العبقري في الرياضيات

الدوال كثيرات الحدود

الثالثة ثانوي

الشعب: ● آداب وفلسفة؛

● آداب ولغات أجنبية.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال كثيرات الحدود)

الملخص // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

ملخص: حول الدّوال كثيرات الحدود// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

1 دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة (III) الأهم

f دّالة كثير حدود من الدرجة الثالثة

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ و $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

a، b، c و d أعداد حقيقية، $a\neq 0$

❶ النهايات ✌

$a>0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(ax^3)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(ax^3)=+\infty$

$a<0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(ax^3)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(ax^3)=-\infty$

❷ اتجاه تغيّر الدّالة f

$a>0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$\boxed{f'(x)=3ax^2+2bx+c}$

$a<0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$\boxed{f'(x)=3ax^2+2bx+c}$

كيف نحسب المشتقة: (الواردة في البكالوريات)

بكالوريا	$f(x)=$	القاعدة	$f'(x)=$
2008، م 01	$f(x)=x^3-3x$		$f'(x)=3x^2-3$
2008، م 02	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$		$f'(x)=x^2-4x+3$
2010، م 01	$f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$		$f'(x)=6x^2-18x+12$
2010، م 02	$g(x)=x^3+3x+4$		$f'(x)=3x^2+3$
2011، م 02	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+3$	kx^n تُصبح بعد الإشتقاق knx^{n-1}	$f'(x)=x^2-2x-3$
2012، م 01	$f(x)=-x^3+3x^2-4$		$f'(x)=-3x^2+6x$
2013، م 01	$f(x)=x^3-4x^2+4x$		$f'(x)=3x^2-8x+4$
2015، م 02	$f(x)=x^3-3x+2$		$f'(x)=3x^2-3$
2016، م 02	$f(x)=x^3-6x^2+9x$		$f'(x)=3x^2-12x+9$
2017_د1، م 02	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$		$f'(x)=x^2-4$
2017_د2، م 02	$f(x)=-x^3-3x^2+4$		$f'(x)=-3x^2-6x$
2018، م 01	$f(x)=x^3-3x^2$		$f'(x)=3x^2-6x$
2019، م 02	$f(x)=2x^3+3x^2-5$		$f'(x)=6x^2+6x$

ملاحظة:

- لحساب **نهايات** f، نُركز على معامل x^3؛ ولدراسة **إشارة** $f'(x)$، نُركز على معامل x^2.

إشارة المشتقة $f'(x)$

بصفة عامة: لدينا $f'(x)$ من الشكل $\boxed{\alpha x^2}+\beta x+\gamma$

تذكير: إشارة $\boxed{\alpha x^2}+\beta x+\gamma$ نضع: $f'(x)=0$ نجد: $(*)\ \alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

حسب إشارة المميز $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

$\Delta>0$ (المميز موجب تماما)

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2+\beta x+\gamma$)

x	$-\infty$	x'	x''	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	0 عكس إشارة α	0 مثل إشارة α	

$x''=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ و $x'=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

حيث $\boxed{x'<x''}$، الترتيب في الجدول مهم.

$\Delta=0$ (المميز معدوم)

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2+\beta x+\gamma$)

x	$-\infty$	x'	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	0	مثل إشارة α

$x'=\frac{-\beta}{2\alpha}$.

$\Delta<0$ (المميز سالب تماما)

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2+\beta x+\gamma$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	

إشارة المشتقة $f'(x)$؛ حالة خاصة رقم 01

إذا كانت $f'(x)$ من الشكل $\alpha x^2+\beta x$ $(\gamma=0)$

نقوم بإخراج x كعامل مشترك

إشارة $\alpha x^2+\beta x$ نضع: $f'(x)=0$ نجد: $\alpha x^2+\beta x=0$ ويكون: $x(\alpha x+\beta)=0$ ومنه: $\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=-\frac{\beta}{\alpha}}$

(بعد إيجاد الحلول، نلخص إشارة $f'(x)$ في جدول)

إشارة المشتقة $f'(x)$؛ حالة خاصة رقم 02

إذا كانت $f'(x)$ من الشكل $\alpha x^2+\gamma$ $(\beta=0)$

إشارة $\alpha x^2+\gamma$ نضع: $f'(x)=0$ نجد: $\alpha x^2+\gamma=0$ ويكون: $\boxed{x^2=-\frac{\gamma}{\alpha}}$

$x^2=k>0$ نجد $\boxed{x=\sqrt{k}}$ أو $\boxed{x=-\sqrt{k}}$.

$x^2=0$ نجد $\boxed{x=0}$.

$x^2=k<0$ لا توجد قيم x.

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2+\gamma$)

x	$-\infty$	$-\sqrt{k}$	$\sqrt{k}$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	0 عكس إشارة α	0 مثل إشارة α	

حيث $\boxed{k=-\frac{\gamma}{\alpha}}$.

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2+\gamma$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	0	مثل إشارة α

نكون أمام هذه الحالة في حالة $\boxed{\beta=\gamma=0}$ أي: $f'(x)=\alpha x^2$.

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2+\gamma$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	

❸ جدول تغيّرات الدّالة f

(يكون جدول تغيّرات الدّالة f حسب إشارة $f'(x)$)

❹ معادلة المستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0

معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ **حيث** $f'(x_0)$ هو **معامل توجيه** المماس (Δ).

من البيان

ويُمكن إيجاد $f'(x_0)$ من البيان **باختيار نقطتين من المماس** $N(x_N; y_N)$ و $M(x_M; y_M)$

نجد: $\boxed{f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}}$.

كما يُمكن إيجاد معادلة المماس (Δ) من البيان وذلك باتباع ما يلي:

1) نحسب a: $\boxed{a = f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}}$.

2) ثمّ نحسب b: (b هو ترتيب نقطة تقاطع المماس (Δ) مع محور التراتيب) $\boxed{b = y_N - ax_N}$

أو $\boxed{b = y_M - ax_M}$ في الأخير نجد: $\boxed{(\Delta): y = ax + b}$.

ولدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى مماسه (Δ) : (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

مثلا إذا كان الفرق من الشكل $f(x) - y = x^3$

(ندرس إشارة x)

نُلخص الوضع النسبي في جدول

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية النسبية	(C_f) يقع **تحت** (Δ)	(C_f) **يقطع** (Δ)	(C_f) يقع **فوق** (Δ)

أو كان الفرق من الشكل $f(x) - y = (x + 1)^3$

(ندرس إشارة $(x + 1)$)

نُلخص الوضع النسبي في جدول

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية النسبية	(C_f) يقع **تحت** (Δ)	(C_f) **يقطع** (Δ)	(C_f) يقع **فوق** (Δ)

ملاحظة:

- بمأنّ المنحنى (C_f) **غَيّرَ وضعيته** بالنسبة إلى مماسه (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 **(لتكن هذه النقطة E)** نقول أنّ المنحنى (C_f) **يخترق** المماس (Δ) في النقطة E ونستنتج أنّ النقطة $E(x_0; f(x_0))$ هي نقطة **انعطاف** لـ(C_f).

❺ نقطة الإنعطاف ☹

لتبيان أنّ $E(x_0; y_0)$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f) **نتبع ما يلي:**

1) نحسب $f''(x)$ (انطلاقا من $f'(x)$)

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$\boxed{f''(x) = 6ax + 2b}$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$\boxed{f''(x) = 6ax + 2b}$

2) ندرس إشارة $f''(x)$ (نضع $f''(x) = 0$ نجد $x = x_0$)

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

$f''(x)$ **انعدمت** عند x_0 **مُغيّرة إشارتها** إذن $E(x_0;f(x_0))$ نقطة **انعطاف** لـ(C_f) وهي $\boxed{E(x_0;y_0)}$.

ملاحظة:

إذا طُلب منا تبيان أنّ $f(x)=(\dots)(\dots)$ **ننطلق** من الطرف الثاني $(\dots)(\dots)$ باستعمال النشر نصل إلى الطرف الأول $f(x)$، **نستعملها** في حل معادلة $f(x)=0$.

❻ تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات ☺

أ-تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب

نحسب $f(0)$ **نجد** $f(0)=d$

$\boxed{(C_f)\cap(yy')=\{A(0;d)\}}$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تُذكر في التمرين

ب-تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x)=0$ [حسب اختيار $f(x)$]

نكون أمام (02) حالتين إما:

الحالة 01: إذا كان $\boxed{d=0}$ نختار عبارة $f(x)$ الموجودة في المعطيات ونقوم بإخراج x كعامل مشترك (ثم نحل معادلة جداء)

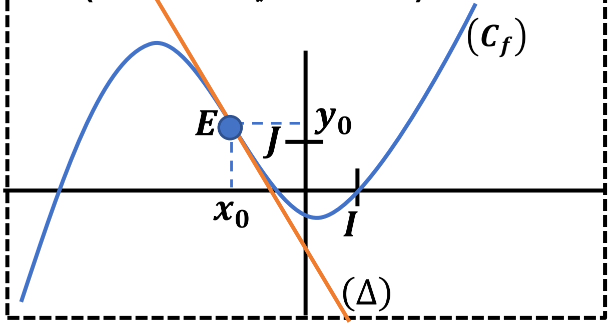
الحالة 02: إذا كان $\boxed{d\neq 0}$ نختار عبارة $f(x)$ الموجودة في الأسئلة (ثم نحل معادلة جداء)

ملاحظة مهمة: عدد الحلول هو عدد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

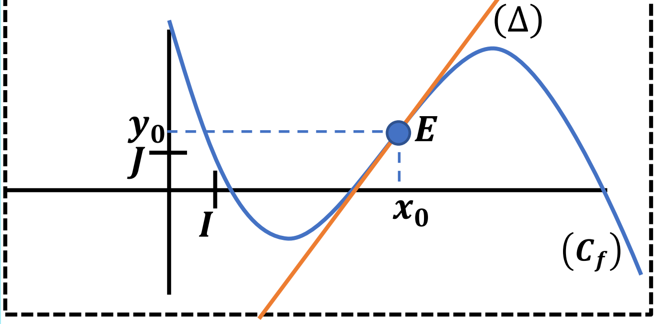
❼ التمثيل البياني للدّالة f (رسم (C_f)) ☺

بصفة عامة: نُعين مجموعة من النقط $M(x\,;f(x))$ و**نصل بينها باليد** نحصل على المنحنى (C_f).

$a>0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)



$a<0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)



❽ إضافات (أسئلة طُرحت في البكالوريا)

السؤال	كيفية الإجابة عليه
1)عيّن نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (D) ذي المعادلة: $y=3x-1$.	نحل المعادلة $f(x)=3x-1$ نجد حلين x_1 و x_2. وبالتالي: $(C)\cap(D)=\{A(x_1\,;y_1)\,;B(x_2\,;y_2)\}$ لإيجاد y_1 نعوض x_1 في عبارة f **أو** في معادلة (D).
2)حل بيانيا المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x: $f(x)<-1$.	حلول المتراجحة $f(x)<-1$ هي **فواصل** نقط (C_f) الواقعة **تحت** المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ **باستثناء** فواصل نقط **التقاطع**، **من البيان نجد** $\boxed{S=\cdots}$.
3)عيّن $f'(1)$ و $f'(-1)$، Bac2010	أ) **مماس المنحنى** (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 **مُوازيا لمحور الفواصل** يعني $\boxed{f'(1)=0}$.

	ب) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1- كذلك مُوازيا لمحور الفواصل يعني $\boxed{f'(-1) = 0}$.
4)بيّن أنّه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما يساوي 5. Bac2011	نحل المعادلة $f'(x) = 5$ نجد حلين.

2 دالة كثير حدود من الدرجة الثانية (II)

f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

$f(x) = ax^2 + bx + c$ و $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

a، b و c أعداد حقيقية، $a \neq 0$

❶ النهايات ✌

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax^2) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax^2) = +\infty$$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax^2) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax^2) = -\infty$$

❷ اتجاه تغيّر الدّالة f

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$\boxed{f'(x) = 2ax + b}$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$\boxed{f'(x) = 2ax + b}$

بصفة عامة: لدينا $f'(x)$ من الشكل $\alpha x + \beta$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	عكس إشارة a	0	مثل إشارة a

تذكير: إشارة $\alpha x + \beta$

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$
$\alpha x + \beta$	عكس إشارة α	0	مثل إشارة α

إشارة $f'(x)$

نضع $f'(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$

ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$

إشارة $f'(x)$

نضع $f'(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$

ومتناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$

❸ جدول تغيّرات الدّالة f ✍

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗	$+\infty$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘	$-\infty$

❹ معادلة المستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0

معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ **حيث** $f'(x_0)$ هو **معامل توجيه** المماس (Δ).

من البيان

ويمكن إيجاد $f'(x_0)$ **من البيان باختيار نقطتين من المماس** $M(x_M; y_M)$ و $N(x_N; y_N)$

نجد: $\boxed{f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}}$.

كما يُمكن إيجاد معادلة المماس من البيان (سنشرح هذا الفصل في الدّالة كثير حدود من الدرجة الثالثة)

ملاحظة:

إذا طُلب منا تبيان أنّ $f(x) = (\dots)(\dots)(\dots)$ **ننطلق** من الطرف الثاني $(\dots)(\dots)(\dots)$ باستعمال النشر نصل إلى الطرف الأول $f(x)$، **نستعملها** في حل معادلة $f(x) = 0$.

