العبقري في الرياضيات

الدوال العددية

الثالثة ثانوي

الشعب: • علوم تجريبية؛
• تقني رياضي؛
• رياضيات.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية)

الملخص // الشعبة: علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

ملخص: حول الدّوال العددية// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: علوم تج؛ تر.

1 المستقيمات المقاربة:

المستقيم المقارب	النهاية	التفسير الهندسي
①العمودي	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = a}$ (المُوازي لمحور التراتيب) مقارب لـ(C_f).
②الأفقي	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = b}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ(C_f) عند ∞.
③المائل	$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = ax + b}$ مقارب مائل لـ(C_f) عند ∞.

ملاحظة: **إذا كان:** $\begin{cases} f(x) = ax + b + g(x) \\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0 \end{cases}$،

فإنّ: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = ax + b}$ مقارب **مائل** لـ(C_f) عند ∞.

2 الدّالة الزوجية، والدّالة الفردية:

الدّالّة f	معناه	ويكون
①الزوجية	1) D_f **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر** (أي: من أجل كل x من D_f، فإنّ $-x$ من D_f) 2) $\boxed{f(-x) = f(x)}$.	منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **محور التراتيب**.
②الفردية	1) D_f **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر** (أي: من أجل كل x من D_f، فإنّ $-x$ من D_f) 2) $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ أو $\boxed{f(-x) + f(x) = 0}$.	منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **مبدأ المعلم**.

3 مركز التناظر، ومحور التناظر:

①محور التناظر	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = \alpha}$ **محور تناظر** للمنحنى (C_f)، **معناه:** $\boxed{f(2\alpha - x) = f(x)}$ أو $\boxed{f(\alpha - x) = f(\alpha + x)}$.
②مركز التناظر	النقطة $\boxed{\omega(\alpha;\beta)}$ **مركز تناظر** للمنحنى (C_f)، **معناه:** $\boxed{f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta}$ أو $\boxed{f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta}$.

4 تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب، ومع حامل محور الفواصل:

	الطريقة	ونكتب
①تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب $(C_f)\cap(yy')$	▪ نحسب $\boxed{f(0)}$.	$(C_f)\cap(yy')=\{A(0;\dots)\}$
②تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل $(C_f)\cap(xx')$	▪ نحل المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ في D_f.	$(C_f)\cap(xx')=\{A(\dots;0);B(\dots;0)\}$

5 المماس:

هناك سِتُّ (06) صيغ -تقريباً- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى **معرفة فاصلة نقطة التّماس x_0 هي المفتاح للإجابة** على أي منها كما سنرى:

الصيغة	الطـــــــرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى (العادية)	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	نكتب الدستور: $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المُعطاة.
الصيغة الثانية	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0.	نحلّ المعادلة $\boxed{f(x_0)=y_0}$، وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).
الصيغة الثالثة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **ميله (أو معامل توجيهه)** يساوي α.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0)=\alpha}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). **ملاحظة:** عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات.
الصيغة الرابعة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُوازي** المستقيم ذا المعادلة $y=\alpha x+\beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0)=\alpha}$، عُدنا إلى الحالة الثانية. **ملاحظة:** مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه.
الصيغة الخامسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُعامد** المستقيم ذا المعادلة $y=\alpha x+\beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{\alpha\times f'(x_0)=-1}$. **ملاحظة:** مستقيمان متعامدان، جداء معاملي توجيههما يساوي (-1).
الصيغة السادسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يشمل** النقطة ذات الإحداثيين $(x_M;y_M)$.	نحلّ المعادلة $\boxed{y_M=f'(x_0)(x_M-x_0)+f(x_0)}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).

6 وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): ax+b$:

الطريقة	إشارة الفرق	الوضعية النسبية
ندرس إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$	▪ $f(x)-(ax+b)>0$	▪ (C_f) يقع **فوق** (Δ).
	▪ $f(x)-(ax+b)<0$	▪ (C_f) يقع **تحت** (Δ).
	▪ $f(x)-(ax+b)=0$	▪ (C_f) **يقطع** (Δ).

7 النهايات:

أ) حالات <<عدم التعيين>> (ح ع ت):

توجد ؟	الجمع	الجداء	حاصل القسمة	
أربع (04) أشكال	$(+\infty)+(-\infty)$ والعكس	$0\times\infty$ والعكس	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

ب) نهاية #دَالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$:

- **النهاية** عند $+\infty$ وَعند $-\infty$ لدّالة كثير حدود هي **نهاية حدها الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.

$f(x) = \boldsymbol{x^3} + x - 2$	$g(x) = x^2 \boldsymbol{- 2x^3} + 1$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\boldsymbol{x^3})$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\boldsymbol{x^3})$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\boldsymbol{-2x^3})$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\boldsymbol{-2x^3})$

ج) نهاية #دَالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

- **النهاية** عند $+\infty$ وَعند $-\infty$ لدّالة ناطقة هي **نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.
- **لحساب نهايات #دَالة ناطقة** عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها؛ **نتذكّر أنّ:** $\boxed{\frac{l}{0} = \infty}$ **ويُحدّد بدراسة إشارة المقام** على اليمين واليسار **وحسب** مجموعة التعريف.

المقام من الشكل/ حيث	n فردي	n زوجي
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	**إشارة** x^n **من إشارة** x **النهاية عند 0** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{}{x^n}$ $\left(\frac{l}{0^-}\right)$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{}{x^n}$ $\left(\frac{l}{0^+}\right)$	**إشارة** x^n **موجب** $(x^n \geq 0)$ **النهاية عند 0** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{}{x^n}$ $\left(\frac{l}{0^+}\right)$
$(ax+b)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	**إشارة** $(ax+b)^n$ **من إشارة** $(ax+b)$ **النهاية عند** $-\frac{b}{a}$: $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{b}{a}\\ <}} \frac{}{(ax+b)^n}$ $\left(\frac{l}{0_{\text{عكس إشارة } a}}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{b}{a}\\ >}} \frac{}{(ax+b)^n}$ $\left(\frac{l}{0_{\text{عكس إشارة } a}}\right)$ وَ	**إشارة** $(ax+b)^n$ **موجب** $(ax+b)^n \geq 0$ **النهاية عند** $-\frac{b}{a}$: $\lim\limits_{x\to -\frac{b}{a}} \frac{}{(ax+b)^n}$ $\left(\frac{l}{0^+}\right)$
ax^2+bx+c	**ندرس إشارة** ax^2+bx+c **باستعمال المميز** $\Delta = b^2 - 4ac$	

ج) إشارة $ax+b$ $(a \neq 0)$:

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{a} \quad$ $+\infty$
$ax+b$	**عكس** إشارة a $\quad 0 \quad$ **مثل** إشارة a

ج) إشارة $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

المميز $\Delta = b^2 - 4ac$	حلول المعادلة $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$	إشارة $P(x)$	تحليل $P(x)$
$\Delta < 0$	$S = \emptyset$	x: $-\infty$ ... $+\infty$؛ $P(x)$: مثل إشارة a	لا يُمكن تحليل $P(x)$
$\Delta = 0$	$S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	x: $-\infty$ ، $-\frac{b}{2a}$ ، $+\infty$؛ $P(x)$: مثل إشارة a ، 0 ، مثل إشارة a	$P(x) = a(x - x_0)^2$ $(x_0 = -\frac{b}{2a})$
$\Delta > 0$	$S = \{x_1; x_2\}$ حيث: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x: $-\infty$ ، x_1 ، x_2 ، $+\infty$؛ $P(x)$: مثل إشارة a ، 0 ، عكس إشارة a ، 0 ، مثل إشارة a (نفرض أنّ $x_1 < x_2$)	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

8 الإشتقاقية:

أ. مشتقات دوال مألوفة:

مجالات قابلية الاشتقاق	$f'(x) =$	$f(x) =$
$\mathbb{R}$	0	$(k \in \mathbb{R})$ k
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$(n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2)$ x^n
$]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$(n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2)$ $\frac{1}{x^n}$
$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$

ب. المشتقات والعمليات على الدوال: u و v دالّتان **قابلتان للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدّالة	$u + v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدّالة v **لا تنعدم** على I)
المشتقة	$u' + v'$	ku'	$u'v + v'u$	$\frac{-v'}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$

نتائج:

- الدّوال **كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$.
- الدّوال **الناطقة قابلة للاشتقاق** على **كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها**.

ج. اللاشتقاقية والاستمرارية:

إذا كانت f **قابلة للاشتقاق** على مجال I، فإنّــها **مستمرة** على هذا المجال **وعكس هذه الخاصية ليس صحيح**.

إشتقاق دَالة مركبة:

أ. مشتقة الدّالة $v \circ u$: $\boxed{(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]}$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدّالة $x \mapsto u(ax+b)$ ($a \neq 0$)

$f(x) = u(ax+b)$	$f'(x) = au'(ax+b)$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

مشتقة الدّالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$)

$f(x) = [u(x)]^n$	$f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \dfrac{1}{[u(x)]^n}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)

$f(x) = \dfrac{1}{[u(x)]^n}$	$f'(x) = \dfrac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$

9 الإستمرارية:

f دّالة **معرّفة** على مجال I من $\mathbb{R}$، إذا كانت f **مستمرة على I** فإنّ **تفسيرها البياني (أو الهندسي)** هو: أنّه **يُمكن رسم منحناها البياني على I دون رفع القلم (اليد)**.

