العبقري في الرياضيات

الدوال العددية

الثالثة ثانوي

الشعب: ● تسيير وإقتصاد.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية)
الملخص // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

ملخص: حول الدّوال العددية// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: تسيير وإ.

1 المستقيمات المقاربة:

المستقيم المقارب	النهاية	التفسير الهندسي
①العمودي	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = a}$ (المُوازي لمحور التراتيب) مقارب لـ(C_f).
②الأفقي	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = b}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ(C_f) عند ∞.
③المائل	$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = ax + b}$ مقارب **مائل** لـ(C_f) عند ∞.

ملاحظة: إذا كان: $\begin{cases} f(x) = ax + b + g(x) \\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0 \end{cases}$،

فإنّ: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = ax + b}$ مقارب **مائل** لـ(C_f) عند ∞.

2 الدّالة الزوجية، والدّالة الفردية:

الدّالة f	معناه	ويكون
①الزوجية	1) D_f **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر** (أي: من أجل كل x من D_f، فإنّ $-x$ من D_f) 2) $\boxed{f(-x) = f(x)}$.	منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **محور التراتيب**.
②الفردية	1) D_f **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر** (أي: من أجل كل x من D_f، فإنّ $-x$ من D_f) 2) $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ أو $\boxed{f(-x) + f(x) = 0}$.	منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **مبدأ المعلم**.

3 مركز التناظر، ومحور التناظر:

①محور التناظر	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = \alpha}$ **محور تناظر** للمنحنى (C_f)، **معناه:** $\boxed{f(2\alpha - x) = f(x)}$ أو $\boxed{f(\alpha - x) = f(\alpha + x)}$.
②مركز التناظر	النقطة $\boxed{\omega(\alpha;\beta)}$ **مركز تناظر** للمنحنى (C_f)، **معناه:** $\boxed{f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta}$ أو $\boxed{f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta}$.

4 تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب، ومع حامل محور الفواصل:

☜	الطريقة	ونكتب
① تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب $(C_f)\cap(yy')$	▪ نحسب $\boxed{f(0)}$.	$(C_f)\cap(yy')=\{A(0;\dots)\}$
② تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل $(C_f)\cap(xx')$	▪ نحل المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ في D_f.	$(C_f)\cap(xx')=\{A(\dots;0);B(\dots;0)\}$

5 المماس:

هناك سِتُّ (06) صيغ -تقريباً- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى **معرفة فاصلة نقطة التّماس x_0 هي المفتاح للإجابة** على أي منها كما سنرى:

الصيغة ☜	الطـــــــرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى (العادية)	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	نكتب الدستور: $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المُعطاة.
الصيغة الثانية	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0.	نحلّ المعادلة $\boxed{f(x_0)=y_0}$، و عند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).
الصيغة الثالثة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **ميله (أو معامل توجيهه)** يساوي α.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0)=\alpha}$، و عند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). **ملاحظة:** عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات.
الصيغة الرابعة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُوازي** المستقيم ذا المعادلة $y=\alpha x+\beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0)=\alpha}$، عُدنا إلى الحالة الثانية. **ملاحظة:** مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه.
الصيغة الخامسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُعامد** المستقيم ذا المعادلة $y=\alpha x+\beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{\alpha\times f'(x_0)=-1}$. **ملاحظة:** مستقيمان متعامدان، جداء معاملي توجيههما يساوي (-1).
الصيغة السادسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يشمل** النقطة ذات الإحداثيين $(x_M;y_M)$.	نحلّ المعادلة $\boxed{y_M=f'(x_0)(x_M-x_0)+f(x_0)}$، و عند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).

6 وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): ax+b$:

الطريقة ☜	إشارة الفرق	الوضعية النسبية
ندرس إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$	▪ $f(x)-(ax+b)>0$ ▪ $f(x)-(ax+b)<0$ ▪ $f(x)-(ax+b)=0$	▪ (C_f) يقع **فوق** (Δ). ▪ (C_f) يقع **تحت** (Δ). ▪ (C_f) **يقطع** (Δ).

7 النهايات:

أ) حالات <<عدم التعيين>> (ح ع ت):

توجد	الجمع	الجداء	حاصل القسمة	
أربع (04) أشكال	$(+\infty)+(-\infty)$ والعكس	$0\times\infty$ والعكس	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

ب) نهاية #دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو$-\infty$:

- **النهاية** عند $+\infty$ وَعند $-\infty$ لدّالة كثير حدود هي **نهاية حدها الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.

