1 = -2}$.

ب-كتابة عبارة الحد العام V_n بدلالة n:

لدينا: $V_n = V_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{V_n = -2(3)^n}$

3.تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1} - U_n = (-4) \times 3^n$:

لدينا: $U_{n+1} - U_n = 3U_n - 2 - U_n = 2U_n - 2 = 2(U_n - 1) = 2V_n = (-4) \times 3^n$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (U_n):

لدينا: $U_{n+1} - U_n = (-4) \times 3^n < 0$، إذن: (U_n) **متناقصة تماماً**.

4.تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $U_0 + U_1 + \cdots + U_n = n - 79$:

$U_0 + U_1 + \cdots + U_n = n - 79$ يُكافئ: $(V_0 + 1) + (V_1 + 1) + \cdots + (V_n + 1) = n - 79$

ومنه: $(V_0 + V_1 + \cdots + V_n) + 1(n - 0 + 1) = n - 79$

وعليه: $V_0\left(\frac{1-(3)^{n-0+1}}{1-3}\right) + 1(n - 0 + 1) = n - 79$

ويكون: $-2\left(\frac{1-3^{n+1}}{-2}\right) + (n + 1) = n - 79$

ومنه: $(1 - 3^{n+1}) = -80$

أي: $3^{n+1} = 81$

وبالتالي: $n + 1 = 4$ (لأنّ $3^4 = 81$)

إذن: $\boxed{n = 3}$.

حل التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

1) n عدد طبيعي، حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + e + e^2 + \cdots + e^n$:

(S_n عبارة عن مجموع الـ "$n + 1$" حداً الأولى لمتتالية هندسية أساسها $q = e$ وحدها الأول 1)

إذن: $\boxed{S_n = 1 + e + e^2 + \cdots + e^n = \frac{1-e^{n+1}}{1-e}}$.

2)لدينا: (w_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n + 4 + e^n$.

تبيان أنّ $w_n = u_n + v_n$، حيث (u_n) متتالية حسابية و(v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين الحد الأول وَالأساس لكل منهما:

لدينا: $w_n = 2n + 4 + e^n = u_n + v_n$، حيث: $u_n = 2n + 4$ وَ $v_n = e^n$.

ولدينا: (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $u_0 = 4$، وأساسها

$r = u_{n+1} - u_n = [2(n + 1) + 4] - (2n + 4) = 2$.

وَ(v_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $v_0 = e^0 = 1$ وأساسها $q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{n+1}}{e^n} = \frac{e^n \times e^1}{e^n} = e$.

3)إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ، $4 + 6 + 8 + \cdots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$:

لدينا: $4+6+8+\cdots+(2n+4)=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=(n-0+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$

ومنه: $4+6+8+\cdots+(2n+4)=(n+1)\left(\frac{4+2n+4}{2}\right)=(n+1)\left(\frac{2n+8}{2}\right)$

وعليه: $4+6+8+\cdots+(2n+4)=(n+1)\left(\frac{2(n+4)}{2}\right)=(n+1)(n+4)$

4)استنتاج المجموع S بدلالة n حيث، $S=w_0+w_1+\cdots+w_n$:

لدينا: $S=w_0+w_1+\cdots+w_n=(u_0+v_0)+(u_1+v_1)+\cdots+(u_n+v_n)$

ومنه: $S=(u_0+u_1+\cdots+u_n)+(v_0+v_1+\cdots+v_n)=(n+1)(n+4)+S_n$

وعليه: $S=(n+1)(n+4)+\frac{1-e^{n+1}}{1-e}$.

حل التمرين 06: (06 نقاط بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد .

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{4}\end{cases}$

$u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{4}$ معناه: $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{2}{4}$

1)حساب الحدود u_1، u_2 و u_3:

- $u_1=\frac{3}{4}u_0+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}(1)+\frac{2}{4}=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}$
- $u_2=\frac{3}{4}u_1+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{2}{4}=\frac{15+8}{16}=\frac{23}{16}$
- $u_3=\frac{3}{4}u_2+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}\left(\frac{23}{16}\right)+\frac{2}{4}=\frac{69+32}{64}=\frac{101}{64}$

2)أ-البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن، $u_n<2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n=0$، لدينا: $u_0=1<2$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n<2$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1}<2}$

البرهان: **حسب فرضية التراجع**، لدينا: $u_n<2$

ومنه: $\frac{3}{4}u_n<\frac{6}{4}$

وعليه: $\frac{3}{4}u_n+\frac{2}{4}<\frac{6}{4}+\frac{2}{4}$

أي: $\boxed{u_{n+1}<2}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n<2$.

ب-تبيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$)

- لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{4}u_n+\frac{2}{4}-u_n=\left(\frac{3}{4}-1\right)u_n+\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}u_n+\frac{2}{4}$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n<2$

ومنه: $-\frac{1}{4}u_n>-\frac{2}{4}$

وعليه: $-\frac{1}{4}u_n + \frac{2}{4} > -\frac{2}{4} + \frac{2}{4}$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$، إذن: (u_n) **متزايدة تماماً.**

جـ-استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة:

بمأنّ (u_n) **متزايدة تماماً وَمحدودة من الأعلى** ($u_n < 2$) فإنّها **متقاربة.**

3)لدينا: (v_n) متتالية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$.

أ-تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - 2$، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4} - 2 = \frac{3}{4}u_n - \frac{6}{4} = \frac{3}{4}u_n - \frac{3\times2}{4} = \frac{3}{4}(u_n - 2) = \frac{3}{4}v_n$$

أي: $\boxed{v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n}$.

إذن:(v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = \frac{3}{4}}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1}$.

ب-كتابة عبارة v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$:

لدينا: $v_n = u_n - 2$ إذن: $\boxed{u_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2}$.

جـ-حساب نهاية المتتالية (u_n):

لدينا: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ (لأنّ $-1 < \frac{3}{4} < 1$)، إذن: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$.

4)حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$:

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{3}{4}}\right) = -\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}\right)$

ومنه: $S_n = -4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4$.

استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ، $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$:

لدينا: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \cdots + (v_n + 2)$

ومنه: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + 2(n - 0 + 1)$

وعليه: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = S_n + 2n + 2 = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 + 2n + 2 = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$.

حل التمرين 07: (05,5 نقطة) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: تسيير وإ.

لدينا: (u_n) متتالية عددية حيث، $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} \end{cases}$.

1)حساب الحدود u_1 و u_2:

- $u_1 = \frac{2}{5}u_0 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$
- $u_2 = \frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{4+5}{25} = \frac{9}{25}$

2)تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > \frac{1}{3}$:

نستعمل البرهان بالتراجع، نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$، لدينا: $u_0 = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n > \frac{1}{3}$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} > \frac{1}{3}}$.