نتائـــــج:

- الدّوال المرجعية **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- الدّوال كثيرات الحدود؛ "cos" و"sin" هي دّوال **مستمرة على** $\mathbb{R}$.
- الدّوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دّوال **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء وتركيب دّوال **مستمرة هي دّوال مستمرة**.

مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)	التفسير البياني (أو الهندسي) "لمبرهنة القيم المتوسطة"
▪ **الحالة العامة** ($k \in \mathbb{R}$) إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = k}$ **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
▪ **الحالة الخاصة** ($k = 0$) إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، أي: $f(a) \times f(b) < 0$ فـإنّ: المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
وحدانية الحل	
▪ **الحالة العامة** ($k \in \mathbb{R}$) إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا وحيدا α** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = k}$ **في نقطة واحدة فاصلتها α** في المجال $[a;b]$.

▪ **الحالة الخاصة** $(k=0)$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، أي: $f(a)\times f(b)<0$ فــإنّ: المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **في نقطة واحدة فاصلتها** α في المجال $[a;b]$.

طُرق اثبات "وُجود" حلول معادلة في مجال $[a;b]$ باستعمال "مبرهنة القيم المتوسطة"

الحالة العامة $(k\in\mathbb{R})$	**الحالة الخاصة** $(k=0)$
1/نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=k$ **(إن لم تُعطى لنا)** 2/**نتحقّق من استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$. 3/**نتحقّق** من أنّ k **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، **وذلك بعد** حسابهما.	1/نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=0$ **(إن لم تُعطى لنا)** 2/**نتحقّق من استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$. 3/**نتحقّق** من أنّ $\boxed{f(a)\times f(b)<0}$، **وذلك بعد** حسابهما.

ملاحظة: تقبل المبرهنات السابقة عدة **تمديدات** في حالة الدّالة f **مستمرة** و**رتيبة تماماً** على مجال **مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين**، **محدود** أو **غير محدود**. (في حالة المجال مفتوح نستعمل النهايات)

10 المناقشة البيانية:

المعادلة من الشكل $f(x)=m$، m وسيط حقيقي.

المعادلة من الشكل $f(x)=ax+\boxed{m}$، m وسيط حقيقي.

المعادلة من الشكل $f(x)=mx+b$، m وسيط حقيقي.

المعادلة من الشكل $f(x)=f(m)$، m وسيط حقيقي.

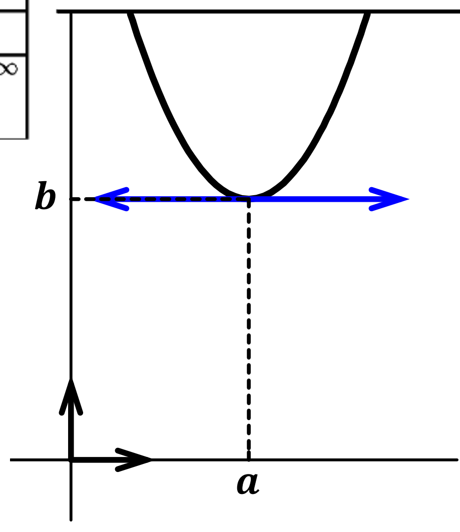
المناقشة مائلة مُوازية للمستقيم ذو المعادلة $y=ax+\boxed{b}$.

المناقشة دورانية حول النقطة $A(0;b)$.

المناقشة أفقية مُوازية لمحور الفواصل.

11 إضافات:

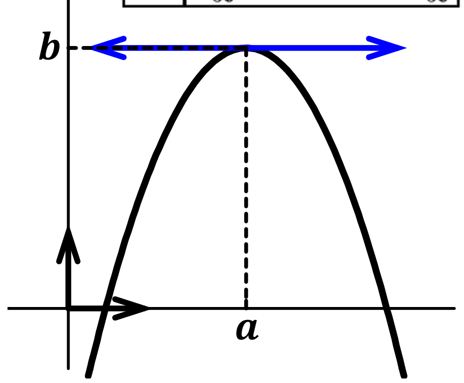
x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(a)$	↗	$+\infty$



(الشكل 01)

$$\begin{cases} f(a)=b \\ f'(a)=0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a)$	↘	$-\infty$



(الشكل 02)

12 استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعد إنشاء (C_f)، قد يُطلب منّا أنْ **نستنتج منحنياً آخر** (C_h) **-مثلاً- لدّالة** h؛ ويكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي:

الصيغة	الطــــــرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **حيث:** $\boxed{h(x) = \lvert f(x)\rvert}$.	▪ **على المجالات** التي تكون فيها $\boxed{f(x) \geq 0}$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو فوقه) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). ▪ **على المجالات** التي تكون فيها $\boxed{f(x) \leq 0}$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو تحته) نحصل على $h(x) = -f(x)$؛ ومنه يكون (C_h) **نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور الفواصل.**
الصيغة الثانية	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **حيث:** $\boxed{h(x) = f(\lvert x\rvert)}$. **ملاحظة:** عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نُثبت أنّ h **زوجية.**	▪ إذا كان $x \geq 0$ و $x \in D_f$ أي $\boxed{x \in D_f \cap [0;+\infty[}$ (x ينتمي إلى الجزء الموجب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). ▪ نُكمل الجزء المتبقي من (C_h) **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب** لأنّ h **زوجية.**
الصيغة الثالثة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $\boxed{h(x) = f(-\lvert x\rvert)}$. **ملاحظة:** عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نُثبت أنّ h **زوجية.**	▪ إذا كان $x \leq 0$ و $x \in D_f$ أي $\boxed{x \in D_f \cap]-\infty;0]}$ (x ينتمي إلى الجزء السالب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). ▪ نُكمل الجزء المتبقي من (C_h) **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب** لأنّ h **زوجية.**
الصيغة الرابعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $\boxed{h(x) = -f(x)}$.	▪ (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور الفواصل.**
الصيغة الخامسة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $\boxed{h(x) = f(-x)}$.	▪ (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور التراتيب.**
الصيغة السادسة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $h(x) = -f(-x)$.	▪ (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى مبدأ المعلم.**
الصيغة السابعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $\boxed{h(x) = f(x+b) + k}$.	▪ نستنتج (C_h) من (C_f) **بالانسحاب ذي الشعاع** $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\k\end{pmatrix}$. (أي (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\k\end{pmatrix}$)
الصيغة الثامنة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $\boxed{h(x) = f(x) + k}$.	▪ هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $\boxed{b = 0}$. ▪ (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.
الصيغة التاسعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $\boxed{h(x) = f(x+b)}$.	▪ هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $\boxed{k = 0}$. ▪ (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-b\vec{i}$.

الصيغة العاشرة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $\boxed{h(x) = kf(x)}$؛ $k \in \mathbb{R}^*$.	▪ نحصل على نقطة من (C_h) ذات الفاصلة x بضرب ترتيب النقطة M في العدد k؛ حيث M نقطة من (C_f) فاصلتها x.

13 قابلية إشتقاق دّالة عند عدد حقيقي: (العدد المشتق)

تكون f **قابلة للاشتقاق** عند x_0 إذا وفقط إذا كانت $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = l}$ أو $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0} = l}$، حيث $\boxed{f'(x_0) = l \in \mathbb{R}}$ يسمى **العدد المشتق للدّالة f عند x_0**. وتفسيرها **البياني (أو الهندسي)** هو: المنحنى (C_f) يقبل **مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0 **معامل توجيهه** $\boxed{f'(x_0)}$، ومعادلته من الشكل:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

مخطط توضيحي (خريطة ذهنية)

f قابلة للاشتقاق عند x_0

معنــــــــــاه

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = l}$$

أو

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0} = l}$$

l يسمى **العدد المشتق للدّالة f عند x_0**، ونرمز له بالرمز **$f'(x_0)$**.

نكتب:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)}$$

التفسير الهندسي للعدد المشتق:

يُمثل بيانيا **(أو هندسيا) معامل توجيه مماس المنحنى** (C_f) **عند النقطة $A(x_0; y_0)$، حيث $y_0 = f(x_0)$.**

بصيغة أخرى: يُمثل بيانيا **(أو هندسيا) معامل توجيه مماس المنحنى** (C_f) **عند النقطة ذات الفاصلة x_0.**

القراءة البيانية للعدد المشتق:

يُمكن إيجاده بيانيا بأخذ نقطتين A و B من هذا المماس معلومتين الإحداثيات فنجد: $\boxed{f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}$.

إذا كان المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 **مُوازيا لمحور الفواصل** فإنّ **معامل توجيهه معدوم** أيّ $f'(x_0) = 0$ وتكون معادلته من الشكل $y = f(x_0)$.

14 نقطة زاوية:

إذا كان: $\boxed{\lim\limits_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1}$ وَ $\boxed{\lim\limits_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2}$، حيث l_1 و l_2 **عددان حقيقيان**.

فإنّ f **قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليسار** وعددّها المشتق هو $f'_g(x_0) = l_1$.

و f **قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليمين** وعددّها المشتق هو $f'_d(x_0) = l_2$.

في حالة $(l_1 \neq l_2)$، نقول أنّ f **غير قابلة للاشتقاق عند x_0**.

ويكون **التفسير الهندسي** هو أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0: **نقطة زاوية** للمنحنى (C_f).