$f(x)=\boldsymbol{x^3}+x-2$	$g(x)=x^2\boldsymbol{-2x^3}+1$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\boldsymbol{x^3})$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\boldsymbol{x^3})$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\boldsymbol{-2x^3})$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\boldsymbol{-2x^3})$

ج) نهاية #دالة ناطقة عند $+\infty$ أو$-\infty$:

- **النهاية** عند $+\infty$ وَعند $-\infty$ لدّالة ناطقة هي **نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.
- **لحساب نهايات #دالة ناطقة** عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها؛ **نتذكّر أنّ:** $\boxed{\frac{l}{0}=\infty}$ ويُحدّد بدراسة إشارة **المقام** على اليمين واليسار **وحسب** مجموعة التعريف.

المقام من الشكل/ حيث	n فردي	n زوجي
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	**إشارة** x^n **من إشارة** x **النهاية عند 0** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{}{x^n}\ \left(\frac{l}{0^-}\right)$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{}{x^n}\ \left(\frac{l}{0^+}\right)$	**إشارة** x^n **موجب** $(x^n\geq0)$ **النهاية عند 0** $\lim\limits_{x\to0}\frac{}{x^n}\ \left(\frac{l}{0^+}\right)$
$(ax+b)^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	**إشارة** $(ax+b)^n$ **من إشارة** $(ax+b)$ **النهاية عند** $-\frac{b}{a}$: $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{b}{a}\\<}}\frac{}{(ax+b)^n}\ \left(\frac{l}{0_{a\text{ عكس إشارة}}}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{b}{a}\\>}}\frac{}{(ax+b)^n}\ \left(\frac{l}{0_{a\text{ عكس إشارة}}}\right)$ وَ	**إشارة** $(ax+b)^n$ **موجب** $(ax+b)^n\geq0$ **النهاية عند** $-\frac{b}{a}$: $\lim\limits_{x\to-\frac{b}{a}}\frac{}{(ax+b)^n}\ \left(\frac{l}{0^+}\right)$
ax^2+bx+c	**ندرس إشارة** ax^2+bx+c **باستعمال المميز** $\Delta=b^2-4ac$	

ج) إشارة $ax+b$ $(a\neq0)$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	**عكس إشارة** a	0	**مثل إشارة** a

ج) إشارة $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

المميز $\Delta = b^2 - 4ac$	حلول المعادلة $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$	إشارة $P(x)$	تحليل $P(x)$
$\Delta < 0$	$S = \emptyset$	x: $-\infty$ … $+\infty$؛ $P(x)$: مثل إشارة a	لا يُمكن تحليل $P(x)$
$\Delta = 0$	$S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	x: $-\infty$ … $-\frac{b}{2a}$ … $+\infty$؛ $P(x)$: مثل إشارة a ، 0 ، مثل إشارة a	$P(x) = a(x - x_0)^2$ $\left(x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$
$\Delta > 0$	$S = \{x_1; x_2\}$ **حيث:** $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$؛ $P(x)$: مثل إشارة a ، 0 ، عكس إشارة a ، 0 ، مثل إشارة a (نفرض أنّ $x_1 < x_2$)	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

8 الإشتقاقية:

أ. مشتقات دوال مألوفة:

مجالات قابلية الاشتقاق	$f'(x) =$	$f(x) =$
$\mathbb{R}$	0	$(k \in \mathbb{R})\ k$
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})\ x^n$
$]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{x^n}$
$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$

ب. المشتقات والعمليات على الدوال: u و v دالّتان **قابلتان للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

$\frac{u}{v}$ (الدّالة v **لا تنعدم** على I)	$\frac{1}{v}$	uv	ku	$u + v$	**الدّالة**
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\frac{-v'}{v}$	$u'v + v'u$	ku'	$u' + v'$	**المشتقة**

نتائج:

- الدّوال **كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$.
- الدّوال **الناطقة قابلة للاشتقاق** على **كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها**.

ج. الاشتقاقية والاستمرارية:

إذا كانت f **قابلة للاشتقاق** على مجال I، فإنّــها **مستمرة** على هذا المجال **وعكس هذه الخاصية ليس صحيح**.

إشتقاق دَالة مركبة:

أ. مشتقة الدّالة $v \circ u$: $\boxed{(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]}$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدّالة $x \mapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0)$

$f(x) = u(ax+b)$	$f'(x) = au'(ax+b)$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

مشتقة الدّالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$)

$f(x) = [u(x)]^n$	$f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$

مشتقة الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{[u(x)]^n}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)

$f(x) = \dfrac{1}{[u(x)]^n}$	$f'(x) = \dfrac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$

9 الإستمرارية:

f دّالة **معرّفة** على مجال I من $\mathbb{R}$، إذا كانت f **مستمرة على I** فإنّ **تفسيرها البياني (أو الهندسي)** هو: أنّه **يُمكن رسم منحناها البياني على I دون رفع القلم (اليد).**

نتائــــــج:

- الدّوال المرجعية **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- الدّوال كثيرات الحدود؛ "cos" و"sin" هي دّوال **مستمرة على** $\mathbb{R}$.
- الدّوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دّوال **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء وتركيب دّوال **مستمرة هي دّوال مستمرة**.

مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)	التفسير البياني (أو الهندسي) "لمبرهنة القيم المتوسطة"
▪ **الحالة العامة** $(k \in \mathbb{R})$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = k}$ **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
▪ **الحالة الخاصة** $(k = 0)$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، أي: $f(a) \times f(b) < 0$ فـإنّ: المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
وحدانية الحل	
▪ **الحالة العامة** $(k \in \mathbb{R})$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا وحيدا α** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = k}$ **في نقطة واحدة فاصلتها α** في المجال $[a;b]$.

▪ **الحالة الخاصة** $(k=0)$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، أي: $f(a)\times f(b)<0$ فـإنّ: المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **في نقطة واحدة فاصلتها** α في المجال $[a;b]$.

طُرق اثبات "وُجود" حلول معادلة في مجال $[a;b]$ **باستعمال "مبرهنة القيم المتوسطة"**

الحالة العامة $(k\in\mathbb{R})$	الحالة الخاصة $(k=0)$
1/نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=k$ **(إن لم تُعطى لنا)** **2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$. **3/نتحقّق** من أنّ k **محصور** بين $f(a)$ وَ $f(b)$، **وذلك بعد** حسابهما.	**1/**نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=0$ **(إن لم تُعطى لنا)** **2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$. **3/نتحقّق** من أنّ $\boxed{f(a)\times f(b)<0}$، **وذلك بعد** حسابهما.

ملاحظة: تقبل المبرهنات السابقة عدة **تمديدات** في حالة الدّالة f **مستمرة** ورتيبة **تماماً** على مجال **مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود** أو **غير محدود**. (في حالة المجال مفتوح نستعمل النهايات)

10 المناقشة البيانية:

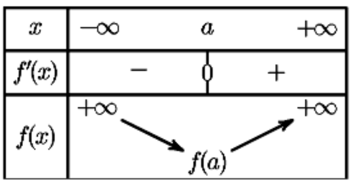
المعادلة من الشكل $f(x)=m$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة أفقية** مُوازية لمحور الفواصل.

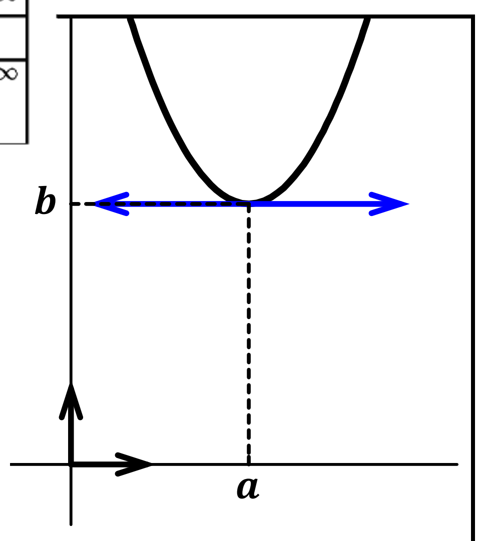
المعادلة من الشكل $f(x)=ax+\boxed{m}$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة مائلة** مُوازية للمستقيم ذو المعادلة $y=ax+\boxed{b}$.

المعادلة من الشكل $f(x)=mx+b$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة دورانية** حول النقطة $A(0;b)$.

المعادلة من الشكل $f(x)=f(m)$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة أفقية** مُوازية لمحور الفواصل.

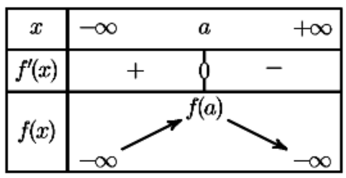
11 إضافات:

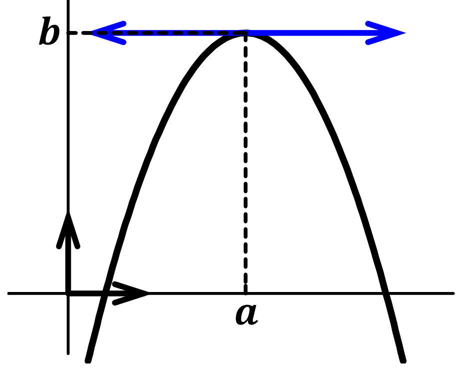




(الشكل 01)

$$\begin{cases} f(a)=b \\ f'(a)=0 \end{cases}$$





(الشكل 02)

12 الكلفة:

- دّالة **الكلفة الهامشية** C_m **حيث،** $\boxed{C_m(x) = f(x)}$، **نعوض** x **بـ** q حيث **كمية الإنتاج.**
- دّالة **الكلفة الإجمالية** C_T **حيث،** $\boxed{C'_T(x) = C_m(x)}$، **أي:** دّالة **الكلفة الإجمالية** C_T **هي** دّالة **أصلية** لـدّالة **الكلفة الهامشية** C_m.
- دّالة **الكلفة المتوسطة** C_M.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

التمارين// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

التمرين 01: (08 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لتكن f دّالة عددية قابلة للإشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها. لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

تُكتب عبارة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ حيث a، b، c أعداد حقيقية.