❻ تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات ☺

أ-تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب

نحسب $f(0)$ **نجد** $f(0) = c$

$\boxed{(C_f) \cap (yy') = \{A(0; c)\}}$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تُذكر في التمرين

ب-تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x) = 0$ [حسب اختيار $f(x)$]

نكون أمام ثلاث (03) حالات إما:

الحالة 01: للمعادلة حلين متمايزين x' و x''

$\boxed{(C_f) \cap (xx') = \{B(x'; 0); C(x''; 0)\}}$

الحالة 02: للمعادلة حل مضاعف x'

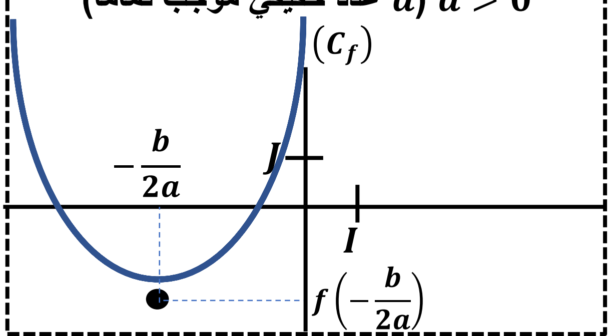
$\boxed{(C_f) \cap (xx') = \{B(x'; 0)\}}$

الحالة 03: المعادلة ليس لها حلول $\boxed{(C_f) \cap (xx') = \{\ \ \}}$

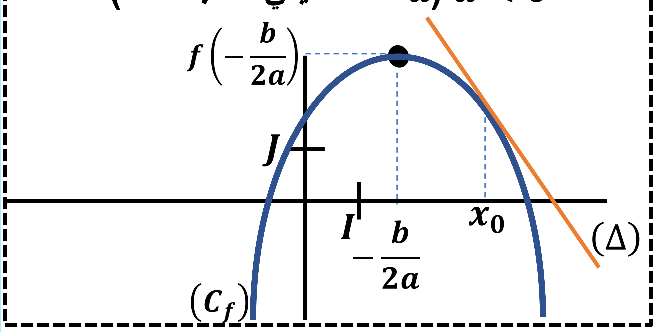
❼ التمثيل البياني للدّالة f (رسم (C_f)) ☺

بصفة عامة: نُعين مجموعة من النقط $M(x; f(x))$ و**نصل بينها باليد** نحصل على المنحنى (C_f).

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)



$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)



3 دالّة كثير حدود من الدرجة الأولى (I)

f دالّة كثير حدود من الدرجة الأولى

$f(x) = ax + b$ و $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

a و b عددين حقيقيين، $a \neq 0$

❶ النهايات ✌

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (ax) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (ax) = +\infty$$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (ax) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (ax) = -\infty$$

❷ اتجاه تغيّر الدّالة f 👌

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$f'(x) = a > 0$

f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$f'(x) = a < 0$

f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

❸ جدول تغيّرات الدّالة f ✍

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$-\infty \searrow +\infty$

❻ تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات 😐

أ-تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب

نحسب $f(0)$ نجد $f(0) = b$

$$\boxed{(C_f) \cap (yy') = \{A(0; b)\}}$$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تُذكر في التمرين

ب-تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{a}$

$$\boxed{(C_f) \cap (xx') = \left\{B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)\right\}}$$

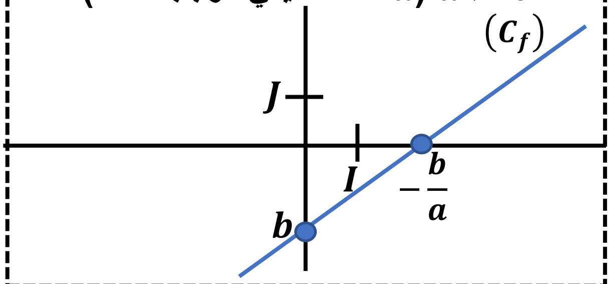
نسمي نقطة التقاطع B إن لم تُذكر في التمرين

❼ التمثيل البياني للدّالة f (رسم (C_f)) 😊

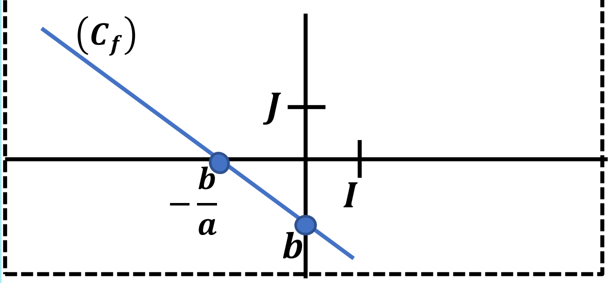
x		
y		

بصفة عامة: منحناها عبارة عن مستقيم ولرسم هذا المستقيم نستعمل جدول مساعد

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)



$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)



مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال كثيرات الحدود -بكالوريات جزائرية) التمارين// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

التمرين 01: (09 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

f دّالة معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^3 - 3x$.

(C_f) المنحنى الممثل للدّالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) احسب $f(-2)$، $f(-1)$.

2)أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) احسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.

جـ) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3)أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

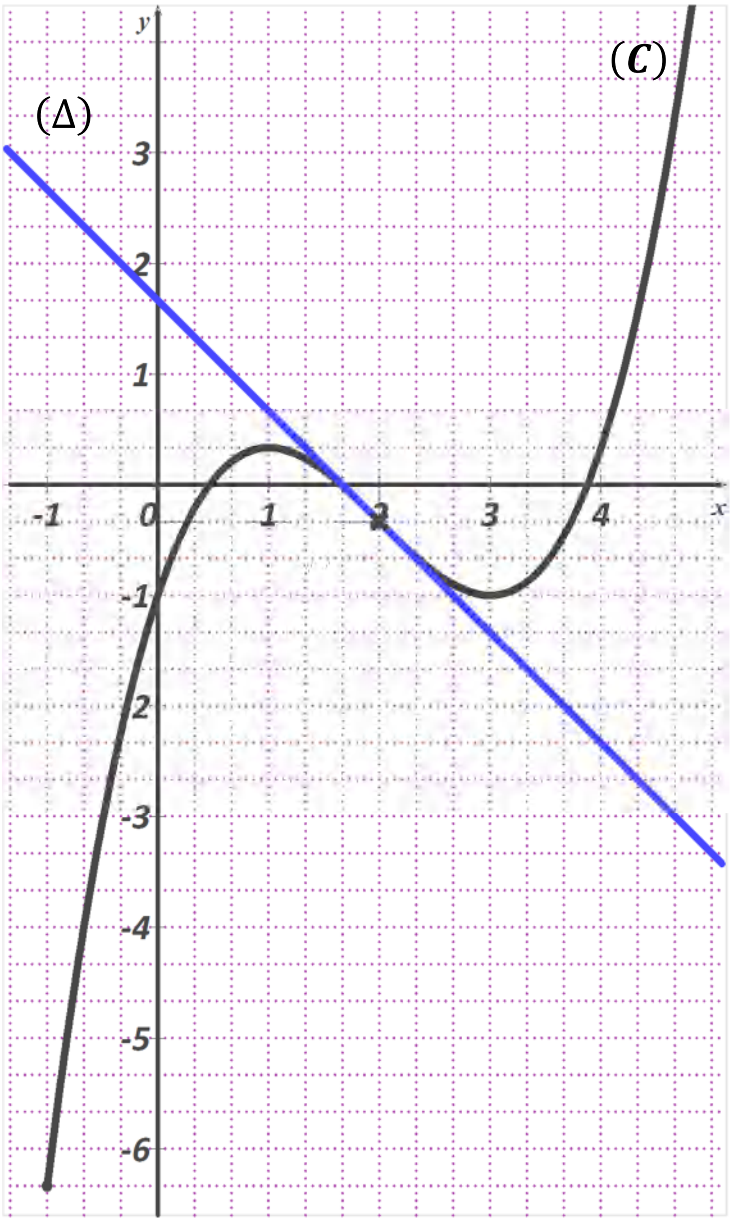
ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط يُطلب تعيين إحداثيي كل منها.

جـ) اكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ). ماذا تستنتج؟

د) أرسم (C_f) و (Δ).

التمرين 02: (10 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.



المنحنى (C) المرسوم في الشكل المقابل هو لدّالة f معرّفة على المجال $[-1;+\infty[$ وَ (Δ) مماس للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 2.

1) خمّن نهاية f عند $+\infty$، **ثمّ بقراءة بيانية** عيّن اتجاه تغيّر f على المجال $[-1;+\infty[$.
شكّل جدول تغيّرات f.

2) من العبارات الآتية:

$f_1(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ ،

$f_2(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$ ،

$f_3(x)=-\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$.

عيّن العبارة المناسبة للدّالة f مبرّرا ذلك.

3) ادرس تغيرات الدّالة f. هل تخميناتك وقراءاتك السابقة صحيحة؟

4) عيّن معادلة للمستقيم (Δ).

5) عيّن إحداثيي نقطة الانعطاف للمنحنى (C).

6) ارسم المستقيم ذو المعادلة $y=-1$، ثم حل بيانيا المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x:
$f(x)<-1$.

7) عيّن نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (D) ذي المعادلة $y=3x-1$.

التمرين 03: (09 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

f الدّالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1.أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2.أدرس اتجاه تغيرات الدّالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3.بيّن أن النقطة $I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

4.أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة I.

5.تحقّق أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=(x-1)^2(2x-5)$
ثم استنتج نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

6.أرسم (Δ) و (C_f).

التمرين 04: (06 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

في كل من الأسئلة الآتية، اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة، مع التعليل.

1. 2. **الحساب**.

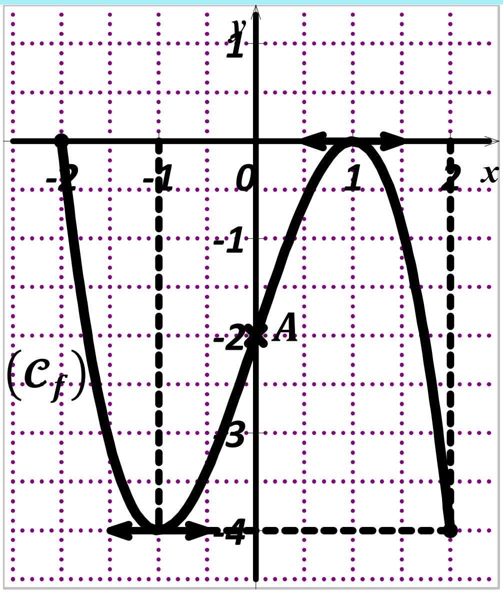
3. g الدّالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 3x + 4$ وَ (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم.

1) الدالة g: أ) متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ب) متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ جـ) ليست رتيبة على $\mathbb{R}$.

2) (C_g) يقبل نقطة انعطاف إحداثياها:

أ) $(-1; 0)$ ب) $(0; 4)$ جـ) $(0; 0)$.

التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.



f دالّة عددية معرّفة على المجال $[-2; 2]$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

انظر الشكل وأجب عن الأسئلة التالية:

1. أ-عيّن $f'(1)$ و $f'(-1)$ (f' هي الدّالة المشتقة للدّالة f)

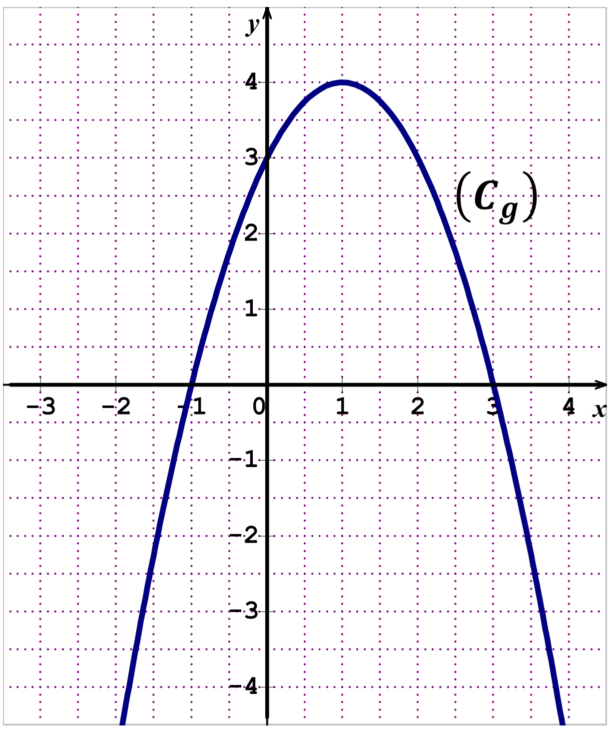
ب-عيّن صورتي العددين (-2) و (-1) بواسطة الدّالة f.

جـ-شكّل جدول تغيّرات الدّالة f على المجال $[-2; 2]$.

2. باستعمال اتجاه تغيّر الدّالة f، قارن العددين $f\left(\frac{3}{2}\right)$ وَ $f(\sqrt{3})$.

3. A هي النقطة من المنحنى (C_f) التي إحداثياها $(0; -2)$، وبفرض أنّ $f'(0) = 3$؛ اشرح كيف يُمكن رسم مماس المنحنى (C_f) في النقطة A ثم ارسمه بعد نقل الشكل.

التمرين 06: (08 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.



أ) في الشكل المقابل، (C_g) هو التمثيل البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

بقراءة بيانية:

1. شكّل جدول تغيّرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

2. عيّن حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

ب) لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3.$$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. بيّن أنّ: $f'(x) = -g(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

2. احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

3. احسب $f(-1)$، $f(3)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

4.بيّن أنّه يوجد مماسّان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كلّ منهما يساوي 5.

5.حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = g(x)$ ثم استنتج احداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C_g) و (C_f).

التمرين 07: (08 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.احسب نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2.احسب $f'(x)$ ثمّ ادرس إشارته. (f' الدّالة المشتقة للدّالة f)

3.شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4.أ) اكتب معادلة للمستقيم (Δ) المماس للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x) - (3x - 5) = -(x - 1)^3$.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ).