ملاحظة 01: قد تُكتب النهايتان السابقتان على الشكل التالي: $\boxed{\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1}$ وَ $\boxed{\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2}$

ملاحظة 02: المنحنى (C_f) يقبل **نصفي مماسين** عند **نقطة الزاوية** معادلاتهما:

$\boxed{\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}}$ وَ $\boxed{\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}}$.

تنبيه: تبقى **النقطة الزاوية موجودة** حتى لو كانت **إحدى النهايتين السابقتين عدداً حقيقياً** والأخرى ∞.

15 نقطة الإنعطاف:

بصفة عامة، لتعيين **نقطة الانعطاف**؛ نقوم بما يلي:

- **نحسب المشتق الثاني** $f''(x)$، **وندرس إشارته**، فإذا وجدنا $f''(x)$ **انعدم** عند قيمة x_0 من D_f، **مُغيّراً إشارته**، تكون النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.

- **حالة خاصة:**

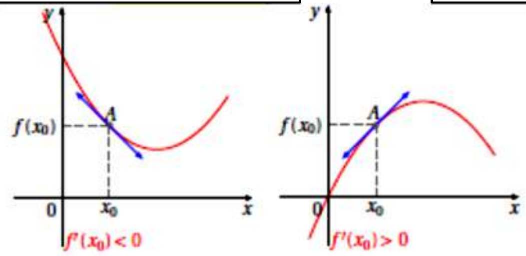
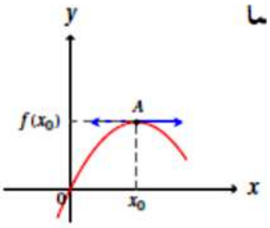
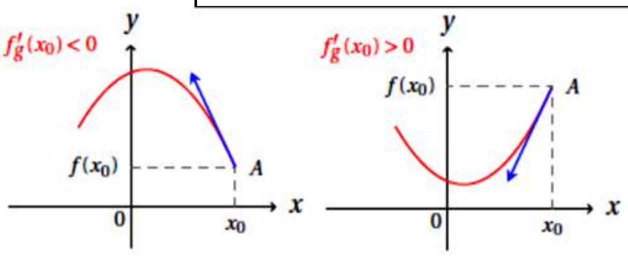
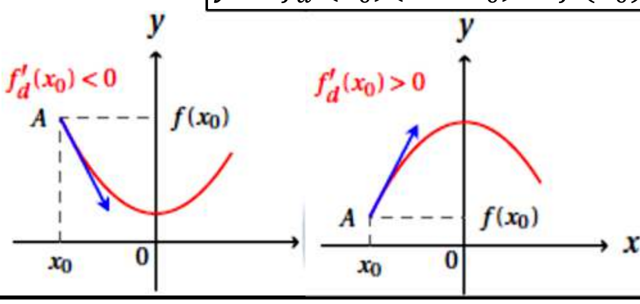
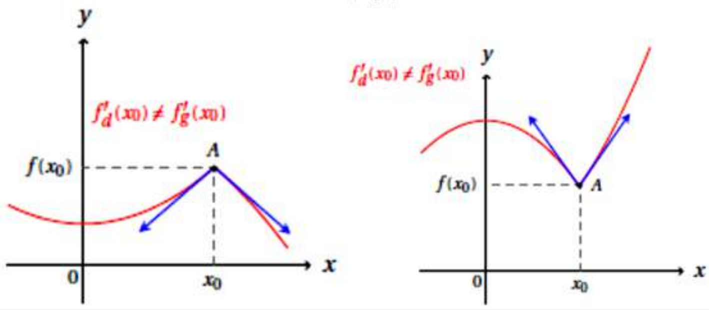
في بعض الحالات، يُمكن تعيين **نقطة الانعطاف** دون اللجوء إلى المشتق الثاني $f''(x)$، وذلك إذا **انعدم المشتق الأوّل** $f'(x)$ عند قيمة x_0 من D_f، **ولم يُغيّر إشارته**، فتكون النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.

- **ملاحظة:**

في بعض الحالات، يُفرض علينا سياق التمرين أن نُعيين **نقطة الانعطاف** بالكيفية التالية:

يُطلب منّا أن **ندرس وضعية المنحنى** (C_f) **بالنسبة إلى المماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، فإذا وجدنا أنّ (C_f) **غيّر وضعيته بالنسبة إلى المماس (قبل وبعد نقطة التماس)** نستنتج أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.

16 بعض التفسيرات الهندسية للاشتقاقية:

النهاية	الاستنتاج	التفسير البياني (أو الهندسي)
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$ **أو** $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، وعددها المشتق هو $\boxed{f'(x_0)=l}$.	المنحنى (C_f) **يقبل مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معامل توجيهه (ميله)** $\boxed{f'(x_0)=l}$، و**معادلته:** $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$ **أو** $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، وعددها المشتق هو $\boxed{f'(x_0)=0}$.	المنحنى (C_f) **يقبل مماس (مُوازي لمحور الفواصل)** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معامل توجيهه (ميله)** $\boxed{f'(x_0)=0}$ و**معادلته:** $\boxed{y=f(x_0)}$. 
$\lim_{\substack{h\to 0\\<}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_1$ **أو** $\lim_{\substack{x\to x_0\\<}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، على اليسار وعددها المشتق هو $\boxed{f_g'(x_0)=l_1}$.	المنحنى (C_f) **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معادلته:** $\boxed{y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$\lim_{\substack{h\to 0\\>}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_2$ **أو** $\lim_{\substack{x\to x_0\\>}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، على اليمين وعددها المشتق هو $\boxed{f_d'(x_0)=l_2}$.	المنحنى (C_f) **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معادلته:** $\boxed{y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$l_1\neq l_2$	الدّالة f **غير قابلة للاشتقاق** عند x_0.	المنحنى (C_f) **يقبل نصفي مماسين** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، تسمى هذه النقطة: **نقطة زاوية للمنحنى** (C_f). 

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

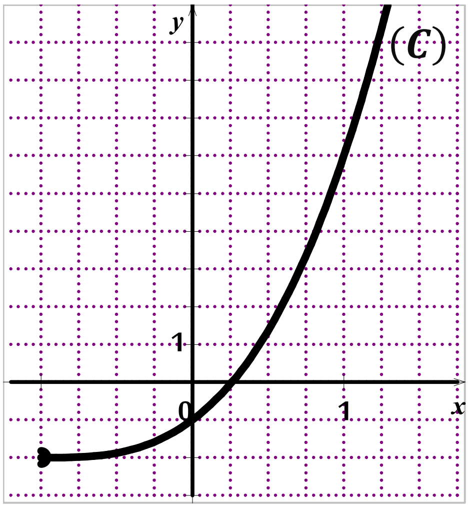
التمارين// الشعبة: علوم تجريبية.

التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدّالة العددية g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي:

$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$.

1-أ) بقراءة بيانية شكّل جدول تغيّرات الدّالة g وحدّد $g(0)$ وَإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.



ب) علّل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يُحقق: $g(\alpha) = 0$.

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2- f هي الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي:

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ) تحقّق أنّه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

حيث f' هي الدّالة المشتقة للدّالة f.

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x+1)]$ وفسّر النتيجتين بيانيا.

د) شكّل جدول تغيرات الدّالة f.

3-نأخذ $\alpha \simeq 0{,}26$

أ) عين مُدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}.

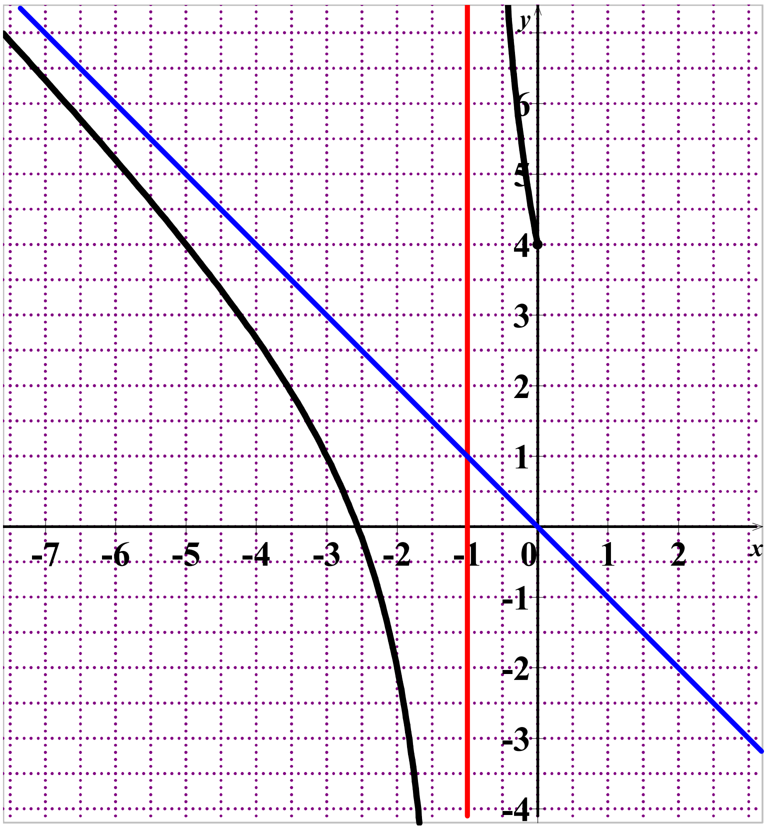
ب) أرسم المنحنى (Γ).