1) احسب $f'(x)$.

2) اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f:

أ-عيّن الأعداد الحقيقية a، b، c.

ب-عيّن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانياً.

جـ-قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة f معللا إجابتك.

3) نأخذ فيما يلي: $c = \frac{1}{4}$؛ $b = 1$؛ $a = 1$ وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

أ) بيّن أنّه عندما يؤول x إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ فإنّ المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته: $y = x + 1$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

جـ) اثبت أن النقطة $\omega(1; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C).

د) عيّن نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

4) λ عدد حقيقي، عيّن بيانياً، حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$.

التمرين 02: (05 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

الدّالة كثير الحدود P معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + \frac{1}{2}$.

1. شكّل جدول تغيرات الدّالة P على $\mathbb{R}$.

2. بيّن أنّ المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$.

3. استنتج إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$.

4. الدّالة العددية G معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $G(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x$.

عيّن اتجاه تغيّر الدالة G على $\mathbb{R}$ (لا يُطلب حساب $G(\alpha)$).

التمرين 03: (03 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

f دّالة معرّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$، (C_f) تمثيلها البياني وجدول تغيراتها مُعطى كما يلي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f(x)	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

أجب بـــ: **خطأ** أو **صحيح** على كل سؤال مما يلي مع **تبرير الإجابة.**

1.المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب للمنحنى (C_f).

2.المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.

3.مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>0$ هي $S=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

4.في المجال $]-\infty;-1[$ يكون: "$f(-2)>f(x)$ عندما يكون $x<-2$".

5.النقطة $A(-3;1)$ تنتمي إلى المنحنى (C_f).

6.الدّالة f زوجية.

التمرين 04: (09 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

يُرمز (C_f) إلى المنحنى المُمثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

$I.1$) عيّن الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

2)احسب نهايات الدّالّة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

3)بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مُوازيا لمحور التراتيب يُطلب تعيين معادلة له.

4)بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

5)ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

$II.1$) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإنّ: $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ وَ (f' هي الدّالة المشتقة للدّالة f)

2)عيّن اتجاه تغيّر الدّالة f على مجالي مجموعة تعريفها وشكّل جدول تغيّراتها.

3)اكتب معادلة للمماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$III.1$) بيّن أنّ النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

2)ارسم كلا من: (Δ)، (D) و (C_f).

3)عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلاّن مختلفان.

4)احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e^2-1$.

التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$

وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإنّ: $f(x)=x-5+\frac{a}{x^2}$، حيث a عدد حقيقي يُطلب تعيينه.

2) أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3) أ-بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإنّ: $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$، استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f.

ب-شكّل جدول تغيرات الدّالة f.

4) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل، يُطلب تعيين معادلتيهما.

5) أوجد معادلة لـ(Δ) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

6) أرسم (Δ) و المنحنى (C_f).

7) أ-عيّن الدّالة الأصلية F للدّالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تُحقق: $F(2)=-10$.

ب-أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=1$ وَ $x=2$.

التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$

(C) المنحنى البياني الممثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الوحدة $1\ cm$ على محور الفواصل و $4\ cm$ على محور التراتيب.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}$.

2) احسب نهاية الدّالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$، واستنتج أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له.

3) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$.

4) احسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدّالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

5) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(-x)=2-f(x)$. واستنتج أنّ (C) يقبل مركز تناظر يُطلب تعيينه.

6) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C).

7) أ. احسب التكامل: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$.

ب. احسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

التمرين 07: (05 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

f هي الدّالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+100+\frac{57600}{x+1}$.

1) أحسب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$.

2) أ-بيّن أنّه من أجل كل من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$.

ب-استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ-جِد الدالة الأصلية H للدّالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x = 0$.

3)تُنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و200 آلة على الأكثر.

تُنَمْذَجُ الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال $[5; 200]$ بالدالة f أي أنّ: من أجل كل x من المجال $[5; 200]$، $C_m(x) = f(x)$.

أ-ما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن؟

ب-نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج x آلة. ونُذكّر أنّ $C'(x) = C_m(x)$.

جِد الكلفة الإجمالية $C(x)$، علما أنّ الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000DA، ثم استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.

التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) 2) **متتاليات عددية.**

3)منحنى الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x) = (x^2 - 1)^3$، يقبل مماساً في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ معادلته:

أ) $y = \sqrt{2}x + 1$، ب) $y = 6\sqrt{2}x - 11$، جـ) $y = 6\sqrt{2}x + 1$.

4) 5) 6) **إحتمالات.**

التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I)نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - x^2 - 1$.