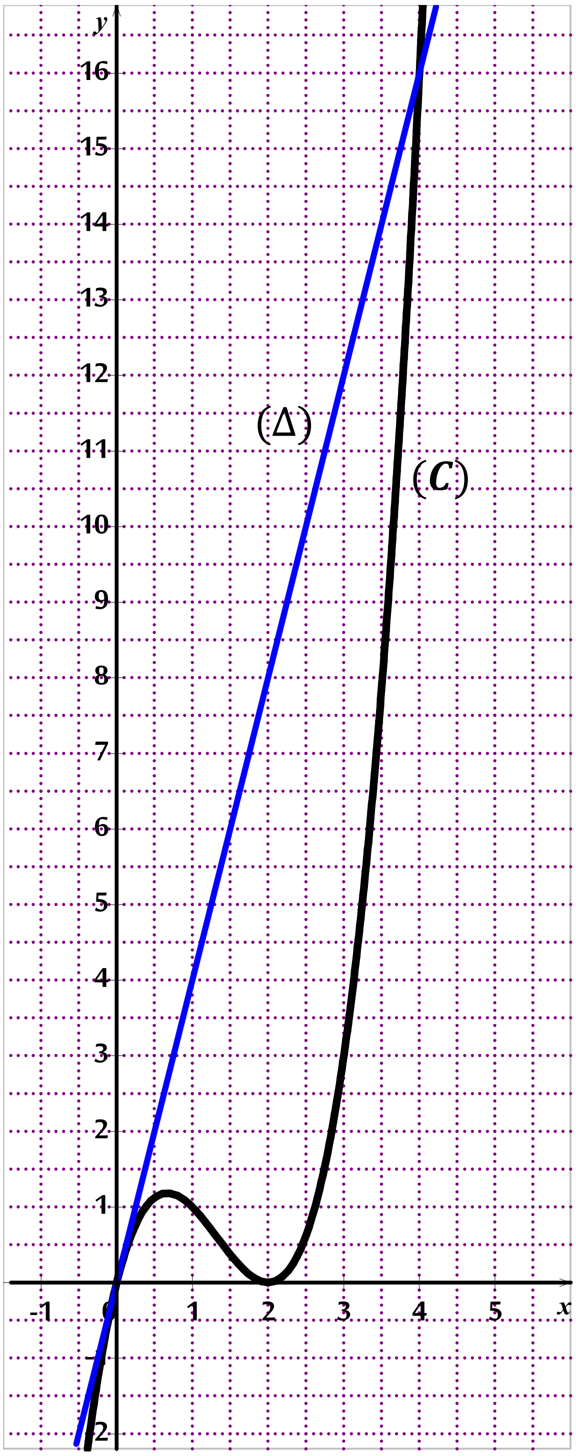
5.احسب $f(-1)$ ثمّ أنشئ المماس (Δ) والمنحنى (C).

التمرين 08: (08 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

في الشّكل المقابل، المنحنى (C) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$،

والمستقيم (Δ) هو مماس للمنحنى (C) عند مبدأ المعلم O، حيث: $y = g(x)$ معادلة له.



I) بقراءة بيانية، عيّن:

1- عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

2- إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

3- عدد حلول المعادلة: $f(x) = g(x)$.

II) باستعمال عبارة الدّالة f :

1-أ) احسب نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) احسب $f'(x)$، ثمّ ادرس إشارتها.

ج) شكّل جدول تغيرات الدّالة f.

2-أ) أثبت أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x) = x(x-2)^2$.

ب) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

3-أ) بيّن أنّ: $g(x) = 4x$.

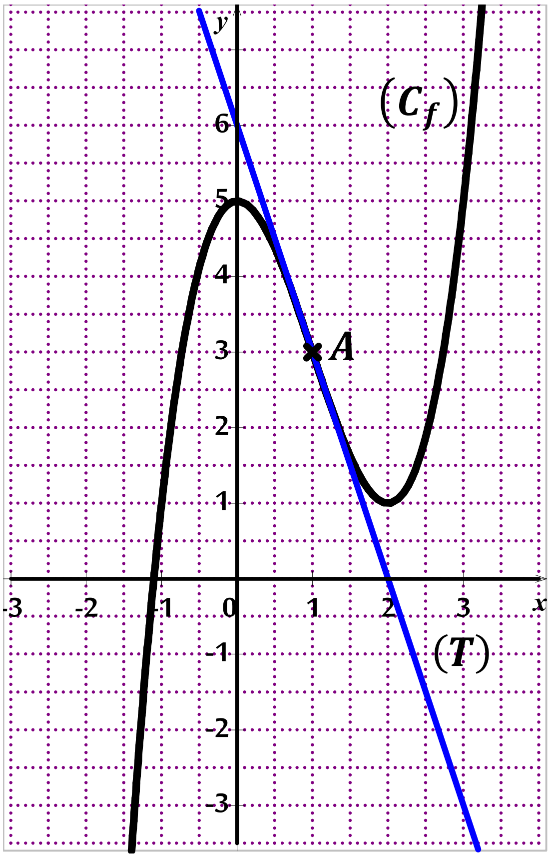
ب) عيّن فواصل نقط تقاطع (C) مع (Δ).

4-بيّن أنّ، (C) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $\frac{4}{3}$.

5-عيّن بيانيا، مجموعة قيم الوسيط الحقيقي m، التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = m$ ثلاثة حلول متمايزة.

التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وَ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(1;3)$ كما في الشكل:



I) بقراءة بيانية:

1) خمّن نهايتي الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدّالة f على $\mathbb{R}$ وشكّل جدول تغيراتها.

3) أ) اكتب معادلة للمماس (T).

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمماس (T).

ثمّ استنتج أنّ A هي نقطة الانعطاف للمنحنى (C_f).

4) عيّن حلول المتراجحة: $f(x) > 5$.

II) إذا علمت أنّ f معرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل:

$f(x) = x^3 + ax^2 + b$ حيث: a و b عددان حقيقيان.

1) عيّن العددين a و b.

2) تحقّق من صحة إجاباتك السابقة حول:

أ) اتجاه تغير الدالة f.

ب) معادلة المماس (T).

جـ) نقطة الانعطاف A.

د) حلول المتراجحة: $f(x) > 5$.

التمرين 10: (08 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f؛ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها.

4) اكتب معادلة للماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

5) احسب $f(-2)$ و $f(2)$؛ ثمّ أنشئ (T) و (C_f).

6) أ) أنشئ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 2$.

ب) حل، في $\mathbb{R}$، بيانيا المتراجحة $f(x) \geq x + 2$.

التمرين 11: (08 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 02// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = (3x-3)(x-3)$.

ب) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3)أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة E ذات الفاصلة 2.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)-(-3x+8)=(x-2)^3$.

جـ) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المماس (T).

د) برّر أنّ E نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

4)أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=x(x-3)^2$.

ب) جِد إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل حور الفواصل.

5)احسب $f(4)$ ثمّ أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f).

التمرين 12: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: آ وفلسفة؛ لغ أ.

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$.

(C_f) التّمثيل البياني للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)احسب النهايتين التاليتين: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2)أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=(x-2)(x+2)$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f.

3)شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$، استنتج إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات.

5)بيّن أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي مبدأ المعلم.

6)اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6)ارسم (T) والمنحنى (C_f).

التمرين 13: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 02// الشعبة: آ وفلسفة؛ لغ أ.

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^3-3x^2+4$.

(C_f) التّمثيل البياني للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2)تحقّق أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=(-x+1)(x+2)^2$ ثمّ جِد إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات.

3)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4)بيّن أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف E إحداثياتها $(-1;2)$.

5)اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة E.

6)ارسم (Δ) و (C_f).

التمرين 14: (08 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 01// الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

f الدّالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2$

وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)احسب نهاية الدّالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$.

2)أ) احسب $f'(x)$ ثمّ ادرس إشارتها.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3)بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين احداثييها.

4)اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5)أ) تحقّق من أنّ النقطة O (مبدأ المعلم) والنقطة A ذات الفاصلة 3 هما نقطتي تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

6)حل في $\mathbb{R}$ بيانيا المتراجحة: $f(x) > 0$.

7)بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x) + 4 = (x+1)(x-2)^2$، ثمّ حل المعادلة $f(x) = -4$.

التمرين 15: (04 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أحسب نهايتي الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2)أ) أحسب $f'(x)$، ثمّ ادرس إشارتها على $\mathbb{R}$. (f' تُرمز إلى الدّالة المشتقة الأولى للدّالة f)

ب) احسب $f(0)$ و $f(-1)$، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3)أ) تحقق أنّه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = (x-1)(2x^2+5x+5)$.

ب) عيّن نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

4)بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثم أكتب معادلة لـ(T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A.

5)أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f).

6)حل بيانيا المتراجحة: $f(x) \geq 0$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال كثيرات الحدود -بكالوريات جزائرية) الحلول // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

حل التمرين 01: (09 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

لدينا: $f(x) = x^3 - 3x$ وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1) حساب $f(-2)$ ؛ $f(-1)$:

بالتعويض نجد:

- $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) = -8 + 6 = -2$؛
- $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = +2$.

2)أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$

ب) حساب $f'(x)$ ثم دراسة إشارتها:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$؛ ولدينا: $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 3}$.

دراسة إشارة $f'(x)$:

نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $3x^2 - 3 = 0$

ومنه: $x^2 = 1$

وعليه: $\boxed{x = \sqrt{1} = 1}$ أو $\boxed{x = -\sqrt{1} = -1}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

جـ) تشكّيل جدول تغيّرات الدّالّة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

حيث: $f(1) = (1)^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$ وَ $f(-1) = 2$.

3)أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$:

$f(x) = 0$ معناه: $x^3 - 3x = 0$

ومنه: $x(x^2 - 3) = 0$

وعليه: $x = 0$ أو $x^2 - 3 = 0$

ويكون: $x = 0$ أو $x^2 = 3$

وبالتالي: $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = \sqrt{3}}$ أو $\boxed{x = -\sqrt{3}}$؛ إذن: $S = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$.

ب) استنتاج أنّ المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط يُطلب تعيين إحداثيي كل منها:

بمأنّ: للمعادلة $f(x) = 0$ **ثلاث حلول** في $\mathbb{R}$،

فـإنّ: المنحنى (C_f) **يقطع** محور الفواصل في **ثلاث نقاط** إحداثييها هي: $(\sqrt{3}; 0)$؛ $(0; 0)$ وَ $(-\sqrt{3}; 0)$.

جـ) كتابة معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0:

معادلة (Δ) من الشكل: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3 \\ f(0) = (0)^3 - 3(0) = 0 \end{cases}$، بالتعويض نجد: $\boxed{(\Delta): y = -3x}$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = (x^3 - 3x) - (-3x) = x^3$

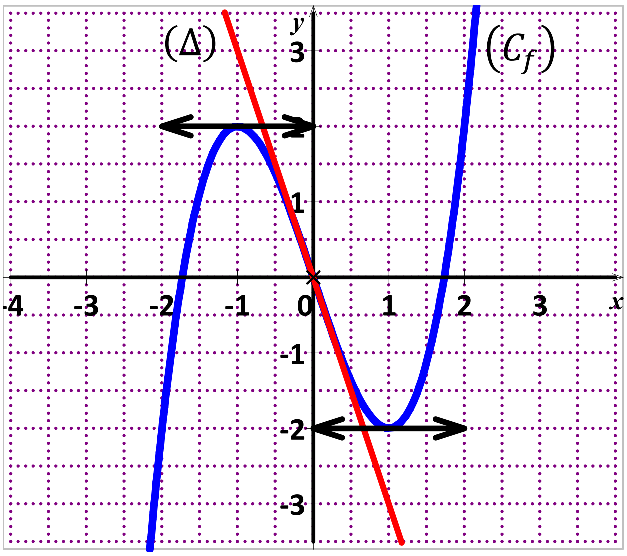
إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة x.

وبالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) يقع **تحت** (Δ)	(C_f) **يقطع** (Δ)	(C_f) يقع **فوق** (Δ)

الإستنتاج: النقطة **ذات الفاصلة 0 نقطة انعطاف** لـ (C_f).

د) رسم (C_f) و (Δ):



حل التمرين 02: (10 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

لدينا: المنحنى (C) هو لدّالة f معرّفة على المجال $]-1; +\infty[$

وَ (Δ) مماس للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 2.

1) تخمين نهاية f عند $+\infty$: $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

بقراءة بيانية:

تعيين اتجاه تغيّر f على المجال $]-1; +\infty[$:

من البيان: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-1; 1]$ وَ $[3; +\infty[$ وَ**متناقصة تماما** على المجال $[1; 3]$.

تشكيل جدول تغيّرات f :

من البيان:

x	-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{19}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) من العبارات الآتية: $f_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$،

$f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$،

$f_3(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

تعيين العبارة المناسبة للدّالة f مع التبرير:

- لدينا: $f(0) = -1$ وبمأنّ: $f_2(0) = +1$ فـإنّ: $\boxed{f(x) \neq f_2(x)}$.
- ولدينا: $f(1) = \frac{1}{3}$ وبمأنّ:

$$f_3(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) - 1 = -\frac{1}{3} - 2 + 3 - 1 = \frac{-1-6+9-3}{3} = -\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}$$

فـإنّ: $\boxed{f(x) \neq f_3(x)}$.

- إذن: $\boxed{f(x) = f_2(x)}$.

ملاحظة: توجد طُرق أخرى.

3) دراسة تغيرات الدّالة f :

لدينا: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ وَ $D_f = [-1; +\infty[$.

- لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$

وَ $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1) - 1 = \frac{-1}{3} - 2 - 3 - 1 = \frac{-1-6-9-3}{3} = \frac{-19}{3}$

- f قابلة للاشتقاق على $[-1; +\infty[$، ولدينا: $\boxed{f'(x) = x^2 - 4x + 3}$.

إشارة $f'(x)$:

نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $x^2 - 4x + 3 = 0$

مميزها: $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4 > 0$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4+2}{2} = 3$ وَ $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4-2}{2} = 1$.

وبالتالي:

x	-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{19}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

نعم تخميناتي وقراءاتي السابقة صحيحة.

4) تعيين معادلة للمستقيم (Δ):

ط01) حسابياً:

لدينا: (Δ) مماس للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 2،

ومنه: معادلة (Δ) من الشكل: $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = -1 \\ f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - 2(2)^2 + 3(2) - 1 = \frac{8-24+18-3}{3} = \frac{-1}{3} \end{cases}$

بالتعويض نجد: $y = -(x-2) - \frac{1}{3}$ ومنه: $y = -x + 2 - \frac{1}{3}$ إذن: $\boxed{(\Delta): y = -x + \frac{5}{3}}$.

ط02) بيانياً:

5) تعيين إحداثيي نقطة الانعطاف للمنحنى (C):

لدينا: $\boxed{f''(x) = 2x - 4}$.

إشارة $f''(x)$:

نضع: $f''(x) = 0$ نجد: $2x - 4 = 0$ ومنه: $\boxed{x = 2}$.

وبالتالي:

x	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

نلاحظ أنّ $f''(x)$ **تنعدم** عند **2**، **وَتُغيّر إشارتها** إذن: النقطة $\omega(2; f(2))$ أي: $\omega\left(2; -\frac{1}{3}\right)$ **نقطة انعطاف** لـ(C).

6) رسم المستقيم ذو المعادلة $y = -1$، ثم حل بيانيا المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x؛ $f(x) < -1$:

حلول المتراجحة $f(x) < -1$ بيانياً هي **فواصل نقط** المنحنى (C) **الواقعة تحت** المستقيم ذو المعادلة $y = -1$، **باستثناء فواصل** نقط **التقاطع**.

من البيان نجد: $\boxed{S = [-1; 0[}$.

7) تعيين نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (D) ذي المعادلة $y = 3x - 1$:

ط01) حسابياً:

نحل المعادلة $f(x) = y$:

$f(x) = y$ معناه: $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 3x - 1$

ومنه: $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 = 0$

وعليه: $x^2\left(\frac{1}{3}x - 2\right) = 0$

ويكون: $x^2 = 0$ أو $\frac{1}{3}x - 2 = 0$

وبالتالي: $x = 0$ أو $x = 6$

إذن: يتقاطع (C) مع (D) في نقطتين هما: $A(0; -1)$ وَ $B(6; 17)$.

ط02) بيانياً:

حل التمرين 03: (09 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

لدينا: $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1.حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **:**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3) = +\infty$

2.دراسة اتجاه تغيرات الدّالّة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$؛ ولدينا: $\boxed{f'(x) = 6x^2 - 18x + 12}$.

دراسة إشارة $f'(x)$:

نضع: $f'(x) = 0$ أي: $6x^2 - 18x + 12 = 0$

مميزها: $\Delta = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4(6)(12) = 324 - 288 = 36 > 0$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-18)+\sqrt{36}}{2(6)} = \frac{18+6}{12} = 2$ وَ $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-18)-\sqrt{36}}{2(6)} = \frac{18-6}{12} = 1$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty; 1]$ وَ $[2; +\infty[$ وَ**متناقصة تماما** على المجال $[1; 2]$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

حيث: $f(1) = 0$ وَ $f(2) = -1$.

3.تبيان أن النقطة $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f):

لدينا: $\boxed{f''(x) = 12x - 18}$.

إشارة $f''(x)$:

نضع: $f''(x) = 0$ نجد: $12x - 18 = 0$ ومنه: $\boxed{x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

نلاحظ أنّ $f''(x)$ **تنعدم** عند $\frac{3}{2}$، وَ**تُغيّر إشارتها** إذن: النقطة $I\left(\frac{3}{2}; f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ أي: $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ **نقطة انعطاف** لـ(C_f).

4.كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة I: $\left(x_0 = \frac{3}{2}\right)$

معادلة (Δ) من الشكل: $y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$

ولدينا: $\begin{cases} f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 18\left(\frac{3}{2}\right) + 12 = 6\left(\frac{9}{4}\right) - 18\left(\frac{3}{2}\right) + 12 = \frac{27-45+24}{2} = -\frac{3}{2} \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

بالتعويض نجد: $y = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$ ومنه: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{1}{2}$ إذن: $\boxed{(\Delta): y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4}}$.

5.التحقّق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x) = (x-1)^2(2x-5)$:

لدينا: $(x-1)^2(2x-5) = [(x-1)(x-1)](2x-5) = (x^2 - x - x + 1)(2x-5)$

ومنه: $(x-1)^2(2x-5) = (x^2 - 2x + 1)(2x-5)$

ويكون: $(x-1)^2(2x-5) = 2x^3 - 5x^2 - 4x^2 + 10x + 2x - 5$

إذن: $(x-1)^2(2x-5) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = f(x)$ (وهو المطلوب).

استنتاج نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x) = 0$)

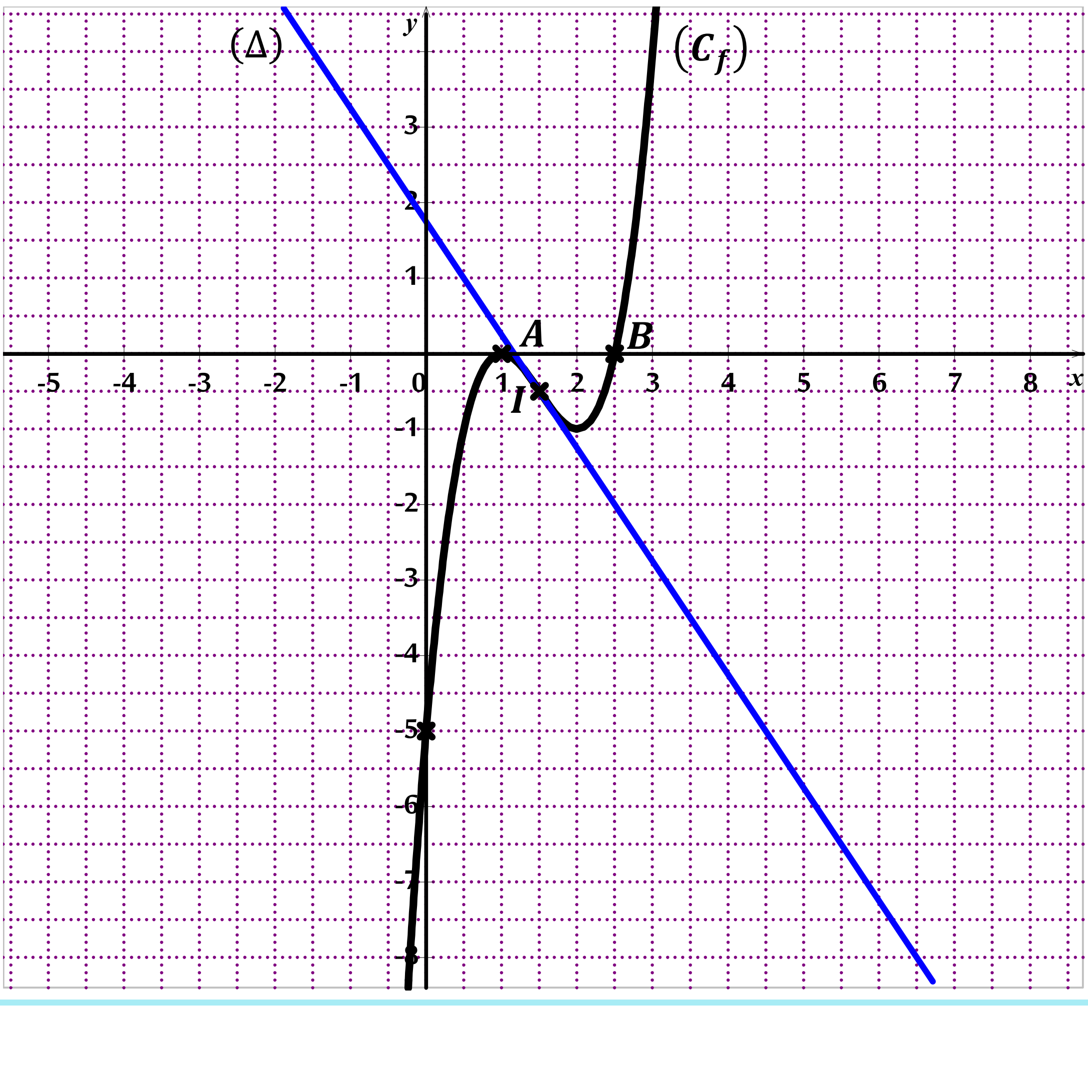
لدينا: $f(x) = 0$ معناه: $(x-1)^2(2x-5) = 0$

ومنه: $(x-1)^2 = 0$ أو $(2x-5) = 0$

وعليه: $x - 1 = 0$ أو $2x - 5 = 0$

ويكون: $\boxed{x = 1}$ أو $\boxed{x = \frac{5}{2}}$، إذن: $\boxed{(C_f) \cap (xx') = \left\{A(1;0); B\left(\frac{5}{2};0\right)\right\}}$.

6.رسم (Δ) و (C_f):



حل التمرين 04: (06 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

اختيار الإجابة الصحيحة، مع التعليل:

1. 2. **الحساب.**

3.لدينا: $D_g = \mathbb{R}$ وَ $g(x) = x^3 + 3x + 4$ وَ (C_g) التمثيل البياني لـ g في مستو منسوب إلى معلم.

1) الدالة g: أ) متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

لأنّ: g **قابلة للإشتقاق** على $\mathbb{R}$، ولدينا: $\boxed{g'(x) = 3x^2 + 3 > 0}$

ومنه: g **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$، إذن: الإجابة الصحيحة هي: أ).

2) (C_g) يقبل نقطة انعطاف إحداثياها: **ب)** $(0;4)$، **لأنّ:**

لدينا: $\boxed{g''(x) = 6x}$.

إشارة $f''(x)$:

نضع: $g''(x) = 0$ نجد: $6x = 0$ ومنه: $\boxed{x = 0}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		-	0	+	

نلاحظ أنّ $g''(x)$ **تنعدم** عند 0، **وَتُغيّر إشارتها** إذن: النقطة $I(0; g(0))$ أي: $I(0;4)$ **نقطة انعطاف** لـ (C_g).

حل التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

f دالة عددية معرّفة على المجال $[-2;2]$، و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

من البيان:

1.أ-تعيين $f'(1)$ و $f'(-1)$:

نلاحظ من الشكل أنّ (C_f) يقبل في النقطتين اللّتين فاصلتاهما 1 وَ (-1) مماسين **يُوازيان** محور الفواصل،

إذن: $\boxed{f'(1) = 0}$ وَ $\boxed{f'(-1) = 0}$.

ب-تعيين صورتي العددين (-2) و (-1) بواسطة الدّالة f :

من الشكل نجد: $\boxed{f(-2) = 0}$ وَ $\boxed{f(-1) = -4}$.

جـ-تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f على المجال $[-2;2]$:

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↘	-4	↗	0	↘	-4

2.باستعمال اتجاه تغيّر الدّالة f، مقارنة العددين $f\left(\frac{3}{2}\right)$ وَ $f(\sqrt{3})$:

العددين $\frac{3}{2}$ وَ $\sqrt{3}$ ينتميان إلى المجال $[1;2]$، والدّالة f **متناقصة تماما** على هذا المجال $[1;2]$؛

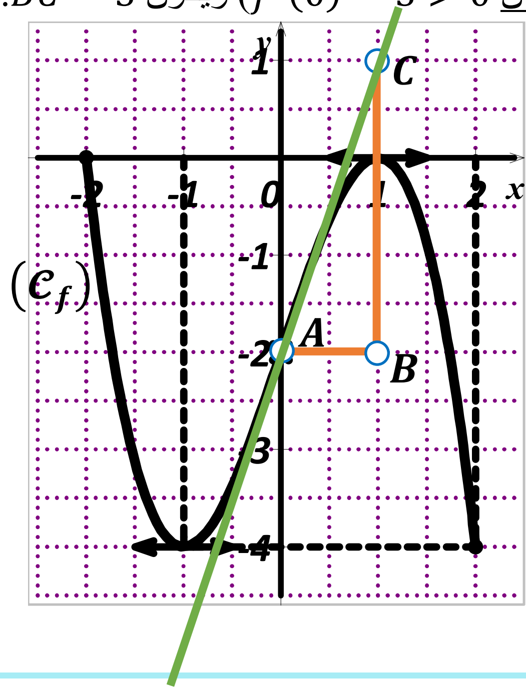
وبمأنّ $\frac{3}{2} < \sqrt{3}$ فإنّ: $\boxed{f(\sqrt{3}) > f\left(\frac{3}{2}\right)}$.

3.لدينا: A هي النقطة من المنحنى (C_f) التي إحداثياها $(0;-2)$، وبفرض أنّ $f'(0) = 3$؛

شرح كيف يُمكن رسم مماس المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة A ثم رسمه:

لإنشاء هذا المماس؛ نتبع ما يلي:

- نُنشئ نقطة B بحيث المستقيم (AB) يُوازي محور الفواصل، وتكون B على يمين A ويكون $AB = 1$.
- نُنشئ نقطة C بحيث المستقيم (BC) يُوازي محور التراتيب، وتكون C أعلى من B (لأنّ $f'(0) = 3 > 0$) ويكون $BC = 3$.