4-أ) أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$، حيث a و b عددان حقيقيان.

ب) عيّن F الدّالة الأصلية للدّالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تُحقق: $F(1) = 2$.

التمرين 02: (07,5 نقطة) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: علوم تجريبية.

I) f دّالة معرّفة على $I =]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$



(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مُبين في الشكل.

1)أ) أُحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I.

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f شكّل جدول تغيراتها.

2)g دّالة معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي:

$g(x) = x + \frac{4}{x+1}$.

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقّق من أنّ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يُطلب تعيين معادلة له.

جـ) أُدرس تغيرات g.

II) k دّالة معرّفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

1)أ) أُحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ >}} \frac{k(h)-k(0)}{h}$، $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ <}} \frac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج؟

ب) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

2)أُكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

3)أُرسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_k).

4)أُحسب مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$، $x = \frac{1}{2}$ وَ $x = -\frac{1}{2}$.

التمرين 03: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

I)-لتكن g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.

1)أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2)أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II)-نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج أنّ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ و(Δ).

3)أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث f' مشتقة الدّالة f.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكّل جدول تغيّرات الدّالة f. (نأخذ $f(\alpha)\simeq -0{,}1$)

4)احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5)أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى $\left(C_f\right)$.

6)لتكن h الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

و(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أنّ (C_h) هو صورة $\left(C_f\right)$ بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h).

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)
الحلول// الشعبة: علوم تجريبية.

حل التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

لدينا: المنحنى (C) هو التمثيل البياني للدّالة العددية g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي،
$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$.

1-أ) بقراءة بيانية:

تشكيل جدول تغيّرات الدّالة g؛ وتحديد $g(0)$ وَإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$:

x	-1		0	α	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$	-2	$\nearrow$	-	0	+	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{g(0) = -1}$ وَ $\boxed{g\left(\frac{1}{2}\right) > 0}$.

ب) تعليل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يُحقق، $g(\alpha) = 0$:

- g **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على المجال $]-1;+\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} g(0) = -1 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases}$، أي: $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة**، يوجد عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يُحقق، $g(\alpha) = 0$.

ج) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$:

نُلخص إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$ في الجدول التالي:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

2-لدينا: $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$؛ وَ $D_f =]-1;+\infty[$؛ (Γ) التمثيل البياني لـ f في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ) التحقق أنّه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$:

f **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على المجال $]-1;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2 - 2(1)(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{[(x+1)^2]^2}$$

$$= \frac{(x+1)[(3x^2+6x+3)(x+1) - 2(x^3+3x^2+3x+2)]}{(x+1)(x+1)^3}$$

$$= \frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3} = \frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب) تعيين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وتفسير النتيجة بيانيا:

لدينا: $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=\frac{0}{(\alpha+1)^3}=0$،

التفسير البياني: المنحنى (Γ) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة α؛ **مماساً معامل توجهيه معدوم أي: يوازي حامل محور الفواصل.**

ج) حساب، $\lim_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)$ وَ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وتفسير النتيجتين بيانيا:

- بمأنّ: $\lim_{x\overset{>}{\to}-1}(x^3+3x^2+3x+2)=1$ وَ $\lim_{x\overset{>}{\to}-1}(x+1)^2=0^+$ ، فإنّ: $\boxed{\lim_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)=+\infty}$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=-1}$ (المُوازي لمحور التراتيب) **مقارب** لـ(Γ).

- لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+3x^2+3x+2)-(x+1)(x+1)^2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=x+1}$ **مقارب مائل** لـ(Γ) عند $+\infty$.

د) تشكيل جدول تغيرات الدّالة f :

لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$ ومنه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$، فإنّ: $(x+1)^3>0$

إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$؛ **ويكون:**

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

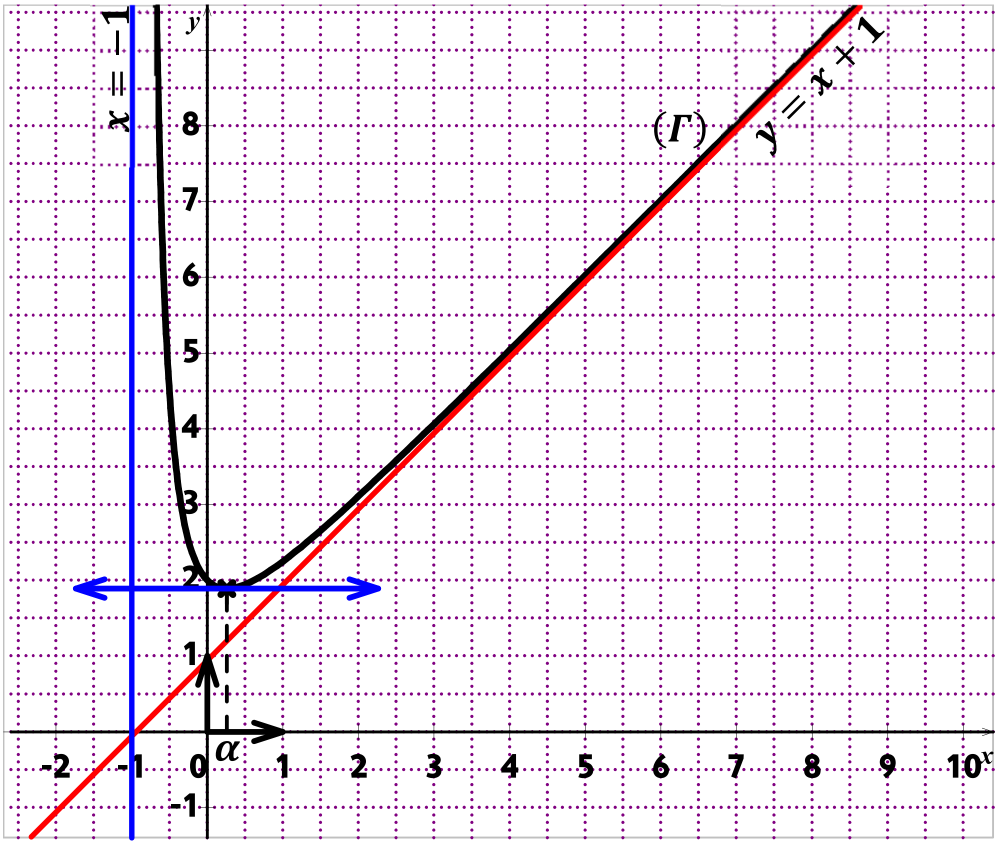
حيث: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$.

3-بأخذ $\alpha\simeq 0,26$

أ) تعيين مُدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}:

نلاحظ أنّ: $f(x)=\frac{g(x)+3}{(x+1)^2}$، إذن: $\boxed{f(\alpha)=\frac{g(\alpha)+3}{(\alpha+1)^2}=\frac{3}{(\alpha+1)^2}\simeq 1,89}$.

ب) رسم المنحنى (Γ):



4-أ) كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$، حيث a و b عددان حقيقيان:

لدينا: $\frac{x^3+(a+2)x^2+(2a+1)x+a+b}{(x+1)^2} = \frac{(x+a)(x^2+2x+1)+b}{(x+1)^2} = \frac{(x+a)(x+1)^2+b}{(x+1)^2} = f(x) = x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$

ولدينا من جهة أخرى: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$، بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a+2=3 \\ 2a+1=3 \\ a+b=2 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

إذن: $\boxed{f(x)=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}}$.

ب) تعيين F الدّالة الأصلية للدّالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تُحقق، $F(1)=2$:

- لدينا: $f(x)=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$ ومنه: $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت؛
- $F(1)=2$ معناه: $\frac{1}{2}(1)^2+1-\frac{1}{1+1}+c=2$؛ وبالتالي: $c=1$

إذن: $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+1}$.

حل التمرين 02: (07,5 نقطة) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: علوم تجريبية.

I) f دالّة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$؛

1)أ) حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I:

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)=+\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}}(-x)=1$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}}\frac{4}{x+1}=+\infty$.
- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x)=-\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}}(-x)=1$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}}\frac{4}{x+1}=-\infty$.
- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x+1}=0$.

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f، تشكيل جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4

$g(2$ دّالة معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$.

أ) حساب نهاية g عند $+\infty$:

▪ **بماأنّ:** $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1}=0$، فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$.

ب) التحقق من أنّ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يُطلب تعيين معادلة له:

▪ **بماأنّ:** $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1}=0$، أي: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x]=0}$

فإنّ: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $\boxed{y=x}$ (المنصف الأوّل) مقارب مائل للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

جـ) دراسة تغيرات g:

g **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على المجال $[0;+\infty[$، ولدينا:

$$g'(x)=1-\frac{4(1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

ومنه: إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-1)$ على المجال $[0;+\infty[$؛ **لأنّ:** $\frac{(x+3)}{(x+1)^2}>0$ على $[0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن: g **متناقصة تماما** على المجال $[0;1]$، و**متزايدة تماما** على المجال $[1;+\infty[$؛

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	4	↘	3	↗	$+\infty$

k (II دّالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$.

1)أ) حساب $\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$، $\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$:

▪ $\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{\frac{(h-4)(h+1)+4}{h+1}}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{h^2+h-4h-4+4}{h(h+1)}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{h-3}{h+1}=-3$

ومنه: الدّالة k **قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين** وَعددها المشتق من اليمين عند 0 هو $\boxed{k'_d(0)=-3}$.