1)احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3)بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}46 < \alpha < 1{,}48$.

4)استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II)مؤسسة صناعية تنتج يوميا كميّة q (مُقدرة بالطّن) من منتوج بكلفة متوسطة C_M (مُقدرة بملايين الدّنانير) معرّفة على $[0; 10]$ بـ : $C_M(q) = \frac{1}{2}q^2 - q + 1 - \frac{1}{2}\ln(q^2 + 1)$.

1)بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي q من $[0; 10]$، $C'_M(q) = \frac{g(q)}{q^2+1}$.

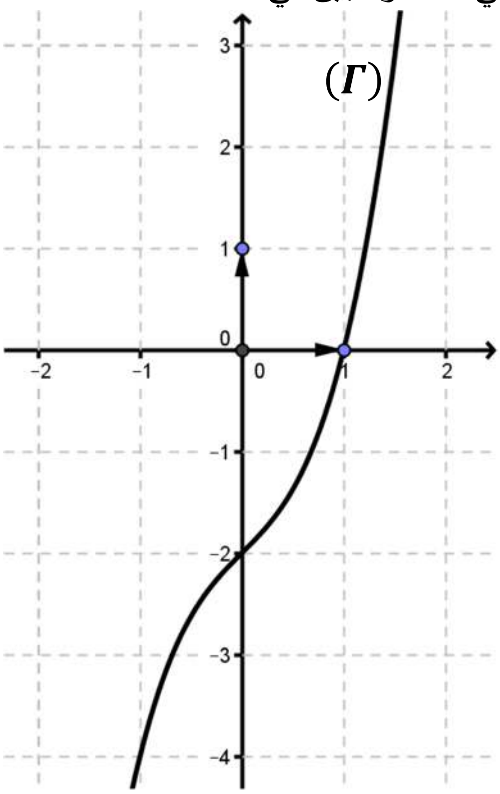
2)عيّن اتجاه تغيّر الكلفة المتوسطة C_M ثمّ شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ $\alpha \simeq 1{,}47$)

3)عيّن الكميّة التي تُنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة ثمّ حدّد هذه الكلفة المتوسطة.

4)ما هي الكلفة الإجمالية C لإنتاج 2 طن يوميا؟

التمرين 10: (07 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

g (I الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 + x - 2$ و (Γ) تمثيلها البياني كما هو مُبيّن في الشكل.



بقراءة بيانية عيّن $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

f (II الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ: $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

-استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,4; -1,3[$.

5) ارسم (Δ) ثمّ المنحنى (C_f).

6) أحسب A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$، $x = 1$ وَ $x = 3$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

حل التمرين 01: (08 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

تذكير: $\boxed{\left(\frac{c}{u}\right)' = \frac{-cu'}{u^2}}$ أو $\boxed{\left(\frac{c}{u}\right)' = \frac{0\times u - u'\times c}{u^2} = \frac{-cu'}{u^2}}$، حيث c عدد حقيقي.

لدينا: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.

1) حساب $f'(x)$:

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1[$ وَ $]1; +\infty[$، ولدينا: $\boxed{f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2}}$.

2) بالاعتماد على جدول تغيرات الدالة f :

أ-تعيين الأعداد الحقيقية a، b، c:

لدينا: $\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a - \frac{c}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = 0 \\ a - \frac{c}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2} = 0 \\ \frac{1}{2}a + b + \frac{c}{\frac{1}{2}-1} = 1 \\ \frac{3}{2}a + b + \frac{c}{\frac{3}{2}-1} = 3 \end{cases}$ وعليه: $\begin{cases} a - 4c = 0 & \dots (1) \\ \frac{1}{2}a + b - 2c = 1 & \dots (2) \\ \frac{3}{2}a + b + 2c = 3 & \dots (3) \end{cases}$،

من (1) نجد $a = 4c$ وبالتعويض في (2) يكون $2c + b - 2c = 1$ أي: $\boxed{b = 1}$،

وبالتعويض في (3) نجد $6c + 1 + 2c = 3$ أي: $\boxed{c = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}}$، وبالتالي: $\boxed{a = 4c = 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1}$.

إذن $\boxed{f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}}$ وَ $\boxed{f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}}$.

ب-تعيين $\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x)$ وَ $\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x)$: $\boxed{\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = -\infty}$ وَ $\boxed{\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = +\infty}$.

تفسير النتيجة بيانياً:

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = 1}$ **(المُوازي لمحور التراتيب)** مُقارب للمنحنى المُمثل للدّالة f.

جـ-المقارنة بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدّالة f مع التعليل:

لدينا: $f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right)$ لأنّ: $\frac{3}{2} < \frac{1}{2}$ و f **متناقصة تماما** على المجال $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$.

3) $c = \frac{1}{4}$؛ $b = 1$؛ $a = 1$ **لدينا:** $f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$ وَ $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}$،

(C) المنحنى البياني المُمثل لتغيرات الدّالة f في **معلم متعامد ومتجانس**.