البرهان: **حسب فرضية التراجع**، لدينا: $u_n > \frac{1}{3}$

ومنه: $\frac{2}{5}u_n > \frac{2}{15}$

وعليه: $\frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} > \frac{2}{15} + \frac{1}{5}$

أي: $\boxed{u_{n+1} > \frac{1}{3}}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n > \frac{1}{3}$.

3)تبيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماماً: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

- لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - u_n = \left(\frac{2}{5} - 1\right)u_n + \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}u_n + \frac{1}{5}$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n > \frac{1}{3}$

ومنه: $-\frac{3}{5}u_n < -\frac{1}{5}$

وعليه: $-\frac{3}{5}u_n + \frac{1}{5} < -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$، إذن: (u_n) **متناقصة تماماً**.

استنتاج أنّها متقاربة: بمأنّ (u_n) **متناقصة تماماً وَمحدودة من الأسفل** ($u_n > \frac{1}{3}$) فإنّها **متقاربة**.

4)لدينا: (v_n) متتالية عددية حيث، $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

أ. تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - \frac{1}{3}$، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{15} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2\times1}{5\times3} = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5}v_n$$

أي: $\boxed{v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n}$.

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = \frac{2}{5}}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = u_0 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}}$.

ب. كتابة كلاً من v_n و u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$، ولدينا: $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ إذن: $\boxed{u_n = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}}$

جـ. حساب نهاية المتتالية (u_n):

لدينا: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ (لأنّ $-1 < \frac{2}{5} < 1$)، إذن: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}}$.

حل التمرين 08: (05 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{9} \end{cases}$

$u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{9}$ معناه: $u_{n+1} = \frac{3}{9}u_n + \frac{4}{9}$

1)أ-البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > \frac{2}{3}$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$، لدينا: $u_0 = 1 > \frac{2}{3}$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n > \frac{2}{3}$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} > \frac{2}{3}}$.

البرهان: **حسب فرضية التراجع**، لدينا: $u_n > \frac{2}{3}$

ومنه: $\frac{3}{9}u_n > \frac{2}{9}$

وعليه: $\frac{3}{9}u_n + \frac{4}{9} > \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$

أي: $\boxed{u_{n+1} > \frac{2}{3}}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب-تبيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

- لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{9}u_n + \frac{4}{9} - u_n = \left(\frac{3}{9} - 1\right)u_n + \frac{4}{9} = -\frac{6}{9}u_n + \frac{4}{9}$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n > \frac{2}{3}$

ومنه: $-\frac{6}{9}u_n < -\frac{4}{9}$

وعليه: $-\frac{6}{9}u_n + \frac{4}{9} < -\frac{4}{9} + \frac{4}{9}$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$، إذن: (u_n) **متناقصة تماماً.**

2)لدينا: (v_n) متتالية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ-تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية، يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$، ومنه:

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{3}{9}u_n+\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=\frac{3}{9}u_n-\frac{2}{9}=\frac{3}{9}u_n-\frac{3\times 2}{9\times 3}=\frac{3}{9}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{9}v_n$$

أي: $\boxed{v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n}$،

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q=\frac{1}{3}}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0=u_0-\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}}$.

ب-كتابة عبارة v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\right]$:

لدينا: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$ ومنه: $u_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{3}$، إذن: $\boxed{u_n=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\right]}$

جـ) حساب نهاية المتتالية (u_n):

لدينا: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ (لأنّ $-1<\frac{1}{3}<1$)، إذن: $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}}$.

3)حساب، بدلالة n، المجموع S_n حيث، $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$:

لدينا: $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=\left(v_0+\frac{2}{3}\right)+\left(v_1+\frac{2}{3}\right)+\left(v_2+\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(v_2+\frac{2}{3}\right)$

ومنه: $S_n=(v_0+v_1+v_2+\cdots+v_2)+\frac{2}{3}(n-0+1)=v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)+\frac{2}{3}(n+1)$

وعليه: $S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right)+\frac{2}{3}(n+1)=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{2}{3}(n+1)$.

حل التمرين 09: (05 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره $50000DA$ في صندوق التوفير والاحتياط.

يُقدّم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.

يَسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره $5000DA$ (بعد حساب الفوائد).

يُرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008+n$.

1)أ-حساب كلا من u_0، u_1 وu_2:

- $u_0=50000$
- $u_1=\left(u_0+\frac{5}{100}u_0\right)-5000=47500$
- $u_2=\left(u_1+\frac{5}{100}u_1\right)-5000=44875$

ب-المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية **التعليل**

- لدينا: $\begin{cases}u_0+u_2=94875\\2u_1=95000\end{cases}$، ومنه: $u_0+u_2\neq 2u_1$ إذن: (u_n) ليست حسابية.
- لدينا: $\begin{cases}u_0\times u_2=2243750000\\u_1^2=2256250000\end{cases}$، ومنه: $u_0\times u_2\neq u_1^2$ إذن: (u_n) ليست هندسية.

جـ-تبيان لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا، $u_{n+1}=1,05u_n-5000$:

لدينا: $u_1 = \left(u_0 + \frac{5}{100}u_0\right) - 5000$ و $u_2 = \left(u_1 + \frac{5}{100}u_1\right) - 5000$

إذن: $u_{n+1} = \left(u_n + \frac{5}{100}u_n\right) - 5000 = \left(1 + \frac{5}{100}\right)u_n - 5000 = 1{,}05u_n - 5000$

2)لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 100000$.

أ-تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - 100000$

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 100000 = 1{,}05u_n - 5000 - 100000 = 1{,}05u_n - 105000$

ويكون: $v_{n+1} = 1{,}05\left(u_n - \frac{105000}{1{,}05}\right) = 1{,}05(u_n - 100000) = 1{,}05v_n$

أي: $\boxed{v_{n+1} = 1{,}05v_n}$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = 1{,}05}$ وحدّها الأول

$$\boxed{v_0 = u_0 - 100000 = 50000 - 100000 = -50000}$$

ب-كتابة v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = -50000(1{,}05)^n}$.

استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = -50000 \times (1{,}05)^n + 100000$:

لدينا $v_n = u_n - 100000$ إذن: $\boxed{u_n = -50000(1{,}05)^n + 100000}$.

3)أ-حساب المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 (أي بداية جانفي 2016):

بمأنّ u_n هو المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008 + n$

فإنّ u_8 هو المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي 2016.

(لأنّ $2008 + n = 2016$ معناه: $n = 8$)

ومنه: $u_8 = -50000(1{,}05)^8 + 100000 = 26127{,}23DA$.

ب-ايجاد السنة التي لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة:

نضع: $u_n < 5000$ نجد: $-50000(1{,}05)^n + 100000 < 5000$

ومنه: $-50000(1{,}05)^n < -95000$

وعليه: $(1{,}05)^n > \frac{-95000}{-50000}$

أي: $\ln(1{,}05)^n > \ln(1{,}9)$

ويكون: $n > \frac{\ln(1{,}9)}{\ln(1{,}05)}$ (لأنّ $\ln(1{,}05) > 0$ لأنّ $1{,}05 > 1$)

وبالتالي: $n = 14$، إذن: ابتداءً من سنة $(2008 + 14)$ أي: سنة 2022

لا يُسمح لهذا الشخص بسحب المبلغ المُعتاد.