حل التمرين 06: (08 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

أ) لدينا: $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ وَ $D_g = \mathbb{R}$. (**ملاحظة:** g دّالة كثير حدود من الدرجة الثانية)

بقراءة بيانية:

1.تشكّيل جدول تغيّرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

2.تعيين حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	0	-	

ب) لدينا: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$ وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1.تبيان أنّ $f'(x) = -g(x)$ ثمّ استنتاج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$؛ ولدينا: $f'(x) = \frac{1}{3}(3)x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - 3$

ومنه: $f'(x) = -(-x^2 + 2x + 3) = -g(x)$

(لأنّ $g(x) = -x^2 + 2x + 3$)

استنتاج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

2.حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$

3.حساب $f(-1)$، $f(3)$ ثمّ تشكّيل جدول تغيّرات الدالة f :

بالتعويض نجد:

- $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 3 = \frac{1}{3}(-1) - (1) + 3 + 3 = -\frac{1}{3} + 5$

ومنه: $f(-1) = \frac{-1+15}{3} = \frac{14}{3}$.

- $f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 3(3) + 3 = (3)^2 - 9 - 9 + 3 = -9 + 3 = -6$.

تشكّيل جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{14}{3}$		-6		$+\infty$

4.تبيان أنّه يوجد مماسّان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كلّ منهما يساوي 5:

نضع: $f'(x) = 5$ أي: $x^2 - 2x - 3 = 5$

ومنه: $x^2 - 2x - 8 = 0$

مميزها: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2(1)} = \frac{2+6}{2} = 4$ و $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2(1)} = \frac{2-6}{2} = -2$.

(أي: $f'(-2) = f'(4) = 5$)

إذن: يوجد مماسّان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كلّ منهما يساوي 5.

5.حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة، $f(x) = g(x)$ ثم استنتاج احداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C_g) و (C_f):

لدينا: $f(x) = g(x)$ معناه: $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3 = -x^2 + 2x + 3$

ومنه: $\frac{1}{3}x^3 - 3x = 2x$

وعليه: $\frac{1}{3}x^3 - 5x = 0$

ويكون: $x\left(\frac{1}{3}x^2 - 5\right) = 0$

وعليه: $x = 0$ أو $\frac{1}{3}x^2 - 5 = 0$

أي: $x = 0$ أو $x^2 - 15 = 0$

ويكون: $x = 0$ أو $x^2 = 15$

وبالتالي: $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = \sqrt{15}}$ أو $\boxed{x = -\sqrt{15}}$؛ إذن: $S = \{-\sqrt{15}; 0; \sqrt{15}\}$.

استنتاج احداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C_g) و (C_f):

بمأنّ: للمعادلة $f(x) = g(x)$ **ثلاث حلول** في $\mathbb{R}$، فإنّ: المنحنيين (C_f) وَ (C_g) **يتقاطعان** في **ثلاث نقاط** إحداثييها هي: $(\sqrt{15}; \mathbf{-12 + 2\sqrt{15}})$؛ $(0; \mathbf{3})$ وَ $(-\sqrt{15}; \mathbf{-12 - 2\sqrt{15}})$.

حل التمرين 07: (08 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

لدينا: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1. حساب نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$

2. حساب $f'(x)$ ثمّ دراسة إشارتها:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$؛ ولدينا: $\boxed{f'(x) = -3x^2 + 6x}$.

دراسة إشارة $f'(x)$:

نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $-3x^2 + 6x = 0$ ومنه: $-3x(x - 2) = 0$ وعليه: $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = 2}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

3. تشكّيل جدول تغيّرات الدّالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

حيث: $f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 - 4 = -8 + 3(4) - 4 = 0$ وَ $f(0) = -4$.

4. أ) كتابة معادلة للمستقيم (Δ) المماس للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1:

معادلته (Δ) من الشكل: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(1) = -3(1)^2 + 6(1) = -3 + 6 = 3 \\ f(1) = -(1)^3 + 3(1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2 \end{cases}$،

بالتعويض نجد: $y = 3(x - 1) - 2$ ومنه: $y = 3x - 3 - 2$، إذن: $\boxed{(\Delta): y = 3x - 5}$.

ب) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x) - (3x - 5) = -(x - 1)^3$:

- لدينا: $f(x) - (3x - 5) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

ومنه: $\boxed{f(x) - (3x - 5) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1}$ **(1)**

- ولدينا من جهة أخرى: $-(x - 1)^3 = -[(x - 1)(x - 1)(x - 1)]$

ومنه: $-(x - 1)^3 = -[(x^2 - x - x + 1)(x - 1)] = -[(x^2 - 2x + 1)(x - 1)]$

وعليه: $-(x - 1)^3 = -(x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1) = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$

وبالتالي: $\boxed{-(x-1)^3 = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1}$ **(2)**

من **(1)** وَ**(2)** نجد: $\boxed{f(x) - (3x-5) = -(x-1)^3}$ (وهو المطلوب).

ج) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = f(x) - (3x-5) = -(x-1)^3$

إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة $-(x-1)$.

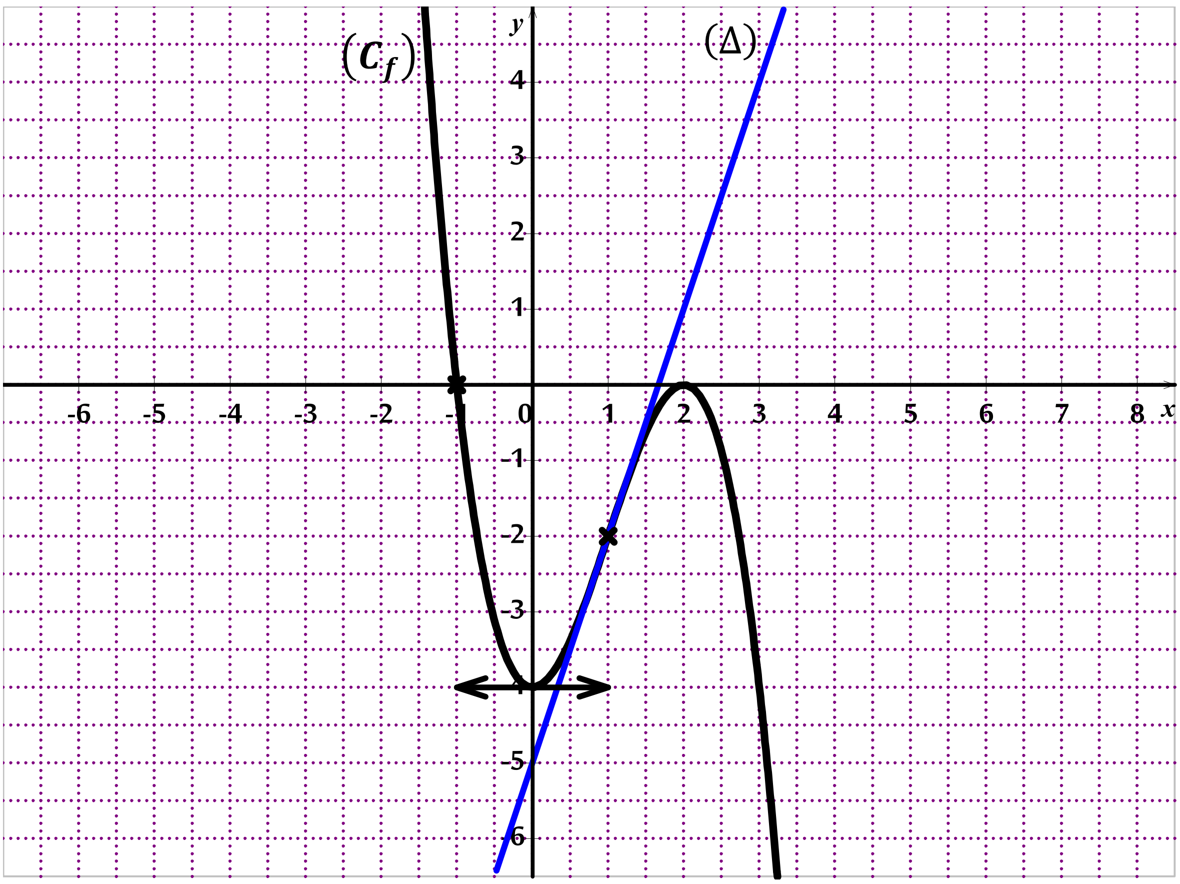
وبالتالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	
$-(x-1)$		+	0	-	
$f(x)-y$		+	0	-	
الوضع النسبي		(C_f) يقع **فوق** (Δ)	(C_f) **يقطع** (Δ)	(C_f) يقع **تحت** (Δ)	

5.حساب $f(-1)$ ثمّ إنشاء المماس (Δ) والمنحنى (C):

لدينا: $f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -(-1) + 3(1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

إنشاء المماس (Δ) والمنحنى (C):



حل التمرين 08: (08 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 01// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

لدينا: المنحنى (C) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$،

والمستقيم (Δ) هو مماس للمنحنى (C) عند مبدأ المعلم O، حيث: $y = g(x)$ معادلة له.

(ملاحظة: معامل توجيه (Δ) هو $f'(0)$، ومعادلته من الشكل: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

أي: $y = g(x) = f'(0)(x-0) + f(0)$)

I) بقراءة بيانية، تعيين:

1- عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل:

من البيان: المنحنى (C) يتقاطع مع حامل محور الفواصل في نقطتين.

2- إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$: **من البيان:** إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ هي كالتالي،

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	+	

3- عدد حلول المعادلة، $f(x) = g(x)$:

من البيان: عدد حلول المعادلة، $f(x) = g(x)$ هو **حلان**.

II) باستعمال عبارة الدّالة f :

لدينا: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1-أ) حساب نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$

ب) حساب $f'(x)$، ثمّ دراسة إشارتها:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$؛ ولدينا: $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 8x + 4}$.

دراسة إشارة $f'(x)$:

نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $3x^2 - 8x + 4 = 0$

مميزها: $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(3)(4) = 64 - 48 = 16 > 0$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2(3)} = \frac{8+4}{6} = 2$ وَ $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2(3)} = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

ج) تشكيل جدول تغيرات الدّالة f :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

حيث: $f(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 4(2) = 8 - 16 + 8 = 0$

وَ $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - 4\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{8}{3} = \frac{8-16(3)+8(9)}{27} = \frac{32}{27}$.

2-أ) إثبات أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x) = x(x-2)^2$:

لدينا: $x(x-2)^2 = x[(x-2)(x-2)] = x(x^2 - 2x - 2x + 4)$

ومنه: $x(x-2)^2 = x^3 - 4x^2 + 4x = f(x)$ (وهو المطلوب)

ب) تعيين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x)=0$)

لدينا: $f(x)=0$ معناه: $x(x-2)^2=0$

ومنه: $x=0$ أو $(x-2)^2=0$

وعليه: $x=0$ أو $x-2=0$

ويكون: $\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=2}$، إذن: $\boxed{(C_f)\cap(xx')=\{O(0;0);A(2;0)\}}$.

3-أ) تبيان أنّ $g(x)=4x$:

لدينا: المستقيم (Δ) هو مماس للمنحنى (C) عند مبدأ المعلم O، حيث: $y=g(x)$ معادلة له.

معناه: معامل توجيه (Δ) هو $f'(0)$، ومعادلته من الشكل: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي: $(y=g(x)=f'(0)(x-0)+f(0)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(0)=3(0)^2-8(0)+4=4 \\ f(0)=(0)^3-4(0)^2+4(0)=0 \end{cases}$، بالتعويض نجد: $\boxed{(\Delta):y=g(x)=4x}$.

ب) تعيين فواصل نقط تقاطع (C) مع (Δ): (نحل المعادلة $f(x)=y$)

لدينا: $f(x)=y$ معناه: $f(x)=g(x)$

أي: $x^3-4x^2+4x=4x$

ومنه: $x^3-4x^2=0$

وعليه: $x^2(x-4)=0$

ويكون: $x^2=0$ أو $x-4=0$

إذن: $\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=4}$.

4-تبيان أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $\frac{4}{3}$:

لدينا: $\boxed{f''(x)=6x-8}$.

إشارة $f''(x)$:

نضع: $f''(x)=0$ نجد: $6x-8=0$ ومنه: $\boxed{x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

نلاحظ أنّ $f''(x)$ **تنعدم** عند $\frac{4}{3}$، **وَتُغيّر إشارتها** إذن: النقطة $I\left(\frac{4}{3};f\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ **نقطة انعطاف** لـ(C).

5-تعيين بيانيا، مجموعة قيم الوسيط الحقيقي m، التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول متمايزة:

المعادلة $f(x)=m$ تقبل ثلاثة حلول متمايزة معناه: المنحنى (C) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=m$ (المُوازي لمحور الفواصل) في ثلاث نقط، من البيان نجد: $0<m<\frac{32}{27}$ أي: $\boxed{m\in\left]0;\frac{32}{27}\right[}$.

حل التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

لدينا: الدّالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (C_f)، وَ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(1;3)$

(**أي:** معامل توجيهه هو $f'(1)$، ومعادلته من الشكل $y=f'(1)(x-1)+\underbrace{f(1)}_{3}$)

I) بقراءة بيانية:

1) تخمين نهايتي الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

من البيان نُخمن أنّ: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ وَ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f على $\mathbb{R}$ وتشكيل جدول تغيراتها:

من البيان:

f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ وَ $[2; +\infty[$ وَ**متناقصة تماما** على المجال $[0; 2]$.