أ) تبيان أنّه عندما يؤول x إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ فإنّ المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته، $: y = x + 1$

ط01: لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right] = 0$

وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right] = 0$

إذن: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ **مقارب مائل** لـ(C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ط02: بمأنّ: $\begin{cases} f(x) = x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{4}}{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}}{x-1} = 0 \end{cases}$، فإنّ: المستقيم $(\Delta): y = x + 1$ **مُقارب مائل** لـ(C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$ ومنه: إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$ من إشارة المقام $(x-1)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-		+
$f(x)-y$	-		+
الوضعية	(C) يقع تحت (Δ)		(C) يقع فوق (Δ)

جـ) اثبات أن النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C):

نُثبت أنّ $f(2(1)-x)+f(x) = 2(2)$ أي: $\boxed{f(2-x)+f(x) = 4}$

لدينا: $f(x) = x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}$

ومنه: $f(2-x) = (2-x)+1+\frac{\frac{1}{4}}{(2-x)-1} = -x+3+\frac{\frac{1}{4}}{-x+1} = -x+3-\frac{\frac{1}{4}}{x-1}$

وعليه: $f(2-x)-f(x) = \left[-x+3-\frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right]-\left[x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right] = 4$

إذن: $\omega(1;2)$ مركز تناظر لــ(C).

د) تعيين نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة: $f(x) = 0$)

لدينا: $f(x) = x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1} = x+1+\frac{1}{4(x-1)} = \frac{(x+1)[4(x-1)]+1}{4(x-1)} = \frac{4x^2-3}{4(x-1)}$

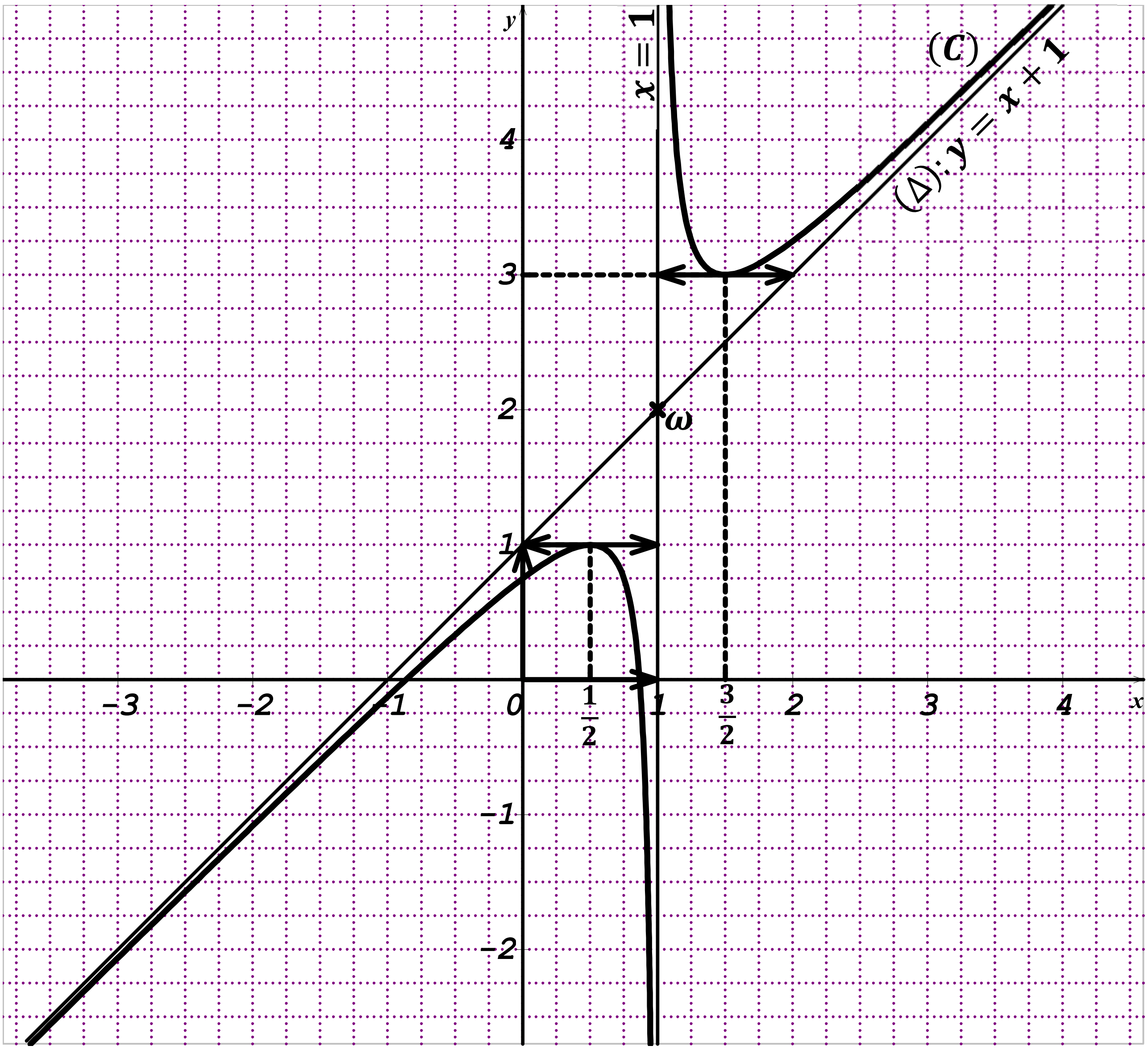
$f(x) = 0$ معناه: $\frac{4x^2-3}{4(x-1)} = 0$