▪ $\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{\frac{-(h+4)(h+1)+4}{h+1}}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{-h^2-h-4h-4+4}{h(h+1)}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{-h-5}{h+1}=-5$

ومنه: الدّالة k **قابلة للاشتقاق عند 0 من اليسار** وَعددها المشتق من اليسار عند 0 هو $\boxed{k'_g(0)=-5}$.

الاستنتاج:

بما أنّ: $\boxed{k'_g(0) \neq k'_d(0)}$، فإنّ: الدّالة k **غير قابلة للاشتقاق عند 0**.

ب) التفسير الهندسي:

النقطة ذات الفاصلة 0 هي **نقطة زاوية**؛ والمنحنى (C_k) يقبل **نصفي مماسين**.

2) كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$:

- معادلة (Δ_1) من الشكل $y = k'_g(0)(x-0) + k(0)$ ومنه: $\boxed{(\Delta_1): y = -5x + 4}$.
- معادلة (Δ_2) من الشكل $y = k'_d(0)(x-0) + k(0)$ ومنه: $\boxed{(\Delta_2): y = -3x + 4}$.

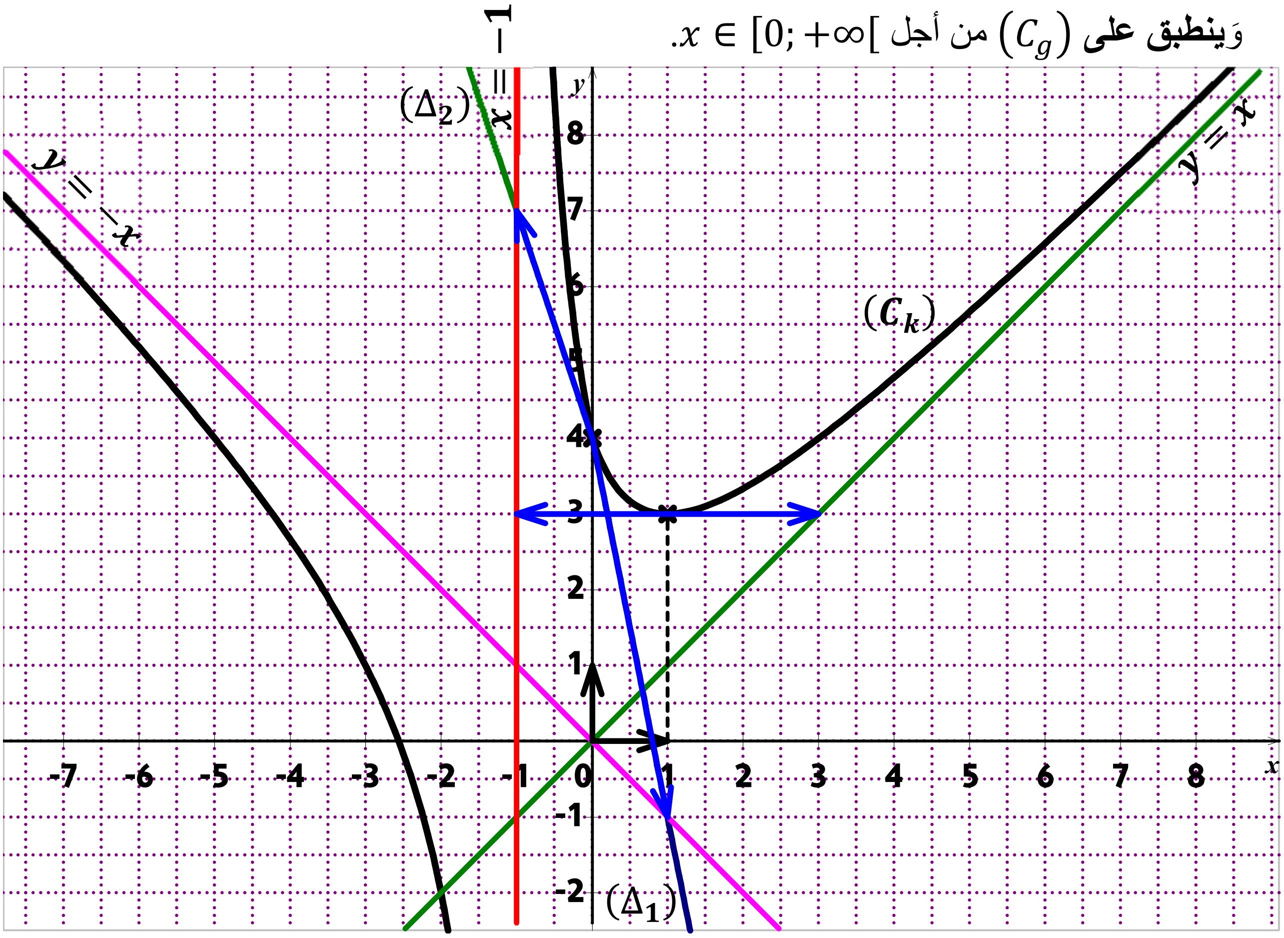
3) رسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_k):

لدينا: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1} = \begin{cases} x + \frac{4}{x+1}; x \geq 0 \\ -x + \frac{4}{x+1}; x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \end{cases}$

أي: $k(x) = \begin{cases} g(x); x \in [0; +\infty[\\ f(x); x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \end{cases}$

إذن: (C_k) **ينطبق على** (C_f) من أجل $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$؛

وَ**ينطبق على** (C_g) من أجل $x \in [0; +\infty[$.



4) حساب مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$، $x = \frac{1}{2}$ وَ $x = -\frac{1}{2}$:

لدينا: $A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)dx$؛

ومنه: $\left(\frac{1}{4}+4\ln 3\right)ua = \left[\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^0 = A$.

حل التمرين 03: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

I)- لدينا: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ وَ $D_g =]-\infty;+\infty[$.

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3) = -\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3) = +\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g على $\mathbb{R}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

لدينا: $\boxed{g'(x) = 6x^2 - 8x + 7}$

ولدينا: $6x^2 - 8x + 7 > 0$ (لأنّ مميزه سالب تماما $\Delta = (-8)^2 - 4(6)(7) = -104 < 0$)

وبالتالي: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\boxed{g'(x) > 0}$.

إذن: الدّالة g **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	- - - 0 + +	$+\infty$

2) أ) تبيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$:

- لدينا: g **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $[0,7;0,8]$ (لأنّها **متزايدة تماما** على المجال $\mathbb{R}$)
- ولدينا: $\begin{cases} g(0,7) = -0,374 \\ g(0,8) = +0,064 \end{cases}$ أي: $g(0,7) \times g(0,8) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة**، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0,7;0,8]$.

ب) استنتاج حسب قيم العدد الحقيقة x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيّرات وحسب السؤال 2)أ) **نجد:**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II)- لدينا: $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$ ، $D_f =]-\infty,+\infty[$.

و (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x\right) = -\infty$ ؛
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x\right) = +\infty$.

2) أ) تبيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$:

لدينا: $\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{x+1}{2} + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ومنه: $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

$$=\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$=\frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$=\frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{2(x^3-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=f(x)$$

إذن: $\boxed{f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}}$.

ب) استنتاج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له:

لدينا: $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x}{4x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{4x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x}{4x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{4x}=0 \end{cases}$، إذن: المستقيم $\boxed{(\Delta): y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$ **مُقارب مائل لـ** (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

جـ) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و(Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$)

لدينا: $f(x)-y=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ولدينا: $2x^2-2x+1>0$ (لأنّ مميزه سالب تماما $\Delta=(-2)^2-4(2)(1)=-4<0$)

وبالتالي: إشارة الفرق $f(x)-y$ من إشارة البسط $(1-3x)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$1-3x$	+	0	-
$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

3)أ) تبيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$:

لدينا: $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

ومنه: $f'(x)=\frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}$

$$=\frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

إذن: $\boxed{f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}}$.

ب) استنتاج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم تشكيل جدول تغيّرات الدّالّة f: ($f(\alpha)\simeq-0,1$)

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $xg(x)$ **وهي ملخصة في الجدول التالي:**

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		-	0		+		
$g(x)$			-		0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) حساب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$:

- لدينا: $f(1)=\frac{(1)^3-2(1)+1}{2(1)^2-2(1)+1}=\frac{0}{1}=0$؛
- $f(x)=0$ معناه: $\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-2x+1}=0$