تشكيل جدول تغيّرات f:

من البيان:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

3) أ) كتابة معادلة للمماس (T):

من المعطيات لدينا: (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(1; 3)$

معناه: معامل توجيهه هو $f'(1)$، حيث $f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-3}{2-1} = \frac{-3}{1} = -3$، وَ $\begin{cases} A(1; 3) \in (T) \\ B(2; 0) \in (T) \end{cases}$.

ومعادلته من الشكل $y = f'(1)(x-1) + \underbrace{f(1)}_{3}$

بالتعويض نجد: $y = -3(x-1) + 3$ ومنه: $y = -3x + 3 + 3$ إذن: $\boxed{(T): y = -3x + 6}$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمماس (T):

من البيان:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x) - y$		-	0	+	
الوضع النسبي		(C_f) يقع **تحت** (T)	(C_f) **يقطع** (T)	(C_f) يقع **فوق** (T)	

استنتاج أنّ A هي نقطة الانعطاف للمنحنى (C_f):

بما أنّ (T) **يخترق** (C_f) في النقطة A فهي نقطة **انعطاف** لـ (C_f).

4) تعيين حلول المتراجحة، $f(x) > 5$:

حلول المتراجحة $f(x) > 5$ بيانياً هي **فواصل نقط** المنحنى (C_f) **الواقعة فوق** المستقيم ذو المعادلة $y = 5$، **باستثناء فواصل** نقط **التقاطع**.

من البيان نجد: $\boxed{S =]3; +\infty[}$.

II) علماً أنّ f معرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ حيث: a و b عددان حقيقيان.

1) تعيين العددين a و b:

- لدينا: $f(0) = 5 = b$ ومنه: $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$،
- ولدينا: $f(1) = 3$ (**لأنّ:** $A(1; 3) \in (C_f)$) ومنه: $1 + a + 5 = 3$ وبالتالي: $a = -3$،

إذن: $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 5}$.

2)التحقق من صحة إجاباتي السابقة حول:

أ) اتجاه تغير الدالة f:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$؛ ولدينا: $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 6x}$.

دراسة إشارة $f'(x)$:

نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $3x^2 - 6x = 0$ ومنه: $3x(x-2) = 0$ وعليه: $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = 2}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ وَ $[2; +\infty[$ وَ**متناقصة تماما** على المجال $[0; 2]$.

ب) معادلة المماس (T):

(T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(1; 3)$، معادلته من الشكل: $y = f'(1)(x - 1) + \underbrace{f(1)}_{3}$

ولدينا: $\begin{cases} f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3 \\ f(1) = 3 \end{cases}$

بالتعويض نجد: $y = -3(x-1) + 3$ ومنه: $y = -3x + 3 + 3$ إذن: $\boxed{(T): y = -3x + 6}$

جـ) نقطة الانعطاف A:

لدينا: $\boxed{f''(x) = 6x - 6}$.

إشارة $f''(x)$:

نضع: $f''(x) = 0$ نجد: $6x - 6 = 0$ ومنه: $\boxed{x = \frac{6}{6} = 1}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

نلاحظ أنّ $f''(x)$ **تنعدم** عند 1، **وَتُغيّر إشارتها** إذن: النقطة $A(1; f(1))$ أي: $A(1; 3)$ **نقطة انعطاف** لـ(C_f).

د) حلول المتراجحة، $f(x) > 5$:

$f(x) > 5$ معناه: $x^3 - 3x^2 + 5 > 5$ أي: $x^3 - 3x^2 > 0$ ومنه: $\boxed{x^2(x-3) > 0}$

ندرس إشارة $x^2(x-3)$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		-	0	+			
x^2		+	0	+			
$x-3$				-	0	+	
$x^2(x-3)$		-	0	-	0	+	

إذن: $\boxed{S =]3; +\infty[}$.

حل التمرين 10: (08 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 02// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

لدينا: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1) حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$

2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f؛ ثمّ تشكيل جدول تغيراتها:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$؛ ولدينا: $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 3}$.

إشارة $f'(x)$:

نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $3x^2 - 3 = 0$

ومنه: $x^2 = 1$

وعليه: $\boxed{x = \sqrt{1} = 1}$ أو $\boxed{x = -\sqrt{1} = -1}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ وَ $[1;+\infty[$ وَ**متناقصة تماما** على المجال $[-1;1]$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

حيث: $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$،

وَ $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$.

3) تبيان أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها:

لدينا: $\boxed{f''(x) = 6x}$.

إشارة $f''(x)$:

نضع: $f''(x) = 0$ نجد: $6x = 0$ ومنه: $\boxed{x = 0}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

نلاحظ أنّ $f''(x)$ **تنعدم** عند 0، **وَتُغيّر إشاراتها** إذن: النقطة $I(0;f(0))$ أي: $I(0;2)$ **نقطة انعطاف** لـ(C_f).

4) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0:

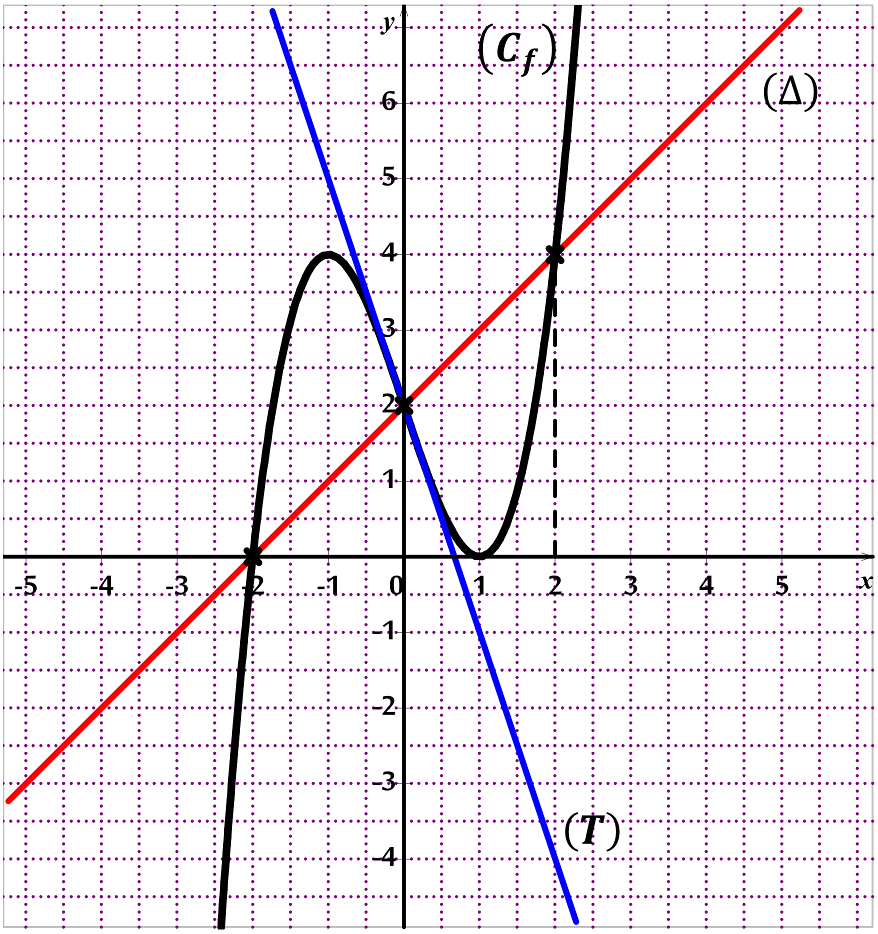
معادلة (T) من الشكل: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3 \\ f(0) = 2 \end{cases}$، بالتعويض نجد: $\boxed{(T): y = -3x + 2}$.

5) حساب $f(-2)$ و $f(2)$؛ ثمّ إنشاء (T) و (C_f): بالتعويض نجد:

- $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = -8 + 6 + 2 = 0$؛
- $f(2) = (2)^3 - 3(2) + 2 = 8 - 6 + 2 = 4$.

إنشاء (T) و (C_f):



6) أ) إنشاء المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 2$.

ب) حل، في $\mathbb{R}$، بيانيا المتراجحة $f(x) \geq x + 2$:

حلول المتراجحة $f(x) \geq x + 2$ بيانياً هي **فواصل نقط** المنحنى (C_f) **الواقعة فوق** المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$، **مع فواصل** نقط **التقاطع**.

من البيان نجد: $\boxed{S = [-2; 0] \cup [2; +\infty[}$.

حل التمرين 11: (08 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 02// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

لدينا: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ و $D_f = \mathbb{R}$.

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$

2) أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = (3x - 3)(x - 3)$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$؛ ولدينا: $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 12x + 9}$.

- ولدينا من جهة أخرى: $(3x - 3)(x - 3) = 3x^2 - 9x - 3x + 9 = 3x^2 - 12x + 9$

إذن: $\boxed{f'(x) = (3x - 3)(x - 3)}$.

ب) دراسة اتّجاه تغيّر الدالة f ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

إشارة $f'(x)$:

نضع: $f'(x) = 0$ أي: $(3x-3)(x-3) = 0$

ومنه: $x - 3 = 0$ أو $3x - 3 = 0$.

وعليه: $\boxed{x = 3}$ أو $\boxed{x = 1}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty; 1]$ وَ $[3; +\infty[$ وَ**متناقصة تماما** على المجال $[1; 3]$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

حيث: $f(1) = 4$ وَ $f(3) = 0$.

3)أ) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة E ذات الفاصلة 2:

معادلة (T) من الشكل: $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(2) = (3(2)-3)(2-3) = (3)(-1) = -3 \\ f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) = 8 - 6(4) + 18 = 8 - 24 + 18 = 2 \end{cases}$

بالتعويض نجد: $y = -3(x-2) + 2$ ومنه: $y = -3x + 6 + 2$ إذن: $\boxed{(T): y = -3x + 8}$.

ب) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x) - (-3x+8) = (x-2)^3$:

- لدينا: $f(x) - (-3x+8) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3x - 8 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
- ولدينا من جهة أخرى: $(x-2)^3 = (x-2)(x-2)^2 = (x-2)[(x-2)(x-2)]$

ومنه: $(x-2)^3 = (x-2)(x^2 - 2x - 2x + 4) = (x-2)(x^2 - 4x + 4)$

وعليه: $(x-2)^3 = x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 8x - 8 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

إذن: $\boxed{f(x) - (-3x+8) = (x-2)^3}$.

جـ) استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المماس (T): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = f(x) - (-3x+8) = (x-2)^3$

إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة $(x-2)$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		-	0	+	
$f(x) - y$		-	0	+	
الوضع النسبي		(C_f) يقع **تحت** (T)	(C_f) **يقطع** (T)	(C_f) يقع **فوق** (T)	

د) تبرير أنّ E نقطة انعطاف للمنحنى (C_f):

لدينا: $\boxed{f''(x) = 6x - 12}$.

إشارة $f''(x)$:

نضع: $f''(x) = 0$ نجد: $6x - 12 = 0$ ومنه: $\boxed{x = \frac{12}{6} = 2}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

نلاحظ أنّ $f''(x)$ **تنعدم** عند 2، **وَتُغيّر إشارتها** إذن: النقطة ذات الإحداثيي $(2; f(2))$ وهي النقطة: $E(2;2)$ **نقطة انعطاف** لـ(C_f).

4)أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x) = x(x-3)^2$:

لدينا: $x(x-3)^2 = x[(x-3)(x-3)] = x(x^2 - 3x - 3x + 9) = x(x^2 - 6x + 9)$

ومنه: $x(x-3)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x = f(x)$ (وهو المطلوب).

ب) ايجاد إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل حور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x) = 0$)

لدينا: $f(x) = 0$ معناه: $x(x-3)^2 = 0$

ومنه: $x = 0$ أو $(x-3)^2 = 0$

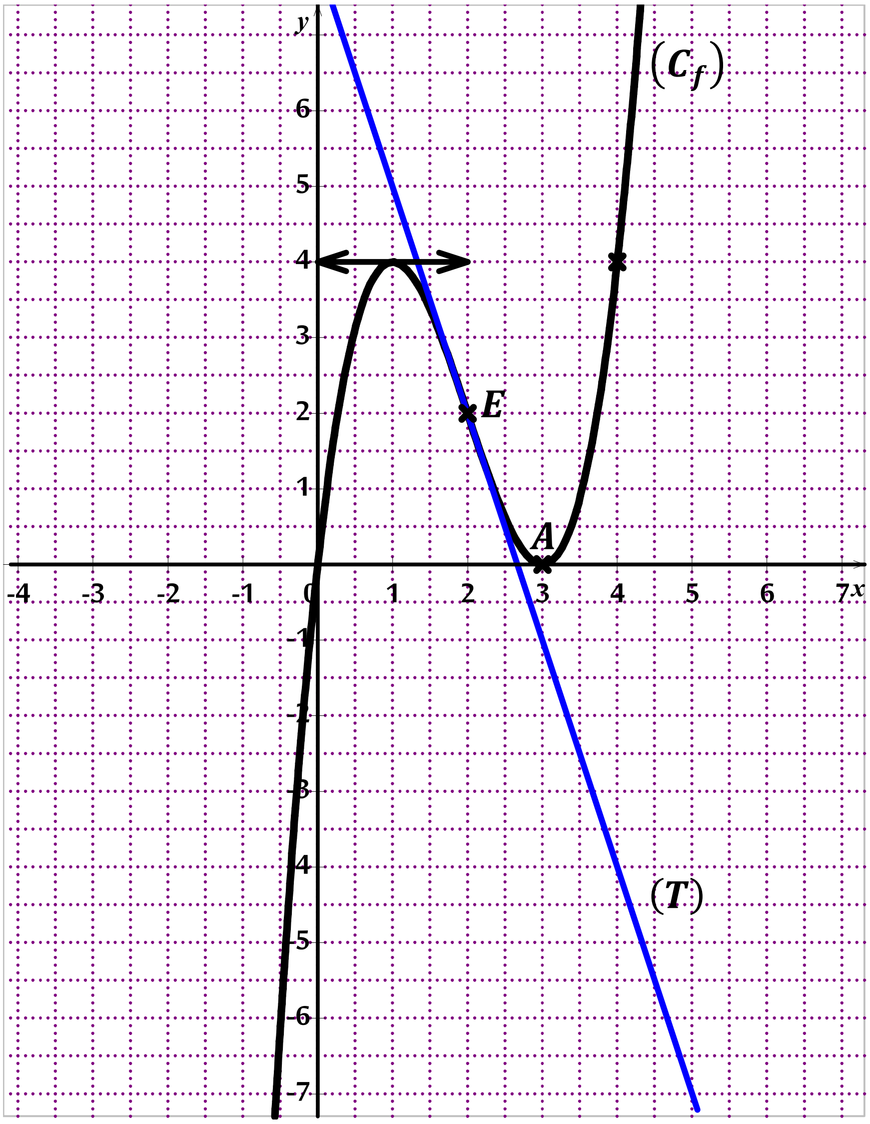
وعليه: $x = 0$ أو $x - 3 = 0$

ويكون: $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = 3}$، إذن: $\boxed{(C_f) \cap (xx') = \{O(0;0); A(3;0)\}}$.