حل التمرين 10: (05 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3} \end{cases}$؛ حيث a وسيط حقيقي.

1-تعيين قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة:

(u_n) **ثابتة** معناه: $\boxed{u_0 = u_n = u_{n+1} = 3}$

ومنه: $3 = \left(\frac{2a+1}{3}\right)3 - \frac{2a+4}{3}$

وعليه: $\frac{6a+3-2a-4}{3}=3$، ويكون: $4a-1=9$، وبالتالي: $4a-1=9$ إذن: $\boxed{a=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}}$.

2-لدينا: $a\neq\frac{5}{2}$،

تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية:

(u_n) حسابية معناه: $\frac{2a+1}{3}=1$ ومنه: $\boxed{a=1}$.

حساب u_n: أساس المتتالية الحسابية (u_n) هو: $r=-\frac{2(1)+4}{3}=-2$

لدينا: $u_n=u_0+nr$ إذن: $\boxed{u_n=2n+3}$.

حساب مجموع n حدا الأولى من المتتالية:

لدينا: $\underbrace{u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}}_{\text{مجموع } n \text{ حداً الأولى}}=((n-1)-0+1)\left(\frac{u_0+u_{n-1}}{2}\right)=n\left(\frac{3-2(n-1)+3}{2}\right)$

ومنه: $\underbrace{u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}}_{\text{مجموع } n \text{ حداً الأولى}}=n\left(\frac{-2n+8}{2}\right)=n(4-n)$

3-تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية:

(u_n) هندسية معناه: $-\frac{2a+4}{3}=0$ ومنه: $\boxed{a=-2}$.

تعيين u_{50}: أساس المتتالية الهندسية (u_n) هو: $q=\frac{2(-2)+1}{3}=-1$

لدينا: $u_n=u_0\times q^n$ وبالتالي: $u_n=3(-1)^n$، إذن: $\boxed{u_{50}=3(-1)^{50}=3}$.

تعيين مجموع 50 حدا الأولى من المتتالية:

لدينا: $\underbrace{u_0+u_1+\cdots+u_{49}}_{\text{مجموع } 50 \text{ حداً الأولى}}=u_0\left(\frac{1-q^{49-0+1}}{1-q}\right)=3\left(\frac{1-(-1)^{50}}{1-(-1)}\right)=0$

4-لدينا: $a=4$ نجد: $\begin{cases}u_0=3\\u_{n+1}=3u_n-4\end{cases}$

البرهان بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ $u_n=3^n+2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n=0$، لدينا: $u_0=3^0+2=3$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n=3^n+2$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1}=3^{n+1}+2}$

البرهان: لدينا: $u_{n+1}=3u_n-4=3(3^n+2)-4=3^1\times3^n+6-4=3^{n+1}+2$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n=3^n+2$.

تبيان أنّ، $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}+4n+3)$:

لدينا: $u_0+u_1+\cdots+u_n=(3^0+2)+(3^1+2)+\cdots+(3^n+2)$

ومنه: $u_0+u_1+\cdots+u_n=(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^n)+2(n-0+1)$

وعليه: $u_0+u_1+\cdots+u_n=(1+3+3^2+\cdots+3^n)+2(n+1)$

ويكون: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \left(\frac{1-3^{n-0+1}}{1-3}\right) + 2(n+1) = \frac{3^{n+1}-1}{2} + 2n + 2$

وبالتالي: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1 + 4n + 4) = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$.

حل التمرين 11: (04 نقاط بكالوريا 2013// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة بـ $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6 \end{cases}$؛

1)أ-حساب الحدود u_1، u_2، u_3 وu_4:

- $u_1 = -\frac{1}{2}u_0 + 6 = -\frac{1}{2}(6) + 6 = 3$
- $u_2 = -\frac{1}{2}u_1 + 6 = -\frac{1}{2}(3) + 6 = \frac{9}{2}$
- $u_3 = -\frac{1}{2}u_2 + 6 = -\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right) + 6 = \frac{15}{4}$
- $u_4 = -\frac{1}{2}u_3 + 6 = -\frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}\right) + 6 = \frac{33}{8}$

ب-دراسة رتابة المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

لدينا: $\begin{cases} u_1 - u_0 = 3 - 6 = -3 \\ u_2 - u_1 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} \end{cases}$، ومنه: $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ وبالتالي: الحدود u_0، u_1، u_2 **ليست مرتبة**

إذن: المتتالية (u_n) **ليست رتيبة على** $\mathbb{N}$.

2)أ-بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$:

لدينا: $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$ ومنه: $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 6 - 4$،

أي: $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 2$ ويكون: $\boxed{u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)}$.

ب-استنتج أن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = u_n - 4$ هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

(نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - 4$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$

وحسب السؤال السابق 2)أ- نجد: $v_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n - 4) = -\frac{1}{2}v_n$ أي: $\boxed{v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n}$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = -\frac{1}{2}}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = u_0 - 4 = 6 - 4 = 2}$.

جـ-كتابة v_n، ثمّ u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$؛ ولدينا: $v_n = u_n - 4$ إذن: $\boxed{u_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4}$.

د-تبيان أنّ (u_n) متقاربة:

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (لأنّ $-1 < -\frac{1}{2} < 1$)، وبالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$، إذن: (u_n) **متقاربة**.

3)باستعمال عبارة u_n، التأكد من نتيجة السؤال 1)ب-: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

- لدينا: $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 6 - u_n = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)u_n + 6 = -\frac{3}{2}u_n + 6$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2}\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4\right] + 6 = -3\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 6 + 6 = -3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

- بمأنّ: $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ متغير الإشارة

فإنّ: الفرق $u_{n+1} - u_n$ **إشارته غير ثابتة** وبالتالي: المتتالية (u_n) **ليست رتيبة على** $\mathbb{N}$.

حل التمرين 12: (05 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الإجابة بصحيح أو خطأ، مع التبرير:

1/ (u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln u_n$.

أ) إذا كانت (u_n) متقاربة فإنّ (v_n) متقاربة. ______ **خطأ.**

التبرير: نأخذ مثلاً $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ نجد: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$، أي أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

- ولدينا: $v_n = \ln u_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n = n\ln\frac{1}{2} = -n\ln 2$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$، (لأنّ $\ln 2 > 0$)، أي أنّ المتتالية (v_n) متباعدة.

ب) إذا كانت (u_n) متناقصة فإنّ (v_n) متناقصة. ______ **صحيح.**

التبرير: (u_n) متناقصة معناه: $u_{n+1} - u_n \le 0$

أي: $u_{n+1} \le u_n$

ومنه: $\ln u_{n+1} \le \ln u_n$

أي: $v_{n+1} \le v_n$

وبالتالي: $v_{n+1} - v_n \le 0$، إذن: (v_n) متناقصة.