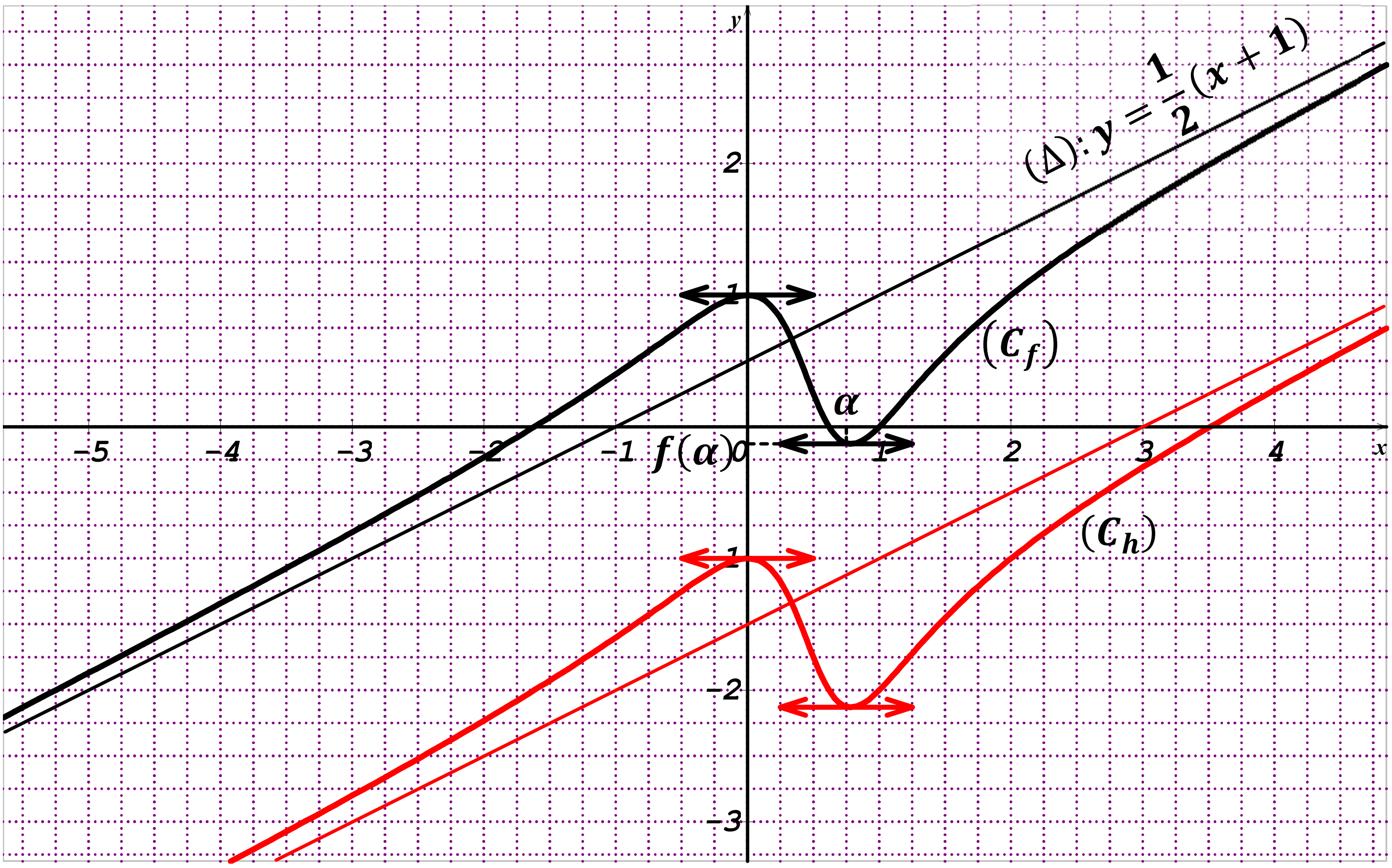
ومنه: $(x-1)(x^2+x-1)=0$

وعليه: $x-1=0$ أو $x^2+x-1=0$

وبالتالي: $x=1$ أو $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ أو $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

إذن: حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$ هي: $x=1$؛ $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$؛ $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) والمنحنى (C_h):



6) لدينا: $h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$، $D_h=\mathbb{R}$؛ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) التحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)=f(x)-2$:

لدينا: $f(x)-2=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}-2$

$$=\frac{x^3-2x+1-2(2x^2-2x+1)}{2x^2-2x+1}=\frac{x^3-2x+1-4x^2+4x-2}{2x^2-2x+1}=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}=h(x)$$

إذن: $\boxed{h(x)=f(x)-2}$.

ب) استنتاج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه، ثم إنشاء (C_h):

بمأنّ $h(x)=f(x)-2$ فـإنّ (C_h) هو **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{j}$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)
التمارين// الشعبة: تقني رياضي.

التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ-أثبت أنّ الدّالة f فردية.

ب-أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

جـ-ادرس تغيّرات الدّالة f.

2) أ-أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ب-أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها.

جـ-بيّن أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 1$ مُقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$، ثمّ استنتج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر.

د-أرسم (d)؛ (d') و (C_f) في المعلم السابق.

3) g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

أ-بيّن أنّ الدّالة g زوجية.

ب-انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدّالة g في نفس المعلم السابق.

التمرين 02: (07 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

I) نعتبر الدّالة العددية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $\alpha \in]-1{,}48; -1;47[$، ثمّ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$.

ثمّ ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3) بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4)ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

5)نرمز بـS إلى مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = \alpha$، $x = 0$ وَ $y = 0$.

أثبت أنّ: من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ثمّ بيّن أنّ: $\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: تقني رياضي.

حل التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

لدينا: $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ وَ $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

و (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم **المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1)أ-اثبات أنّ الدّالة f فردية:

لدينا: $D_f = \mathbb{R}$ **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر**،

ولدينا: $f(-x) = (-x)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right) = -x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = -f(x)$، إذن: f دالّة **فردية**.

ب-اثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$:

لدينا: $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

ومنه: $f'(x) = 1 + \frac{1\times\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times x}{\sqrt{x^2+1}^2}$

$$= 1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = 1 + \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = 1 + \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

جـ-دراسة تغيّرات الدّالة f :

- لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = +\infty$ لأنّ: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ وَ $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

وبمأنّ f دالّة **فردية** وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، فإنّ: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

- ولدينا من جهة أخرى: من أجل كل عدد حقيقي x، $\boxed{f'(x) > 0}$.

إذن: الدّالة f **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2)أ-كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0:

معادلة (T) من الشكل $y = f'(0)(x-0) + f(0)$، وبمأنّ: $\begin{cases} f'(0) = 1 + \frac{1}{(0^2+1)\sqrt{0^2+1}} = 2 \\ f(0) = 0\left(1 + \frac{1}{\sqrt{0^2+1}}\right) = 0 \end{cases}$،

فإنّ: $\boxed{(T): y = 2x}$.

ب-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتاج أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها:

(ندرس إشارة الفرق $f(x)-2x$)

لدينا: $f(x)-2x = x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-2x = x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-2\right) = x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$

- من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2 \geq 0$ ومنه: $x^2+1 \geq 1$

وعليه: $\sqrt{x^2+1} \geq 1$

وبالتالي: $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$ إذن: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1 \leq 0}$.

إذن: **إشارة الفرق** $f(x)-2x$ **عكس إشارة** x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$f(x)-2x$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع **فوق** (T)	(C_f) **يقطع** (T)	(C_f) يقع **تحت** (T)

استنتاج أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها:

نلاحظ أنّ (C_f) **غيّر وضعيته بالنسبة إلى مماسه** (T) في نقطة **التمّاس** وهي النقطة O، أي (C_f) **يخترق** المماس (T) في المبدأ O، **إذن:** المبدأ O هو **نقطة انعطاف** لـ(C_f).

جـ-تبيان أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x+1$ مُقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-(x+1)\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right) = 0$$

لأنّ: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$

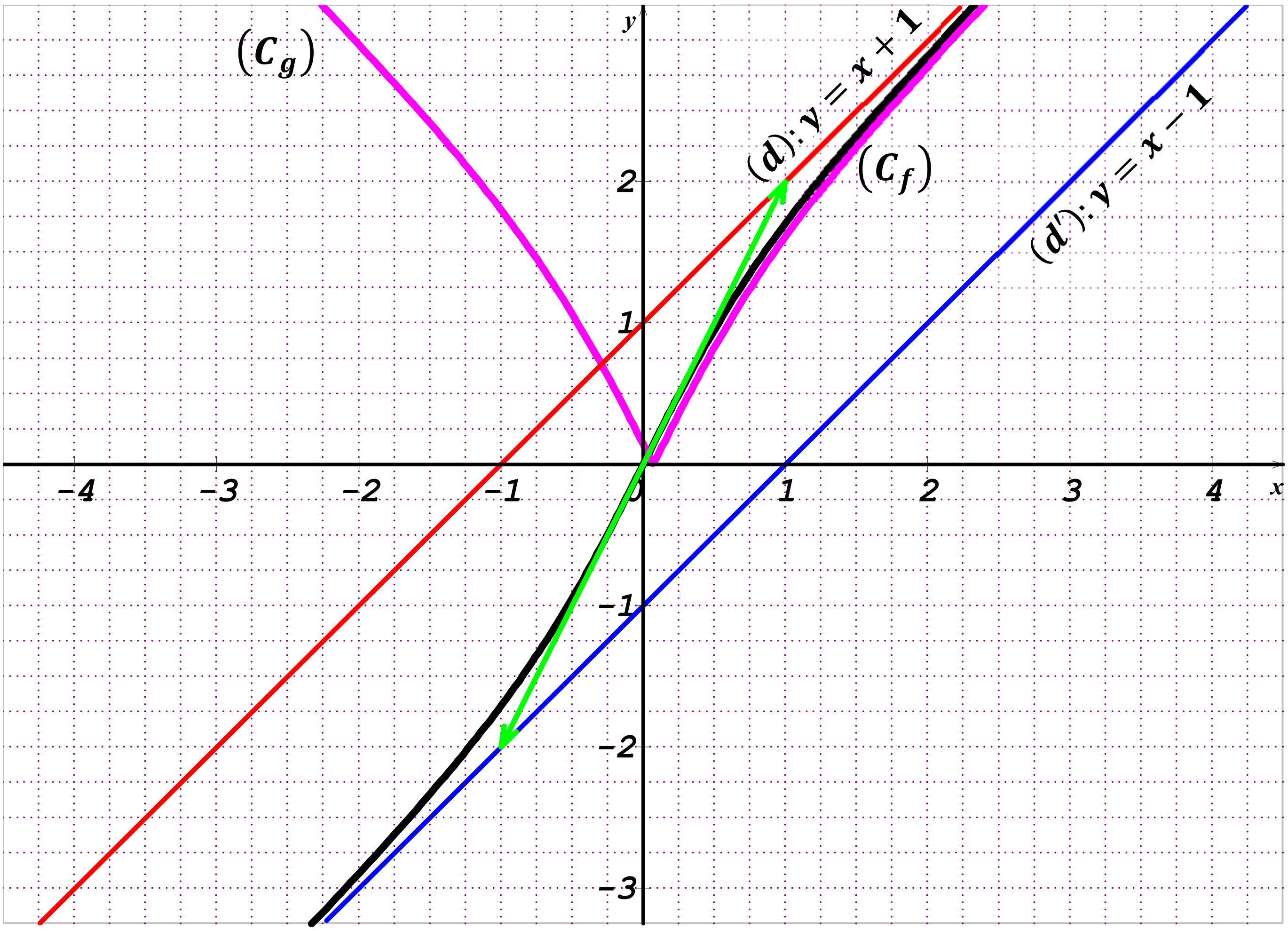
إذن: المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x+1$ مُقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$.