5) حساب $f(4)$ ثمّ إنشاء المماس (T) والمنحنى (C_f):

بالتعويض نجد:

- $f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 9(4) = 64 - 96 + 36 = 4$.



حل التمرين 12: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: آ وف؛ لغ أ

لدينا: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1) حساب النهايتين، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$

2) أ) تبيان أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = (x-2)(x+2)$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$؛ ولدينا:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{3}\times 3x^2 - 4 = x^2 - 4 = x^2 - (2)^2 = (x-2)(x+2)}.$$

ب) استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f :

إشارة $f'(x)$:

نضع: $f'(x) = 0$ أي: $(x-2)(x+2) = 0$

ومنه: $x - 2 = 0$ أو $x + 2 = 0$.

وعليه: $\boxed{x = 2}$ أو $\boxed{x = -2}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;-2]$ وَ $[2;+\infty[$، وَ**متناقصة تماما** على المجال $[-2;2]$.

3)تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{16}{3}$	↘	$-\frac{16}{3}$	↗	$+\infty$

حيث: $f(-2)=\frac{1}{3}(-2)^3-4(-2)=\frac{-8}{3}+8=\frac{-8+24}{3}=\frac{16}{3}$

وَ $f(2)=\frac{1}{3}(2)^3-4(2)=\frac{8}{3}-8=\frac{8-24}{3}=-\frac{16}{3}$.

4)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ معناه: $\frac{1}{3}x^3-4x=0$

ومنه: $x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0$

وعليه: $x=0$ **أو** $\frac{1}{3}x^2-4=0$ (بضرب الطرفين في العدد **3**)

ويكون: $x=0$ **أو** $x^2=12$

وبالتالي: $\boxed{x=0}$ **أو** $\boxed{x=\sqrt{12}}$ **أو** $\boxed{x=-\sqrt{12}}$

إذن: $S=\{-2\sqrt{3};0;2\sqrt{3}\}$.

استنتاج إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات:

- **تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب: (نحسب $f(0)$)**

لدينا: $f(0)=0$، (حسب نتيجة السؤال السابق 0 حل للمعادلة $f(x)=0$)

إذن: $\boxed{(C_f)\cap(yy')=\{O(0;0)\}}$.

- **تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x)=0$)**

لدينا: $f(x)=0$ حلولها: $\boxed{x=0}$ **أو** $\boxed{x=2\sqrt{3}}$ **أو** $\boxed{x=-2\sqrt{3}}$ (حسب نتيجة السؤال السابق)

إذن: $\boxed{(C_f)\cap(xx')=\{A(-2\sqrt{3};0);O(0;0);B(2\sqrt{3};0)\}}$.

5)تبيان أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي مبدأ المعلم:

لدينا: $\boxed{f''(x)=2x}$.

إشارة $f''(x)$:

نضع: $f''(x)=0$ نجد: $2x=0$ ومنه: $\boxed{x=0}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

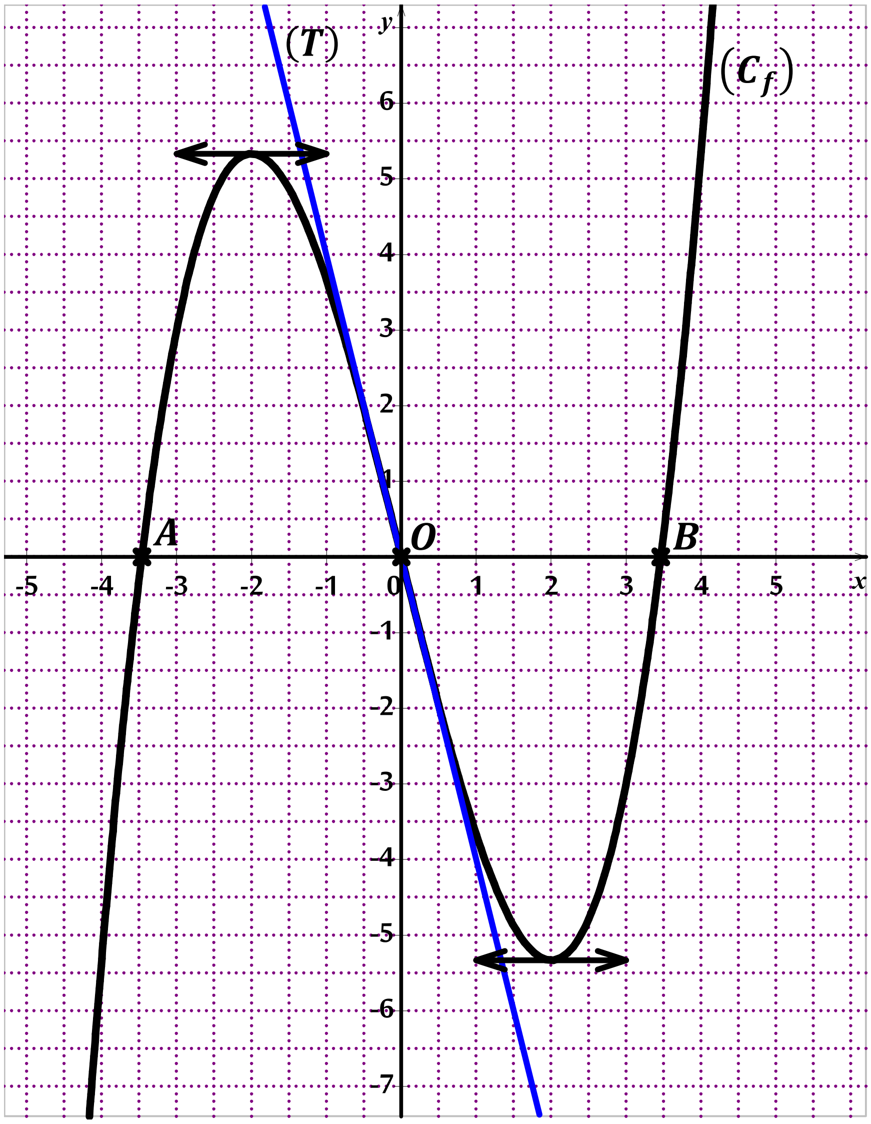
نلاحظ أنّ $f''(x)$ **تنعدم** عند 0، **وَتُغيّر إشارتها** إذن: النقطة ذات الإحداثي $(0; f(0))$ وهي النقطة: $O(0;0)$ **نقطة انعطاف** لـ (C_f).

6) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

معادلة (T) من الشكل: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(0) = (0)^2 - 4 = -4 \\ f(0) = 0 \end{cases}$، بالتعويض نجد: $\boxed{(\Delta): y = -4x}$.

6) رسم (T) والمنحنى (C_f):



حل التمرين 13: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 02// الشعبة: آ وف؛ لغ أ

لدينا: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$ وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$

2) التحقق أنّ، من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x) = (-x+1)(x+2)^2$:

لدينا: $(-x+1)(x+2)^2 = (-x+1)[(x+2)(x+2)]$

ومنه: $(-x+1)(x+2)^2 = (-x+1)(x^2+2x+2x+4) = (-x+1)(x^2+4x+4)$

وعليه: $(-x+1)(x+2)^2 = -x^3-4x^2-4x+x^2+4x+4 = -x^3-3x^2+4 = f(x)$

إذن: $\boxed{f(x)=(-x+1)(x+2)^2}$.

إيجاد إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات:

- **تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب: (نحسب $f(0)$)**

لدينا: $f(0) = -(0)^3-3(0)^2+4 = 4$، إذن: $\boxed{(C_f)\cap(yy') = \{A(0;4)\}}$.

- **تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x)=0$)**

لدينا: $f(x)=0$ معناه: $(-x+1)(x+2)^2=0$

ومنه: $(-x+1)=0$ أو $(x+2)^2=0$.

وعليه: $-x=-1$ أو $x+2=0$.

وبالتالي: $\boxed{x=1}$ أو $\boxed{x=-2}$، إذن: $\boxed{(C_f)\cap(xx') = \{B(-2;0);C(1;0)\}}$.

3)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$؛ ولدينا: $\boxed{f'(x)=-3x^2-6x}$.

إشارة $f'(x)$:

نضع: $f'(x)=0$ أي: $-3x^2-6x=0$

ومنه: $-3x(x+2)=0$

ومنه: $x=0$ أو $x+2=0$.

وعليه: $\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=-2}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

إذن: f **متناقصة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;-2]$ وَ$[0;+\infty[$، وَ**متزايدة تماما** على المجال $[-2;0]$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

حيث: $f(0)=4$ وَ$f(-2)=0$.

4)تبيان أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف E إحداثياتها $(-1;2)$:

لدينا: $\boxed{f''(x)=-6x-6}$.

إشارة $f''(x)$:

نضع: $f''(x)=0$ نجد: $-6x-6=0$ ومنه: $\boxed{x=\frac{6}{-6}=-1}$.

وبالتالي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	

نلاحظ أنّ $f''(x)$ **تنعدم** عند (-1)، وَتُغيّر إشارتها إذن: النقطة $E(-1;f(-1))$ أي: $E(-1;2)$ **نقطة انعطاف** لـ(C_f).

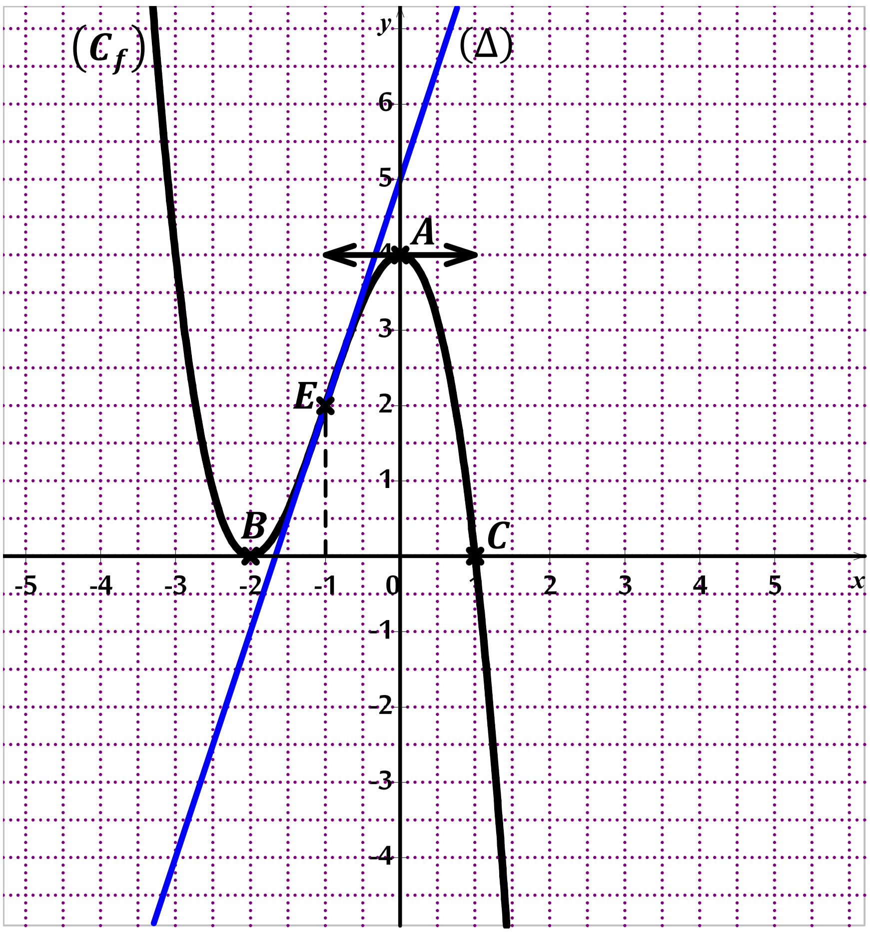
5) كتابة معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة E:

(Δ) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة $E(-1;2)$، معادلته من الشكل: $y=f'(\mathbf{-1})(x-(\mathbf{-1}))+\underbrace{f(\mathbf{-1})}_{2}$

ولدينا: $\begin{cases} f'(\mathbf{-1}) = -3(-1)^2-6(-1) = -3(1)+6 = +3 \\ f(\mathbf{-1}) = 2 \end{cases}$

بالتعويض نجد: $y=3(x+1)+2$ ومنه: $y=3x+3+2$ إذن: $\boxed{(\Delta): y=3x+5}$

6) رسم (Δ) و (C_f):



حل التمرين 14: (08 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 01// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

لدينا: $D_f=\mathbb{R}$ وَ $f(x)=x^3-3x^2$.