جـ) إذا كانت (u_n) هندسية فإنّ (v_n) حسابية. ______ **صحيح.**

التبرير: (u_n) هندسية أساسها q معناه: $u_{n+1} = qu_n$

ومنه: $\ln u_{n+1} = \ln(qu_n)$

وعليه: $\ln u_{n+1} = \ln q + \ln u_n$

أي: $v_{n+1} = \ln q + v_n$، إذن: (v_n) حسابية أساسها $\ln q$.

2/ **إحصاء.**

حل التمرين 13: (04,5 نقطة) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: تسيير وإ.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي، $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$.

1-أ) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n > -3$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$، لدينا: $u_0 = 3 > -3$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n > -3$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} > -3}$

البرهان: **حسب فرضية التراجع،** لدينا: $u_n > -3$

ومنه: $\frac{2}{3}u_n > -2$

وعليه: $\frac{2}{3}u_n - 1 > -2 - 1$

أي: $\boxed{u_{n+1} > -3}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n > -3$.

ب) تبيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

- لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - 1 - u_n = \left(\frac{2}{3} - 1\right)u_n - 1 = -\frac{1}{3}u_n - 1$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n > -3$

ومنه: $-\frac{1}{3}u_n < 1$

وعليه: $-\frac{1}{3}u_n - 1 < 1 - 1$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$، إذن: (u_n) **متناقصة تماماً.**

جـ) استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة:

بمأنّ (u_n) **متناقصة تماماً وَمحدودة من الأسفل** ($u_n > -3$) فإنّها **متقاربة.**

2-لدينا: (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث، $v_0 = 6$ وَ $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = 18$

أ) تبيان أنّ، $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$:

لدينا: $\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right] = \frac{v_0}{1-q}$

لأنّ بمأنّ (v_n) متتالية **هندسية متقاربة** أساسها q، فإنّ $-1 < q < 1$ وبالتالي: $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$.

ب) حساب الأساس q:

لدينا: $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = 18 \\ \lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \frac{v_0}{1-q} = \frac{6}{1-q} \end{cases}$، ومنه: $\frac{6}{1-q} = 18$ وعليه: $1 - q = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

إذن: $\boxed{q = \frac{2}{3}}$.

تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

جـ) البرهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_n = v_n - 3$:

نستعمل البرهان بالتراجع، نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$، لدينا: $u_0 = v_0 - 3 = 6 - 3 = 3$؛ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n = v_n - 3$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} = v_{n+1} - 3}$

البرهان: لدينا: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 = \frac{2}{3}(v_n - 3) - 1 = \frac{2}{3}v_n - 2 - 1 = v_{n+1} - 3$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n = v_n - 3$.

استنتاج عبارة u_n بدلالة n: لدينا: $u_n = v_n - 3$ ومنه: $\boxed{u_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3}$.

حل التمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

اختيار الاقتراح الصحيح الوحيد، مع التبرير:

1) لدينا: (u_n) متتالية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام، $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$.

ب) (u_n) هندسية،

التبرير: لدينا: $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1} = 5 \times 2^n \times \frac{3^n}{3} = \frac{5}{3}(6)^n$

ومنه: $u_{n+1} = \frac{5}{3}(6)^{n+1} = \frac{5}{3} \times 6^n \times 6 = 6u_n$

إذن: (u_n) هندسية أساسها $q = 6$.

2) لدينا: (v_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $v_0 = 1$ وأساسها 4؛ قيمة n التي من أجلها يكون $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 2015$، هي: أ) $n = 31$، التبرير:

- لدينا: (v_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $v_0 = 1$ وأساسها 4؛ نجد: $\begin{cases} v_1 = v_0 + r = 1 + 4 = 5 \\ v_n = v_0 + nr = 4n + 1 \end{cases}$
- ولدينا: $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 2015$ يعني: $(n - 1 + 1)\left(\frac{v_1 + v_n}{2}\right) = 2015$

ومنه: $n\left(\frac{5 + 4n + 1}{2}\right) = 2015$

وعليه: $n(2n + 3) = 2015$

أي: $2n^2 + 3n - 2015 = 0$

ومميزها $\Delta = 16129 > 0$ وبالتالي: $\begin{cases} n_1 = \frac{-3 + \sqrt{16129}}{4} = 31 \in \mathbb{N} \\ n_2 = \frac{-3 - \sqrt{16129}}{4} = -32{,}5 \notin \mathbb{N} \end{cases}$ إذن: $\boxed{n = 31}$.

3) **دّالة عددية**.

4) 5) 6) **إحتمالات**.

حل التمرين 15: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

بيّنت دراسة أنّ 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يُحالون على التقاعد سنوياً وبالمقابل يُوظف 3000 عامل سنوياً. علماً أنّ سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ: u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$ أي $u_0 = 50$.

1) حساب u_1 و u_2:

- u_1 هو عدد العمال سنة $2012 + \mathbf{1}$ أي سنة 2013، ومنه:

$$u_1 = u_0 - \frac{5}{100}u_0 + 3 = \left(1 - \frac{5}{100}\right)u_0 + 3 = 0{,}95u_0 + 3 = 0{,}95(50) + 3 = 50{,}5$$

- u_2 هو عدد العمال سنة $2012 + \mathbf{2}$ أي سنة 2014، ومنه:

$$u_2 = u_1 - \frac{5}{100}u_1 + 3 = \left(1 - \frac{5}{100}\right)u_1 + 3 = 0{,}95u_1 + 3 = 0{,}95(50{,}5) + 3 = 50{,}975$$

2) أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3$:

لدينا: $u_{n+1} = u_n - \frac{5}{100}u_n + 3 = \left(1 - \frac{5}{100}\right)u_n + 3 = 0{,}95u_n + 3$

ب) تبيان أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية:

- **تبيان أنّ (u_n) ليست حسابية.**

ط01: لدينا: $\begin{cases} u_0 + u_2 = 100{,}975 \\ 2u_1 = 110 \end{cases}$، ومنه: $u_0 + u_2 \neq 2u_1$ وعليه: (u_n) ليست حسابية.

ط02: لدينا: $\begin{cases} u_1 - u_0 = 0{,}5 \\ u_2 - u_1 = 0{,}475 \end{cases}$، ومنه: $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ وعليه: (u_n) ليست حسابية.

ط03: لدينا: $u_{n+1} \neq u_n + r$ (حيث $r \in \mathbb{R}$)، وعليه: (u_n) ليست حسابية.

- **تبيان أنّ (u_n) ليست هندسية.**

ط01: لدينا: $\begin{cases} u_0 \times u_2 = 2548{,}75 \\ u_1^2 = 2550{,}25 \end{cases}$، ومنه: $u_0 \times u_2 \neq u_1^2$ وعليه: (u_n) ليست هندسية.