استنتاج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر:

الدّالة f **فردية**، فالمنحنى (C_f) **متناظر بالنسبة للمبدأ** O؛ وبمأنّ (C_f) يقبل (d) كمستقيم مُقارب مائل بجوار $+\infty$ فإنّه يقبل مستقيم مُقارب مائل آخر (d') بجوار $-\infty$ وهو **نظير** (d) بالنسبة إلى المبدأ O.

لدينا: $(d): y=x+1$ وبالتالي: $(d'): -y=-x+1$ إذن: $\boxed{(d'): y=x-1}$.

د-رسم (d)؛ (d') و (C_f) في المعلم السابق:



3) لديـــنا: $g(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ وَ $D_g = \mathbb{R}$.

تذكير:
$|x| = |-x|$
وَ $|x|^2 = x^2$
وَ $\sqrt{x^2} = |x|$

أ-تبيان أنّ الدّالة g زوجية:

لدينا: $D_g = \mathbb{R}$ **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر**،

ولدينا: $g(-x) = |-x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|-x|^2+1}}\right) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|^2+1}}\right) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = g(x)$،

إذن: g دّالة **زوجية.**

ب-انطلاقا من (C_f) رسم (C_g) منحنى الدّالة g في نفس المعلم السابق:

نلاحظ أنّ: $g(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|^2+1}}\right) = f(|x|)$

ومنه: من أجل $x \in [0; +\infty[$ يكون $g(x) = f(x)$ وعليه: (C_g) **ينطبق** على (C_f)، وهو **متناظر إلى محور التراتيب** لأنّ g دّالة **زوجية.**

حل التمرين 02: (07 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تقني ر.

I) لدينا: $g(x) = x^3 + 6x + 12$ وَ $D_g = \mathbb{R}$.

1) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\boxed{g'(x) = 3x^2 + 6 > 0}$، إذن: الدّالة g **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$.

2) تبيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيداً α حيث $\alpha \in]-1,48; -1,47[$

- لدينا: g **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $[-1,48; -1,47]$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$)

- ولدينا: $\begin{cases} g(-1,48) = -0,121792 \\ g(-1,47) = +0,003477 \end{cases}$ أي: $g(-1,48) \times g(-1,47) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة**، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $\alpha \in]-1,48; -1,47[$.

استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	- 0 +

II) لدينا: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$ وَ $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

و (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

ب) تبيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$:

f **قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$، وَلدينا:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2)-(2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4+6x^2-2x^4+6x}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2+6x}{(x^2+2)^2} = \frac{x(x^3+6x+6)}{(x^2+2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

دراسة اتجاه تغيّر الدّالّة f وتشكيل جدول تغيّراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $xg(x)$ **وهي ملخصة في الجدول التالي:**

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		-		-	0	+	
$g(x)$		-	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

الدّالّة f **متزايدة تماماً** على كل من المجالين $]-\infty; \alpha]$ وَ $[0; +\infty[$، و**متناقصة تماماً** على المجال $[\alpha; 0]$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	-3	↗	$+\infty$

2)أ) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-6}{x^2+2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{x} = 0$

وَ $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-6}{x^2+2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x} = 0$

إذن: المستقيم $\boxed{(\Delta): y = x}$ **مُقارب مائل** لـ (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$)

لدينا: $f(x) - x = \frac{-2x-6}{x^2+2} = \frac{-2(x+3)}{x^2+2}$،

وبالتالي: إشارة الفرق $f(x) - x$ من إشارة البسط $-2(x+3)$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	-	0	+
$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

3) تبيان أنّ $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$:

لدينا: $f(\alpha)=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}$،

ومنه: $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha=\frac{2(\alpha^3-6)-3\alpha(\alpha^2+2)}{2(\alpha^2+2)}=\frac{-\alpha^3-6\alpha-12}{2(\alpha^2+2)}=\frac{-g(\alpha)}{2(\alpha^2+2)}=0$

لأنّ: $g(\alpha)=0$.

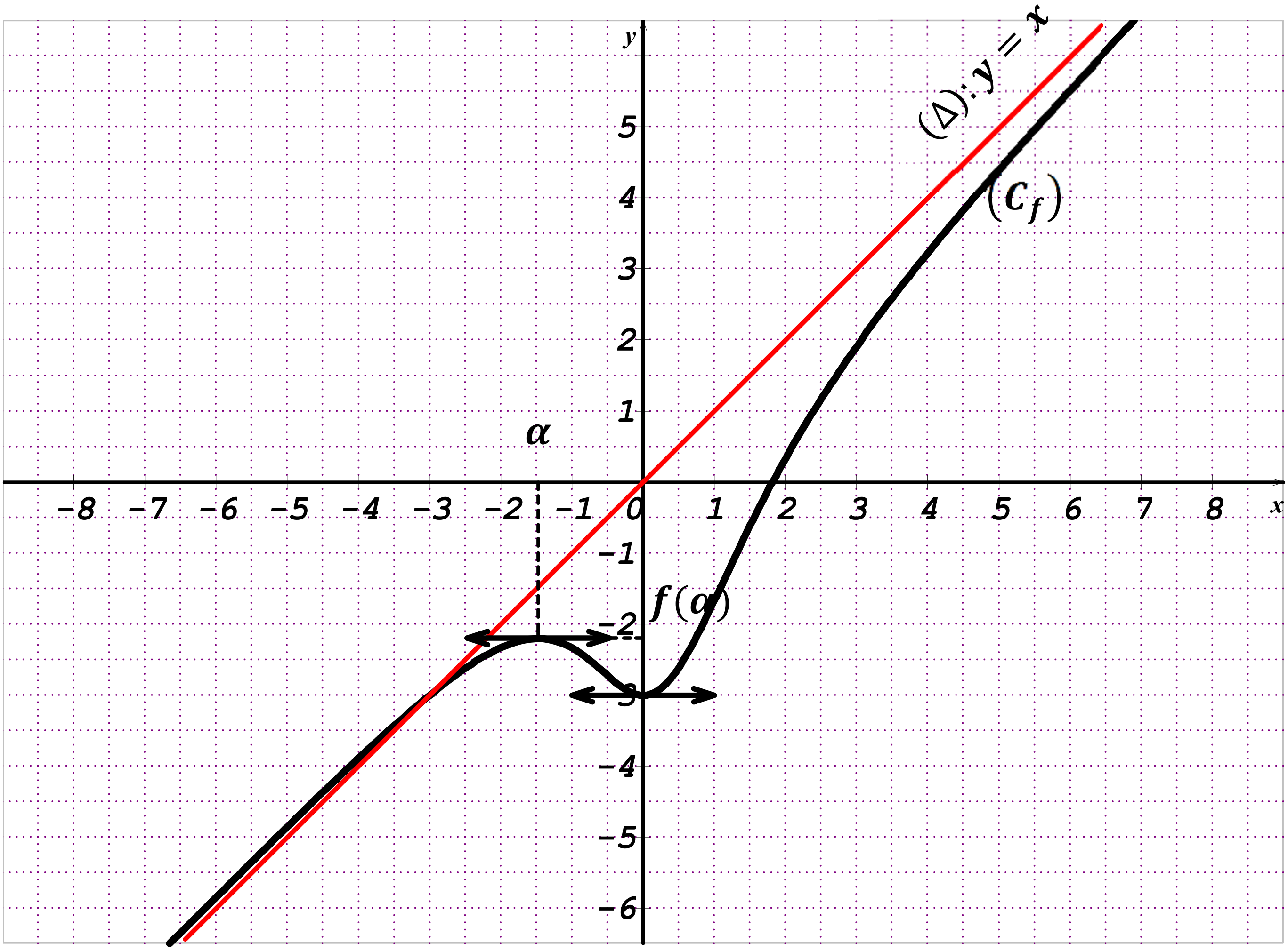
إذن: $\boxed{f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha}$.