ومنه: $4x^2-3 = 0$ و $4(x-1) \neq 0$

أي: $x^2 = \frac{3}{4}$ و $x \neq 1$

وعليه: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ و $x \neq 1$؛ إذن: $\boxed{(C)\cap(xx') = \left\{A\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};0\right);B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)\right\}}$.

4) λ عدد حقيقي، تعيين بيانياً، حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$: الرسم:



من البيان نجد:

إذا كـــــــان	فإنّ المعـــــــادلة $f(x) = \|\lambda\|$
$\lambda \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$	لها حلان
$\lambda = -3$ أو $\lambda = 3$	لها حل مضاعف
$\lambda \in]-3; -1[\cup]1; 3[$	ليس لها حلول
$\lambda = -1$ أو $\lambda = 1$	لها حل مضاعف
$\lambda \in]-1; 1[$	لها حلان

المناقشة أفقية
$f(x) =$ عدد حقيقي

إضافات: توضيح فقط

حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$ **بيانيا** هي **فواصل** نقط **تقاطع** المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = |\lambda|$.

(المستقيم ذو المعادلة $y = |\lambda|$ **ينطبق على حامل محور الفواصل أو يقع فوقه** و**يُوازيه** لأنّ $|\lambda| \geq 0$)

الحالة الأولى: $|\lambda| > 3$ (التقاطع نقطتين)، $\lambda > 3$ أو $\lambda < -3$ أي: $\boxed{\lambda \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[}$.

الحالة الثانية: $|\lambda| = 3$ (التقاطع نقطة)، $\boxed{\lambda = 3}$ أو $\boxed{\lambda = -3}$.

الحالة الثالثة: $1 < |\lambda| < 3$ (لا يوجد تقاطع)، $1 < \lambda < 3$ **أو** $-3 < \lambda < -1$ أي: $\boxed{\lambda \in]-3; -1[\cup]1; 3[}$

الحالة الرابعة: $|\lambda| = 1$ (التقاطع نقطة)، $\boxed{\lambda = 1}$ أو $\boxed{\lambda = -1}$.

الحالة الخامسة: $0 \leq |\lambda| < 1$ (التقاطع نقطتين)، $-1 < \lambda < 1$ أي: $\boxed{\lambda \in]-1; 1[}$.

حل التمرين 02: (05 نقاط بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: P دّالة كثير حدود معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + \frac{1}{2}$.

1.تشكّيل جدول تغيّرات الدّالّة P على $\mathbb{R}$:

أ) النهايات: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty}$ ؛ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty}$.

ب) المشتقة (حساب $P'(x)$): P دّالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا $\boxed{P'(x) = 3x^2 - 8x + 4}$.

ج) إشارة المشتقة ($P'(x)$):

نضع: $P'(x) = 0$ نجد: $3x^2 - 8x + 4 = 0$، مميزها: $\Delta = (-8)^2 - 4(3)(4) = 64 - 48 = 16 > 0$

لها حلين متمايزين هما: $\boxed{x_1 = \frac{8-4}{6} = \frac{2}{3}}$ و $\boxed{x_2 = \frac{8+4}{6} = 2}$.

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	α	0	$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$P'(x)$		+			0	-	0	+	
$P(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{91}{54}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

2.تبيان أنّ المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$:

الدّالة P **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$

(لأنّها من جدول التغيرات متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]$)

ولدينا: $\begin{cases} P\left(-\frac{1}{2}\right) = -2,62 \\ P(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ أي: $P\left(-\frac{1}{2}\right) \times P(0) < 0$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

3.استنتاج إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$: من جدول التغيرات نجد:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		-	0	+	

4.لدينا: G دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $G(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x$.

تعيين اتجاه تغيّر الدالّة G على $\mathbb{R}$:

ب) المشتقة (حساب $G'(x)$):

G دّالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $\boxed{G'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + \frac{1}{2} = P(x)}$.