ط02: لدينا: $\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = 1{,}010 \\ \frac{u_2}{u_1} = 1{,}009 \end{cases}$، ومنه: $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ وعليه: (u_n) ليست هندسية.

ط03: لدينا: $u_{n+1} \neq qu_n$ (حيث $q \in \mathbb{R}$)، وعليه: (u_n) ليست هندسية.

3) من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = 60 - u_n$.

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = 60 - u_n$

ومنه: $v_{n+1} = 60 - u_{n+1} = 60 - (0{,}95u_n + 3) = 57 - 0{,}95u_n = 0{,}95\left(\frac{57}{0{,}95} - u_n\right)$

وعليه: $v_{n+1} = 0{,}95(60 - u_n) = 0{,}95v_n$

أي: $\boxed{v_{n+1} = 0{,}95v_n}$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = 0{,}95}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10}$.

ب) كتابة v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = 10(0{,}95)^n}$.

استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = 60 - v_n$ ومنه: $\boxed{u_n = 60 - 10(0{,}95)^n}$.

جـ) تقدير عدد العمال سنة 2017:

لدينا: $2017 = 2012 + \boxed{5}$ أي: $n = 5$، ومنه: $u_5 = 60 - 10(0{,}95)^5 = 52{,}262$

إذن: عدد العمال سنة 2017 يُقدر بـ 52262 عامل.

د) تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n): (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = [60 - 10(0{,}95)^{n+1}] - [60 - 10(0{,}95)^n]$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = 60 - 10(0{,}95)^n \times 0{,}95 - 60 + 10(0{,}95)^n$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = 10(0{,}95)^n(-0{,}95 + 1) = 0{,}5(0{,}95)^n > 0$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$، إذن: (u_n) **متزايدة تماماً.**

هـ) حساب نهاية المتتالية (u_n):

لدينا: $\lim_{n\to+\infty}(-0{,}95)^n = 0$ (لأنّ $-1 < -0{,}95 < 1$)، إذن: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 60}$.

عدد العمال في هذا القطاع الصناعي لن يصل إلى 60000 عاملا.

حل التمرين 16: (04,5 نقطة) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تسيير وإ.

لدينا: (V_n) متتالية **هندسية حدودها موجبة** ومعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} V_0 = 18 \\ V_0 + V_1 + V_2 = 38 \end{cases}$.

1/تبيان أنّ أساس المتتالية (V_n) هو $q = \frac{2}{3}$:

بما أنّ: (V_n) متتالية هندسية حدّها الأول V_0 فإنّ: $V_1 = V_0 \times q = 18q$ وَ $V_2 = V_0 \times q^2 = 18q^2$.

ومنه العلاقة: $V_0 + V_1 + V_2 = 38$ تُصبح: $18 + 18q + 18q^2 = 38$، وعليه: $9q^2 + 9q - 10 = 0$

مميزها: $\Delta = (9)^2 - 4(9)(-10) = 441 > 0$.

ومنه: $\frac{2}{3} = \frac{12}{18} = \frac{-9+\sqrt{441}}{2(9)} = q'$ وَ $\frac{-5}{3} = \frac{-30}{18} = \frac{-9-\sqrt{441}}{2(9)} = q''$ (مرفوض لأنّ حدود (V_n) موجبة).

إذن: $\boxed{q = \frac{2}{3}}$.

2/أ) كتابة عبارة الحد العام V_n بدلالة n:

لدينا: $V_n = V_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{V_n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

ب) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (V_n):

ط01: (ندرس إشارة الفرق $V_{n+1} - V_n$)

لدينا: $V_{n+1} - V_n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 18\left(\frac{2}{3}\right)^n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} - 18\left(\frac{2}{3}\right)^n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{2}{3} - 1\right)$

ومنه: $V_{n+1} - V_n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}\right) = -6\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0$

أي: $V_{n+1} - V_n < 0$.

إذن: (V_n) **متناقصة تماماً.**

ط02: بما أنّ: $\begin{cases} V_0 > 0 \\ 0 < q < 1 \end{cases}$ فإنّ: (V_n) **متناقصة تماماً.**

جـ) حساب نهاية (V_n):

لدينا: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (لأنّ $-1 < \frac{2}{3} < 1$)، إذن: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = 0}$.

3/لدينا: $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$.

أ) حساب S_n بدلالة n:

لدينا: $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1} = V_0\left(\frac{1-q^{(n-1)-0+1}}{1-q}\right) = 18\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right)$

ومنه: $S_n = 18\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\right) = 54\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

استنتاج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$:

لدينا: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 54}$ لأنّ: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

ب) إيجاد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$:

$S_n = \frac{3510}{81}$ يُكافئ: $54\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{3510}{81}$

ومنه: $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{65}{81}$

وعليه: $-\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-16}{81}$

أي: $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^4$ إذن: $\boxed{n=4}$ $(S_4 = \frac{3510}{81})$.

حل التمرين 17: (05 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: (U_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7} \end{cases}$.

1) حساب الحدّين U_1 و U_2:

- $U_1 = \frac{4}{7}U_0 + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}(5) + \frac{3}{7} = \frac{20}{7} + \frac{3}{7} = \frac{23}{7}$
- $U_2 = \frac{4}{7}U_1 + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}\left(\frac{23}{7}\right) + \frac{3}{7} = \frac{92+21}{49} = \frac{113}{49}$

2) أ-البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $U_n > 1$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n=0$، لدينا: $U_0 = 5 > 1$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $U_n > 1$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{U_{n+1} > 1}$

البرهان: **حسب فرضية التراجع**، لدينا: $U_n > 1$

ومنه: $\frac{4}{7}U_n > \frac{4}{7}$

وعليه: $\frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7} > \frac{4}{7} + \frac{3}{7}$

أي: $\boxed{U_{n+1} > 1}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $U_n > 1$.

ب-تبيان أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما: (ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$)

- لدينا: $U_{n+1} - U_n = \frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7} - U_n = \left(\frac{4}{7} - 1\right)U_n + \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}U_n + \frac{3}{7}$
- ولدينا من جهة أخرى: $U_n > 1$

ومنه: $-\frac{3}{7}U_n < -\frac{3}{7}$

وعليه: $-\frac{3}{7}U_n + \frac{3}{7} < -\frac{3}{7} + \frac{3}{7}$

أي: $\boxed{U_{n+1} - U_n < 0}$، إذن: (U_n) **متناقصة تماماً**.

جـ-الاستنتاج بالنسبة لتقارب المتتالية (U_n):

بمأنّ (U_n) **متناقصة تماماً وَمحدودة من الأسفل** ($U_n > 1$) فإنّها **متقاربة**.