1) حساب نهاية الدّالة f عند كل من $+\infty$ و$-\infty$:

لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty \end{cases}$.

2) أ) حساب $f'(x)$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $\boxed{f'(x)=3x^2-6x}$.

دراسة إشارة $f'(x)$:

نضع: $f'(x)=0$ نجد: $3x^2-6x=0$

ومنه: $3x(x-2)=0$

وعليه: $x = 0$ أو $x - 2 = 0$

أي: $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = 2}$، **وبالتالي:**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

ب) استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ تشكّيل جدول تغيراتها:

f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ وَ $[2; +\infty[$، وَ**متناقصة تماما** على المجال $[0; 2]$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\mathbf{0}$	↘	$\mathbf{-4}$	↗	$+\infty$

حيث: $f(0) = 0$ وَ $f(2) = -4$.

3)تبيان أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين احداثييها:

لدينا: $\boxed{f''(x) = 6x - 6}$

إشارة $f''(x)$:

نضع $f''(x) = 0$ نجد: $6x - 6 = 0$ ومنه: $\boxed{x = \frac{6}{6} = 1}$، **وبالتالي:**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

نلاحظ أنّ $f''(x)$ **تنعدم عند** 1، **وتُغير إشارتها**، إذن: $I(1; f(1))$ أي: $\boxed{I(1; -2)}$ **نقطة انعطاف** لـ (C_f).

4)كتابة معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1: عند نقطة الانعطاف

معادلة (T) من الشكل: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = 3(1) - 6 = 3 - 6 = -3 \\ f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 = 1 - 3(1) = 1 - 3 = -2 \end{cases}$،

بالتعويض نجد: $y = -3(x - 1) - 2$، ومنه: $y = -3x + 3 - 2$ إذن: $\boxed{(T): y = -3x + 1}$.

5)أ) التحقّق من أنّ النقطة O (مبدأ المعلم) والنقطة A ذات الفاصلة 3 هما نقطتى تقاطع (C_f) مع حامل محور

الفواصل: (نحل المعادلة $f(x) = 0$)

$f(x) = 0$ معناه: $x^3 - 3x^2 = 0$

ومنه: $x^2(x - 3) = 0$

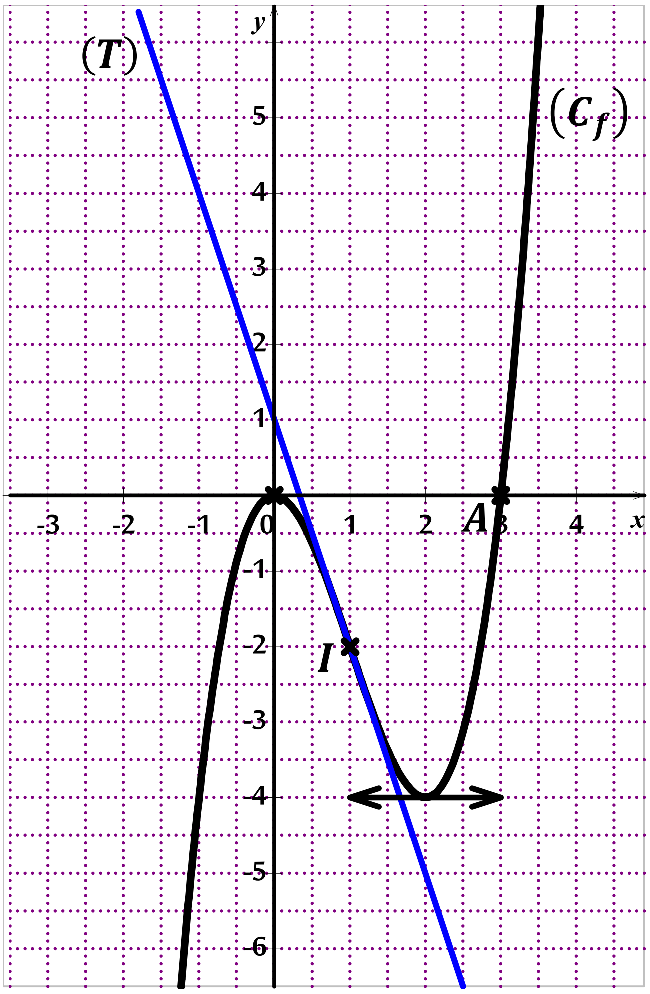
وعليه: $x^2 = 0$ أو $x - 3 = 0$

ويكون: $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = 3}$

وبالتالي: للمعادلة $f(x) = 0$ حلان في $\mathbb{R}$،

إذن: المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين هما $O(0; 0)$؛ وَ $A(3; 0)$.

ب) رسم المماس (T) والمنحنى (C_f):



6)حل في $\mathbb{R}$ بيانيا المتراجحة، $f(x) > 0$:

حلول المتراجحة $f(x) > 0$ بيانيا هي فواصل نقط (C_f) الواقعة فوق محور الفواصل بإستثناء فواصل نقط التقاطع.

من البيان نجد: $\boxed{S =]3; +\infty[}$.

7)تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x) + 4 = (x+1)(x-2)^2$:

لدينا: $(x+1)(x-2)^2 = (x+1)[(x-2)(x-2)] = (x+1)(x^2 - 2x - 2x + 4)$

ومنه: $(x+1)(x-2)^2 = (x+1)(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 4x + 4$

إذن: $(x+1)(x-2)^2 = \underbrace{x^3 - 3x^2}_{f(x)} + 4 = f(x) + 4$ (وهو المطلوب)

حل المعادلة $f(x) = -4$:

المعادلة $f(x) = -4$ تُكافئ $f(x) + 4 = 0$

ومنه: $(x+1)(x-2)^2 = 0$ (لأنّ: $(x+1)(x-2)^2 = f(x) + 4$)

وعليه: $x + 1 = 0$ أو $(x-2)^2 = 0$

ويكون: $x = -1$ أو $x - 2 = 0$

وبالتالي: $\boxed{x = -1}$ أو $\boxed{x = 2}$

إذن: $\boxed{S = \{-1; 2\}}$.

حل التمرين 15: (04 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 02// الشعبة: آ وف؛ لغ أ.

لدينا: $D_f = \mathbb{R}$ وَ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$.

1) احساب نهايتي الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3) = +\infty \end{cases}$.

2) أ) حساب $f'(x)$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $\boxed{f'(x) = 6x^2 + 6x}$.

دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $6x^2 + 6x = 0$

ومنه: $6x(x+1) = 0$

وعليه: $x = 0$ أو $x + 1 = 0$

أي: $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = -1}$، وبالتالي:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

ب) حساب $f(0)$ و $f(-1)$:

لدينا: $f(0) = 2(0)^3 + 3(0)^2 - 5 = -5$

وَ $f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 5 = 2(-1) + 3(1) - 5 = -2 + 3 - 5 = -4$.

تشكّيل جدول تغيّرات الدّالة f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	-5	↗	$+\infty$

3) أ) التحقق أنّه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 5)$:

لدينا: $(x-1)(2x^2 + 5x + 5) = 2x^3 + 5x^2 + 5x - 2x^2 - 5x - 5$

ومنه: $(x-1)(2x^2 + 5x + 5) = 2x^3 + 3x^2 - 5 = f(x)$.

ب) تعيين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x) = 0$)

$f(x) = 0$ معناه: $(x-1)(2x^2 + 5x + 5) = 0$ ومنه: $x - 1 = 0$ أو $2x^2 + 5x + 5 = 0$

- $x - 1 = 0$ نجد: $\boxed{x = 1}$.
- $2x^2 + 5x + 5 = 0$ مميزها: $\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(2)(5) = 25 - 40 = -15 < 0$،

فهي لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

وبالتالي: للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في $\mathbb{R}$ وهو $\boxed{x = 1}$

إذن: المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة هي $\boxed{I(1;0)}$.

4) تبيان أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها $\left(-\frac{1}{2}\right)$:

لدينا: $\boxed{f''(x) = 12x + 6}$

إشارة $f''(x)$:

نضع $f''(x)=0$ نجد: $12x+6=0$ ومنه: $\boxed{x=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}}$، **وبالتالي:**

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

نلاحظ أنّ $f''(x)$ **تنعدم عند** $\left(-\frac{1}{2}\right)$، **وتُغير إشارتها**، إذن: $A\left(-\frac{1}{2};f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ أي: $\boxed{A\left(-\frac{1}{2};-\frac{9}{2}\right)}$ **نقطة انعطاف** لـ (C_f).

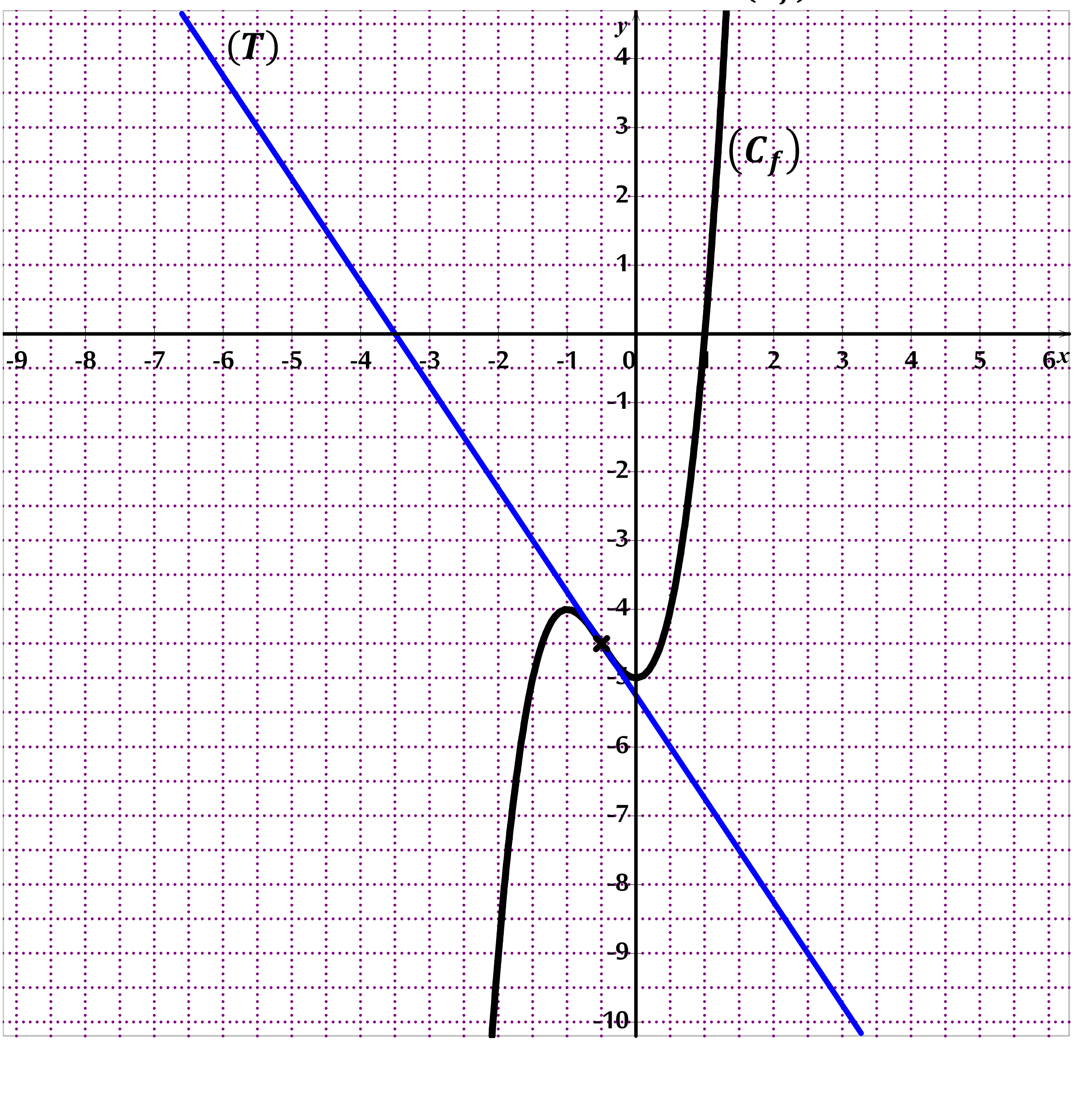
كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A:

معادلة (T) من الشكل: $y=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)$

ولدينا:
$$\begin{cases} f'\left(-\frac{1}{2}\right)=6\left(-\frac{1}{2}\right)^2+6\left(-\frac{1}{2}\right)=6\left(\frac{1}{4}\right)-3=\frac{3}{2}-3=\frac{3-6}{2}=-\frac{3}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2-5=2\left(-\frac{1}{8}\right)+3\left(\frac{1}{4}\right)-5=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-5=-\frac{9}{2} \end{cases}$$،

بالتعويض نجد: $y=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{2}$، ومنه: $y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}-\frac{9}{2}$ إذن: $\boxed{(T):y=-\frac{3}{2}x-\frac{21}{4}}$.

5) انشاء المماس (T) والمنحنى (C_f):



6)حل بيانيا المتراجحة، $f(x) \geq 0$:

حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ بيانيا هي فواصل نقط (C_f) الواقعة فوق محور الفواصل مع فواصل نقط التقاطع.

من البيان نجد: $\boxed{S = [1; +\infty[}$.