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $-1,48<\alpha<-1,47$ وَ $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$، وبالتالي: $-1,48\times\frac{3}{2}<\frac{3}{2}\alpha<-1,47\times\frac{3}{2}$

إذن: $\boxed{-2,22<f(\alpha)<-2,205}$.

4)رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f):



5) S مساحة الحيز المستوي المُحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=\alpha$، $x=0$ و $y=0$.

لدينا: $S=\int_\alpha^0 -f(x)dx$ لأنّ (C_f) يقع **تحت محور الفواصل** على المجال $[\alpha;0]$.

اثبات أنّ: من أجل كل $\boldsymbol{x \in [\alpha; 0]}$ **،** $\boldsymbol{-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)}$ **ثمّ تبيان أنّ:** $\boldsymbol{\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha}$**:**

من جدول تغيّرات الدّالة $\boldsymbol{f}$، إذا كان: $\alpha \leq x \leq 0$،

فإنّ: $f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$ (لأنّها **متناقصة تماماً** على المجال $[\alpha; 0]$)

وبالتالي: $\boxed{-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)}$.

ومنه: $-f(\alpha) \leq -f(x) \leq 3$ وعليه: $\int_\alpha^0 -f(\alpha)dx \leq \int_\alpha^0 -f(x)dx \leq \int_\alpha^0 3dx$

وبالتالي: $-\left[\frac{3}{2}\alpha x\right]_\alpha^0 \leq S \leq [3x]_\alpha^0$

إذن: $\boxed{\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha}$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)
التمارين// الشعبة: رياضيات.

التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي: $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

(C_f) منحنى الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) ادرس تغيّرات الدّالة f.

2)أ-بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y=x$.

ب-أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و(D).

3)أ-بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1{,}3<x_0<1{,}4$.

ب-عيّن معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

جـ-أرسم (Δ) و(C_f) في نفس المعلم.

4)أوجد الدّالة الأصلية للدّالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر x.

5)g الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$.

(C_g) منحنى الدّالة g في المعلم السابق.

-بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f)، ثمّ ارسمه في نفس المعلم السّابق.

6)ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x: $g(x)=m^2$.

التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: رياضيات.

حل التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: رياضيات.

لدينا: $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ وَ $D_f =]-1; +\infty[$.

(C_f) منحنى الدّالة f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) دراسة تغيّرات الدّالة f:

- لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}\right) = +\infty$ لأنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

وَ $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}\right) = -\infty$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = -\infty$ وَ $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} x = -1$.

- ولدينا: من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$،

$$\boxed{f'(x) = 1 - 2\left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}^2}\right) = 1 + \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0}.$$

إذن: الدّالة f **متزايدة تماما** على $]-1; +\infty[$، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	-1	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ 0	$+\infty$

2) أ-تبيان أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y = x$:

بما أنّ $\boxed{\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x) = -\infty}$، فإنّ المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = -1}$ **(المُوازي لمحور التراتيب)** مُقارب لـ (C_f).

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$،

إذن: المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مُقارب **مائل** لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب-دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$)

لدينا: $f(x) - x = \frac{-2}{\sqrt{x+1}} < 0$ إذن: من أجل كل x من $]-1; +\infty[$، (C_f) يقع **تحت** المستقيم (D).

3) أ-بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$:

- لدينا: f **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]1,3; 1,4[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $]-1; +\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(1,3) = -0,01 \\ f(1,4) = +0,10 \end{cases}$ أي: $f(1,3) \times f(1,4) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة**، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.

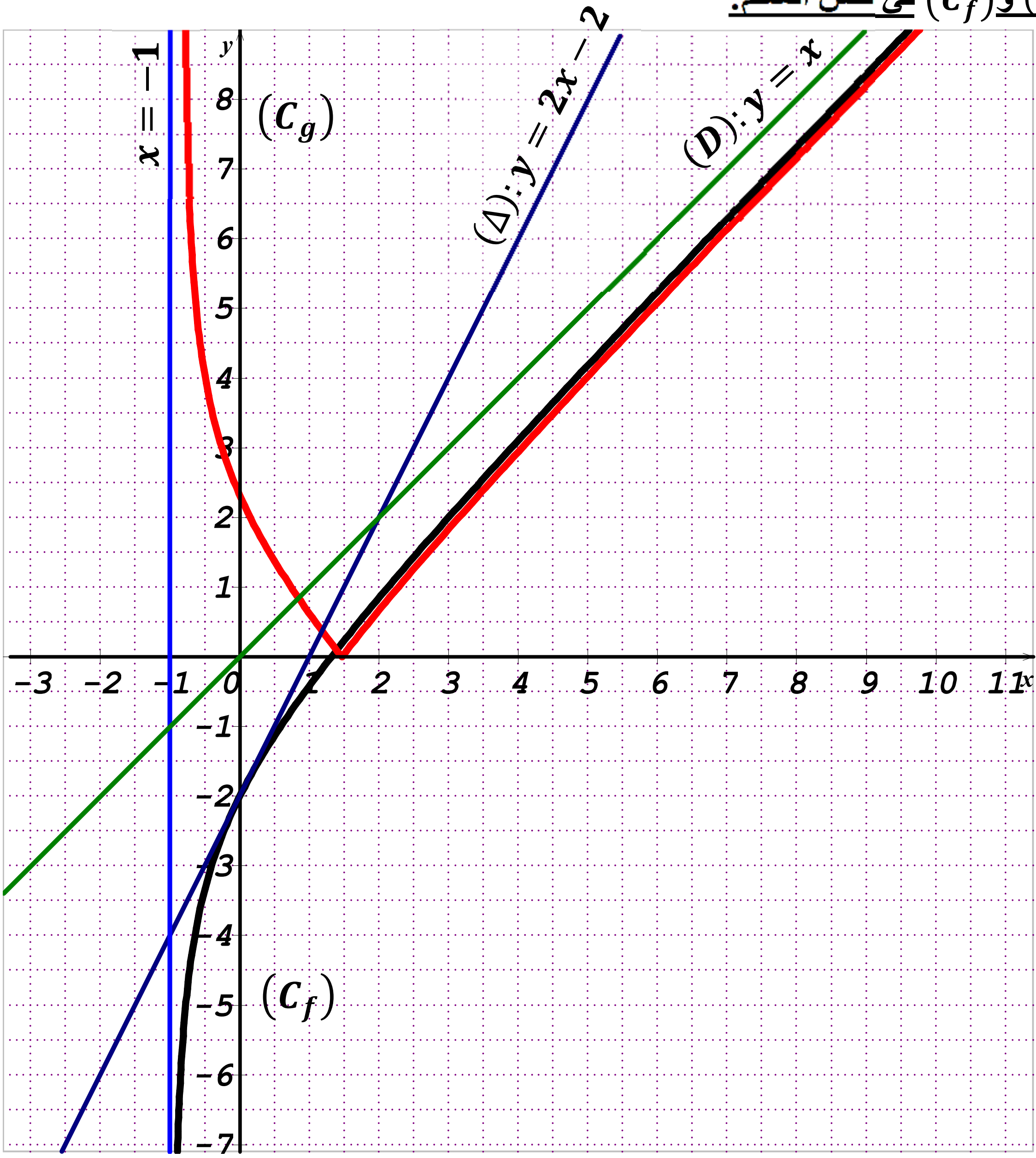
أي: (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.

ب-تعيّن معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب:

نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور التراتيب **فاصلتها 0** إذن: (Δ) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0، معادلته من الشكل $y = f'(0)(x-0) + f(0)$، وبمأنّ: $\begin{cases} f'(0) = 1 + \frac{1}{(0+1)\sqrt{0+1}} = 2 \\ f(0) = 0 - \frac{2}{\sqrt{0+1}} = -2 \end{cases}$،

فإنّ: $\boxed{(\Delta): y = 2x - 2}$.

جـ-رسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم:



4)إيجاد الدّالة الأصلية للدّالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر x:

مجموعة الدّوال الأصلية للدّالة f على المجال $]-1; +\infty[$ هي الدّوال:

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + c$، حيث c ثابت حقيقي، ونعلم أنّ $F(0) = 0$ ومنه: $c = 4$

إذن: $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + 4}$.

5)لدينا: $g(x) = |f(x)|$ وَ $D_g =]-1; +\infty[$، (C_g) منحنى الدّالة g في المعلم السابق.

-تبيان كيف يُمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f)، ثمّ رسمه في نفس المعلم السّابق:

لدينا: $g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) \leq 0 \end{cases}$، أي: $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in [x_0; +\infty[\\ -f(x) & ; x \in]-1; x_0] \end{cases}$

إذن: من أجل $x \in [x_0; +\infty[$، فإنّ $g(x) = f(x)$ وبالتالي: (C_g) **ينطبق** على (C_f)،

ومن أجل $x \in]-1; x_0]$، فإنّ $g(x) = -f(x)$ وبالتالي: (C_g) **نظير** (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

6)مناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x، $g(x) = m^2$:

إذا كان $m^2 = 0$ أي: $\boxed{m = 0}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلا واحدا موجبا.**

إذا كان $0 < m^2 < 2$ أي: $\boxed{m \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلين موجبين.**

إذا كان $m^2 = 2$ أي: $\boxed{m = \sqrt{2} \text{ أو } m = -\sqrt{2}}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلين أحدهما موجب والآخر معدوم.**

إذا كان $m^2 > 2$ أي: $\boxed{m \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلين مختلفين في الإشارة.**

التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: رياضيات.

.