3) لدينا: (V_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n - 1$

أ-تبيان أنّ (V_n) متتالية هندسية مُعيّنا أساسها وحدّها الأوّل: (نكتب V_{n+1} بدلالة V_n)

لدينا: $V_n = U_n - 1$ ومنه: $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7} - 1 = \frac{4}{7}U_n - \frac{4}{7} = \frac{4}{7}(U_n - 1) = \frac{4}{7}V_n$

أي: $\boxed{V_{n+1} = \frac{4}{7}V_n}$

إذن: (V_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = \frac{4}{7}}$ وحدّها الأول $\boxed{V_0 = U_0 - 1 = 5 - 1 = 4}$.

ب-كتابة V_n بدلالة n:

لدينا: $V_n = V_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{V_n = 4\left(\frac{4}{7}\right)^n}$.

استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $U_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$:

لدينا: $V_n = U_n - 1$ ومنه: $\boxed{U_n = 4\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1}$.

جـ-حساب نهاية (U_n):

لدينا: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$ (لأنّ $-1 < \frac{4}{7} < 1$)، إذن: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 1}$.

حل التمرين 18: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د01//الموضوع 01//الشعبة: تسيير وا.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$.

1)أ) البرهان بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 3$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$، لدينا: $u_0 = -1 < 3$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n < 3$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} < 3}$

البرهان: **حسب فرضية التراجع**، لدينا: $u_n < 3$

ومنه: $\frac{1}{3}u_n < 1$

وعليه: $\frac{1}{3}u_n + 2 < 1 + 2$

أي: $\boxed{u_{n+1} < 3}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 3$.

ب) تبيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماماً: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

- لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \left(\frac{1}{3} - 1\right)u_n + 2 = -\frac{2}{3}u_n + 2$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n < 3$

ومنه: $-\frac{2}{3}u_n > -2$

وعليه: $-\frac{2}{3}u_n + 2 > -2 + 2$

أي: $\boxed{u_{n+1}-u_n>0}$، إذن: (u_n) **متزايدة تماماً.**

استنتاج أنّ (u_n) متقاربة:

بما أنّ (u_n) **متزايدة تماماً وَمحدودة من الأعلى** ($u_n<3$) فإنّها **متقاربة.**

2)لدينا: (v_n) متتالية معرّفة بـ: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=3-u_n$.

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ثم تعيين حدّها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n=3-u_n$

ومنه: $v_{n+1}=3-u_{n+1}=3-\left(\frac{1}{3}u_n+2\right)=1-\frac{1}{3}u_n=\frac{1}{3}(3-u_n)=\frac{1}{3}v_n$

أي: $\boxed{v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n}$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q=\frac{1}{3}}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0=3-u_0=3-(-1)=4}$.

ب) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

تبيان أنّ من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=3(n-1)+2\left(\frac{1}{3}\right)^n$:

لدينا: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=(3-v_0)+(3-v_1)+\cdots+(3-v_v)$

ومنه: $S_n=3(n-0+1)-(v_0+v_1+\cdots+v_n)=3(n+1)-\left[v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)\right]$

وعليه: $S_n=3(n+1)-\left[4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right)\right]=3(n+1)-\left[6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right]$

وبالتالي: $S_n=3n+3-\left[6\left(1-\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right)^n\right]=3n+3-6+2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

ويكون: $S_n=3n-3+2\left(\frac{1}{3}\right)^n=3(n-1)+2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

حل التمرين 19: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تسيير وا.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=3u_n-2\end{cases}$.

1)حساب u_1، u_2، u_3:

- $u_1=3u_0-2=3(2)-2=6-2=4$
- $u_2=3u_1-2=3(4)-2=12-2=10$
- $u_3=3u_2-2=3(10)-2=30-2=28$

تخمين اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

نلاحظ أنّ $u_0<u_1<u_2<u_3$، المتتالية (u_n) **متزايدة تماماً.**

2)لدينا: (v_n) متتالية عددية معرّفة بـ: من أجل كل n طبيعي، $v_n=u_{n+1}-u_n$.

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يُطلب تعيين حدها الأول: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n=u_{n+1}-u_n$

ومنه: $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=(3u_{n+1}-2)-(3u_n-2)=3u_{n+1}-2-3u_n+2$

وعليه: $v_{n+1}=3(u_{n+1}-u_n)=3v_n$

أي: $\boxed{v_{n+1}=3v_n}$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q=3}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0=u_1-u_0=4-2=2}$.

ب) تعيين v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n=2(3)^n}$.

استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة: (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$)

لدينا: $u_{n+1}-u_n=v_n=2(3)^n>0$، إذن: (u_n) **متزايدة تماماً.**

3) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$.

أ) حساب S_n بدلالة n:

لدينا: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}=v_0\left(\frac{1-(3)^{(n-1)-0+1}}{1-3}\right)=2\left(\frac{1-3^n}{-2}\right)=-(1-3^n)$

ومنه: $S_n=3^n-1$.

ب) تبيان أنّ من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=S_n+u_0$:

ط01: يُمكن استعمال الاستدلال بالتراجع.

ط02: لدينا: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$

ومنه: $S_n=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots+(u_n-u_{n-1})=-u_0+u_n$

إذن: $\boxed{u_n=S_n+u_0}$.

استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n=S_n+u_0=(3^n-1)+2=3^n+1$.

حل التمرين 20: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 01// الشعبة: تسيير وإ.

لدينا: (u_n) متتالية معرّفة بـ: $\begin{cases}u_0=-2\\u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1\end{cases}$.

1) أ) تبيان أنّ من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n<2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n=0$، لدينا: $u_0=-2<2$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n<2$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1}<2}$

البرهان: **حسب فرضية التراجع**، لدينا: $u_n<2$

ومنه: $\frac{1}{2}u_n<1$

وعليه: $\frac{1}{2}u_n+1<1+1$

أي: $\boxed{u_{n+1}<2}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n<2$.

ب) تعيين اتجاه تغيّر المتتالية (u_n): (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$)

- لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+1-u_n=\left(\frac{1}{2}-1\right)u_n+1=-\frac{1}{2}u_n+1$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n<2$

ومنه: $-\frac{1}{2}u_n > -1$

وعليه: $-\frac{1}{2}u_n + 1 > -1 + 1$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$، إذن: (u_n) **متزايدة تماماً.**

استنتاج أنها متقاربة:

بمأنّ (u_n) **متزايدة تماماً** وَ**محدودة من الأعلى** ($u_n < 2$) فإنّها **متقاربة.**

2) لدينا: (v_n) متتالية معرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = 2u_n - 4$.

أ) اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل v_0: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = 2u_n - 4$

ومنه: $v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4 = 2\left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) - 4 = \frac{1}{2} \times 2u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2} \times 2u_n - 2$

وعليه: $v_{n+1} = \frac{1}{2}(2u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$

أي: $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = \frac{1}{2}}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = 2u_0 - 4 = 2(-2) - 4 = -8}$.

ب) ايجاد عبارة v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = 2u_n - 4$ ومنه: $u_n = \frac{v_n+4}{2}$ ويكون: $\boxed{u_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$.

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \left(\frac{1}{2}v_0 + 2\right) + \left(\frac{1}{2}v_1 + 2\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}v_n + 2\right)$

ومنه: $S_n = \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + 2(n - 0 + 1) = \frac{1}{2}\left[v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)\right] + 2(n+1)$

وعليه: $S_n = \frac{1}{2}\left[-8\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right)\right] + 2(n+1) = -8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 2(n+1)$

وبالتالي: $S_n = 8\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) + 2(n+1) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

حل التمرين 21: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د02//الموضوع 02// الشعبة: تسيير وإ.

لدينا: (v_n) متتالية هندسية ذات الأساس e^2 والحد الأول v_0 حيث $v_0 = 1$.

1) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$:

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right) = 1\left(\frac{1-(e^2)^{n+1}}{1-e^2}\right) = \frac{1-e^{2n+2}}{1-e^2}$

2) لدينا: (u_n) وَ (w_n) متتاليتين معرّفتين كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n،

$w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ و $u_n = w_n - v_n$.

تبيان أنّ المتتالية (u_n) حسابية، مع تحديد أساسها r وحدّها الأول u_0:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n = 1(e^2)^n = e^{2n}$

ومنه: $w_n = 2n + 4 + e^{2n} = 2n + 4 + v_n$، إذن: $u_n = w_n - v_n = 2n + 4$

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n.

لدينا: $u_n = 2n + 4$، ومنه: $u_{n+1} = 2(n+1) + 4 = 2n + 2 + 4 = u_n + 2$

أي: $\boxed{u_{n+1} = u_n + 2}$

إذن: (u_n) متتالية **حسابية** أساسها $\boxed{r = 2}$ وحدّها الأول $\boxed{u_0 = 2(0) + 4 = 4}$.

3)إثبات أنّ من أجل كل عدد طبيعي n، $4 + 6 + 8 + \cdots + (2n+4) = (n+1)(n+4)$:

لدينا: $4 + 6 + 8 + \cdots + (2n+4) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$

ومنه: $4 + 6 + 8 + \cdots + (2n+4) = (n+1)\left(\frac{4 + 2n + 4}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{2n+8}{2}\right)$

وعليه: $4 + 6 + 8 + \cdots + (2n+4) = (n+1)(n+4)$

4)استنتاج المجموع T_n بدلالة n حيث، $T_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$:

لدينا: $u_n = w_n - v_n$

ومنه: $T_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n)$

وعليه: $T_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$

ويكون: $T_n = (n+1)(n+4) + \frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2}$.

حل التمرين 22: (04 نقاط بكالوريا 2018// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I)لدينا: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرّفتان كما يلي $\begin{cases} u_0 = 50 \\ u_{n+1} = 0{,}7u_n + 6 \end{cases}$ و $v_n = u_n - 20$.

1)البرهان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $0,7$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0: (نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)

لدينا: $v_n = u_n - 20$

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = (0{,}7u_n + 6) - 20 = 0{,}7u_n - 14 = 0{,}7\left(u_n - \frac{14}{0{,}7}\right)$

وعليه: $v_{n+1} = 0{,}7(u_n - 20) = 0{,}7v_n$

أي: $\boxed{v_{n+1} = 0{,}7v_n}$،

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = 0{,}7}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = u_0 - 20 = (50) - 20 = 30}$.

كتابة عبارة v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = 30(0{,}7)^n}$.

2)أ. كتابة بدلالة n عبارة الحد العام u_n:

لدينا: $v_n = u_n - 20$ ومنه: $\boxed{u_n = 30(0{,}7)^n + 20}$.

ب. تعيين اتجاه تغيّر المتتالية (u_n): (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = (30(0{,}7)^{n+1} + 20) - (30(0{,}7)^n + 20)$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = 30(0{,}7)^n \times 0{,}7 - 30(0{,}7)^n = 30(0{,}7)^n(0{,}7 - 1) = -9(0{,}7)^n < 0$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$، إذن: (U_n) **متناقصة تماماً.**

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,7)^n = 0$ (لأنّ $-1 < 0,7 < 1$)، إذن: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 20}$.

II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة: ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين في سنة $2016+n$ أي $u_0 = 50$

1) u_1 عدد المشتركين في سنة 2017 حيث،

$$u_1 = u_0 - \frac{30}{100}u_0 + 6 = (1-0,3)u_0 + 6 = 0,7u_0 + 6 = 0,7(50) + 6 = 41$$

إذن: عدد المشتركين في سنة 2017 هو 4100 مشترك.

- u_2 عدد المشتركين في سنة 2018 حيث،

$$u_2 = u_1 - \frac{30}{100}u_1 + 6 = (1-0,3)u_1 + 6 = 0,7u_1 + 6 = 0,7(41) + 6 = 34,7$$

إذن: عدد المشتركين في سنة 2017 هو 3470 مشترك.

2) أ. تبرير العبارة $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$:

لدينا: u_{n+1} هو عدد المشتركين في سنة $2016+(n+1)$؛ وَ u_n هو عدد المشتركين في سنة $2016+n$

ومنه: $u_{n+1} = u_n - \frac{30}{100}u_n + 6 = (1-0,3)u_n + 6 = 0,7u_n + 6$

ب. عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك معناه: $u_n < 24$

ومنه: $30(0,7)^n + 20 < 24$

وعليه: $(0,7)^n < \frac{2}{15}$

ويكون: $n\ln(0,7) < \ln\left(\frac{2}{15}\right)$

وعليه: $n > \frac{\ln\left(\frac{2}{15}\right)}{\ln(0,7)}$ (لأنّ $\ln(0,7) < 0$)

وبالتالي: $\boxed{n = 6}$

إذن: ابتداءً من سنة $2016+6$ أي: سنة 2022 يُصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك.

حل التمرين 23: (04 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 2u_{n+1} = u_n + 6 \end{cases}$

$2u_{n+1} = u_n + 6$ معناه: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

1) أ. البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 6$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$، لدينا: $u_0 = -1 < 6$ إذن: $P(\mathbf{0})$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n < 6$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} < 6}$

البرهان: **حسب فرضية التراجع**، لدينا: $u_n < 6$

ومنه: $\frac{1}{2}u_n < 3$

وعليه: $\frac{1}{2}u_n + 3 < 3 + 3$

أي: $\boxed{u_{n+1} < 6}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 6$.

ب. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) : **(ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)**

- لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = \left(\frac{1}{2} - 1\right)u_n + 3 = -\frac{1}{2}u_n + 3$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n < 6$

ومنه: $-\frac{1}{2}u_n > -3$

وعليه: $-\frac{1}{2}u_n + 3 > -3 + 3$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$، إذن: (u_n) **متزايدة تماماً.**

استنتاج أنها متقاربة:

بمأنّ (u_n) **متزايدة تماماً وَمحدودة من الأعلى** ($u_n < 6$) فإنّها **متقاربة.**

2)لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 6$.

أ. تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب حساب حدّها الأول v_0 : **(نكتب v_{n+1} بدلالة v_n)**

لدينا: $v_n = u_n - 6$،

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$

أي: $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = \frac{1}{2}}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = u_0 - 6 = -1 - 6 = -7}$.

ب. كتابة v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = -7\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $v_n = u_n - 6$ ومنه: $\boxed{u_n = -7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6}$.

ولدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (لأنّ $-1 < \frac{1}{2} < 1$)، إذن: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6}$.

3)حساب بدلالة n ما يلي، $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

ومنه: $S_n = (v_0 + 6) + (v_1 + 6) + (v_2 + 6) + \cdots + (v_n + 6)$

وعليه: $S_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n) + 6(n - 0 + 1)$

ويكون: $S_n = v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) + 6(n+1) = -7\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right) + 6(n+1)$

إذن: $S_n = 14\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) + 6(n+1)$

حساب بدلالة n ما يلي، $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$:

لدينا: $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

ومنه: $P_n = (v_0 \times q^0) \times (v_0 \times q^1) \times (v_0 \times q^2) \times \dots \times (v_0 \times q^n)$

وعليه: $P_n = (v_0 \times v_0 \times \dots \times v_0) \times (q^0 \times q^1 \times \dots \times q^n) = v_0^{n+1} \times q^{0+1+\dots+n}$

إذن: $P_n = (-7)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

حل التمرين 24: (04 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$.

1)أ) حساب كلا من u_1 و u_2:

- $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(-4) + 2 = -3 + 2 = -1$
- $u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}(-1) + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$

ب) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 8$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$، لدينا: $u_0 = -4 < 8$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n < 8$ **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} < 8}$

البرهان: **حسب فرضية التراجع**، لدينا: $u_n < 8$

ومنه: $\frac{3}{4}u_n < 6$

وعليه: $\frac{3}{4}u_n + 2 < 6 + 2$

أي: $\boxed{u_{n+1} < 8}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 8$.

2)دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n): (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

- لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n + 2 - u_n = \left(\frac{3}{4} - 1\right)u_n + 2 = -\frac{1}{4}u_n + 2$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n < 8$

ومنه: $-\frac{1}{4}u_n > -2$

وعليه: $-\frac{1}{4}u_n + 2 > -2 + 2$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$

إذن: (u_n) **متزايدة تماماً**.

استنتاج أنّها متقاربة:

بمأنّ (u_n) **متزايدة تماماً وَمحدودة من الأعلى** ($u_n < 8$) فإنّها **متقاربة**.

3)لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$:

لدينا: $v_n = u_n - \alpha$

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = \frac{3}{4}u_n + 2 - \alpha = \frac{3}{4}(v_n + \alpha) + 2 - \alpha = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}\alpha + 2 - \alpha$

وعليه: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + \left(\frac{3}{4} - 1\right)\alpha + 2 = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$.

ب) تعيين قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، يُطلب تعيين حدّها الأول v_0:

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ معناه: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

أي: $-\frac{1}{4}\alpha + 2 = 0$

ومنه: $\boxed{\alpha = 8}$

وبالتالي: $v_n = u_n - 8$ إذن: حدّها الأوّل $\boxed{v_0 = u_0 - 8 = -4 - 8 = -12}$.

جـ) لدينا: $\alpha = 8$، نجد: $v_n = u_n - 8$

التعبير عن v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n}$.

استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$:

لدينا: $v_n = u_n - 8$ ومنه: $\boxed{u_n = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8}$.

4) حساب المجموع S_n بدلالة n حيث، $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (v_1 + 8) + (v_2 + 8) + \cdots + (v_n + 8)$

ومنه: $S_n = (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) + 8(n - 1 + 1) = v_1\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{3}{4}}\right) + 8n$

وعليه: $S_n = -9\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}}\right) + 8n = 36\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right) + 8n$.

حل التمرين 25: (04 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: (u_n) متتالية **حسابية** معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases}$.

1) حساب حدّها الأول u_0 وأساسها r:

- لدينا: $u_n = u_1 + (n-1)r$ ومنه: $\begin{cases} u_2 = u_1 + r = \frac{9}{2} + r \\ u_5 = u_1 + 4r = \frac{9}{2} + 4r \end{cases}$.
- العلاقة $u_2 + 2u_5 = 27$ تُصبح: $\left(\frac{9}{2} + r\right) + 2\left(\frac{9}{2} + 4r\right) = 27$

ومنه: $9r = 27 - 9 - \frac{9}{2}$

وعليه: $9r = \frac{27}{2}$، وبالتالي: $\boxed{r = \frac{3}{2}}$

ويكون: $\boxed{u_0 = u_1 - r = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3}$ (لأنّ $r = u_1 - u_0$)

2)كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا:$u_n = u_0 + nr$ ومنه:$\boxed{u_n = \frac{3}{2}n + 3}$.

3)تبيان أنّ العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية:

نضع:$u_n = 2019$ نجد:$\frac{3}{2}n + 3 = 2019$

ومنه:$\frac{3}{2}n = 2016$

وعليه:$3n = 4032$

وبالتالي:$n = \frac{4032}{3} = 1344 \in \mathbb{N}$ $(u_{1344} = 2019)$

إذن: العدد 2019 حد من حدود المتتالية (u_n).

حساب كلا من المجموعين S_1 وS_2 حيث $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{1344}$
وَ$S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{1344}$:

- لدينا: $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{1344} = (1344 - 1 + 1)\left(\frac{u_1 + u_{1344}}{2}\right)$

ومنه: $S_1 = 1344\left(\frac{\frac{9}{2} + 2019}{2}\right) = 672(2023{,}5) = 1359792$.

- لدينا: $S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{1344} = \frac{(1344-1+1)}{2}\left(\frac{u_2 + u_{1344}}{2}\right) = \frac{1344}{2}\left(\frac{6+2019}{2}\right)$

ومنه: $S_2 = 672(1012{,}5) = 680400$.

-استنتاج حساب المجموع S_3 حيث، $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{1343}$:

نلاحظ أنّ $S_1 = S_2 + S_3$ ومنه:$S_3 = S_1 - S_2 = 679392$

4)لدينا: (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ:$v_n = e^{6-2u_n}$.

-حساب المجموع $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}$:

لدينا: $v_n = e^{6-2u_n} = e^{6-2\left(\frac{3}{2}n+3\right)} = e^{-3n}$ ومنه:$\frac{1}{v_n} = e^{3n}$

وعليه: $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n} = e^{3(0)} + e^{3(1)} + \cdots + e^{3n}$

ويكون: $S_n = (e^3)^0 + (e^3)^1 + \cdots + (e^3)^n = \left(\frac{1-(e^3)^{n-0+1}}{1-e^3}\right) = \frac{1-e^{3(n+1)}}{1-e^3}$.