لـ $G'(x)$ و $P(x)$ **نفس** الإشارة

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$G'(x)$		-	0	+	

إذن: الدّالة G **متناقصة تماما** على المجال $]-\infty;\alpha]$ **ومتزايدة تماما** على المجال $[\alpha;+\infty[$.

حل التمرين 03: (03 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الإجابة بــ: **خطأ** أو **صحيح** مع **تبرير الإجابة**:

1.المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=2}$ مقارب للمنحنى (C_f)، ______ **(صحيح)**

لأنّ: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=2}$ وَ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=2}$.

2.المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا، ______ **(خطأ)**

لأنّ: (C_f) **لا يقطع حامل محور الفواصل**

(**توضيح** (C_f) يقع فوق المقارب الأفقي الذي معادلته $\boxed{y=2}$ أي $f(x)>2$).

3.مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>0$ هي $S=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[=D_f$، ______ **(صحيح)**

لأنّ: من أجل كل x من D_f، فإنّ $f(x)>2$.

4.في المجال $]-\infty;-1[$ يكون: "$f(-2)>f(x)$ عندما يكون $x<-2$"، ______ **(صحيح)**

لأنّ: بمأنّ f **متزايدة تماما** على المجال $]-\infty;-1[$، فإنّه "لما $x<-2$ يكون $f(x)<f(-2)$".

5.النقطة $A(-3;\boxed{1})$ تنتمي إلى المنحنى (C_f)، ______ **(خطأ)**

لأنّ: من أجل كل x من D_f، فإنّ $f(x)>2$.

6.الدّالة f زوجية، ______ **(خطأ)**

لأنّ: D_f غير متناظرة بالنسبة إلى الصفر ($1\in D_f$ و $-1\notin D_f$).

حل التمرين 04: (09 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ، وَ $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

(C_f) المنحنى المُمثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I.1) تعيين الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث يكون، $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$:

- **ط01:** لدينا: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)}{x+1}+\frac{c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$

ولدينا من جهة أخرى: $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=0\\b+c=3\end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=4\end{cases}$ إذن: $\boxed{f(x)=x-1+\frac{4}{x+1}}$.

- **ط02:** $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}=\frac{x^2-1+4}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{4}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\frac{4}{x+1}=x-1+\frac{4}{x+1}$.

2) حساب نهايات الدّالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

ولدينا: $\begin{cases}\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=-\infty\\ \lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=+\infty\end{cases}$ ، لأنّ: $\begin{cases}\lim_{x\to-1}(x^2+3)=4\\ \lim_{\substack{x\to-1\\<}}(x+1)=0^-\\ \lim_{\substack{x\to-1\\>}}(x+1)=0^+\end{cases}$.

3)تبيان أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مُوازيا لمحور التراتيب يُطلب تعيين معادلة له:

بما أنّ: $\boxed{\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty}$ وَ $\boxed{\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty}$

فـإنّ: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = -1}$ (المُوازي لمحور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f).

4)تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to -\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{x+1} - (x - 1)\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{4}{x+1}\right] = 0$

وَ $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{4}{x+1}\right] = 0$

إذن: المستقيم $\boxed{(\Delta): y = x - 1}$ مستقيم مقارب **مائل** للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

5)دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = \frac{4}{x+1}$ ومنه إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة المقام $(x + 1)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$	-	‖	+
$f(x) - y$	-	‖	+
الوضع النسبي	(C_f) يقع **تحت** (Δ)	‖	(C_f) يقع **فوق** (Δ)

II.1) تبيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ فإنّ، $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$:

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; -1[$ وَ $]-1; +\infty[$، ولدينا: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

ومنه: $f'(x) = 1 - \frac{4(1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-2^2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1-2)(x+1+2)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

2)تعيين اتجاه تغيّر الدّالة f على مجالى مجموعة تعريفها وتشكّيل جدول تغيّراتها:

لدينا: $\boxed{f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}}$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط ($(x - 1)(x + 3)$)

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x - 1$		-		-	‖	-	0	+	
$x + 3$		-	0	+	‖	+		+	
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	

إذن: f **متناقصة تماماً** على كل من المجالين $[-3; -1[$ و $]-1; 1]$

وَ**متزايدة تماماً** على كل من المجالين $]-\infty; -3]$ و $[1; +\infty[$؛ **ويكون جدول تغيراتها كالتالي:**

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

حيث: $f(1) = 2$ وَ $f(-3) = -6$.

3)كتابة معادلة للمماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

معادلة المماس (D) من الشكل: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(0) = \frac{((0)-1)((0)+3)}{((0)+1)^2} = -3 \\ f(0) = \frac{(0)^2+3}{(0)+1} = 3 \end{cases}$، إذن: $\boxed{(D): y = -3x + 3}$.

III.1) تبيان أنّ النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f):

نُبين أنّ $f(2(-1)-x) + f(x) = 2(-2)$ أي: نُبين أنّ $\boxed{f(-2-x) + f(x) = -4}$

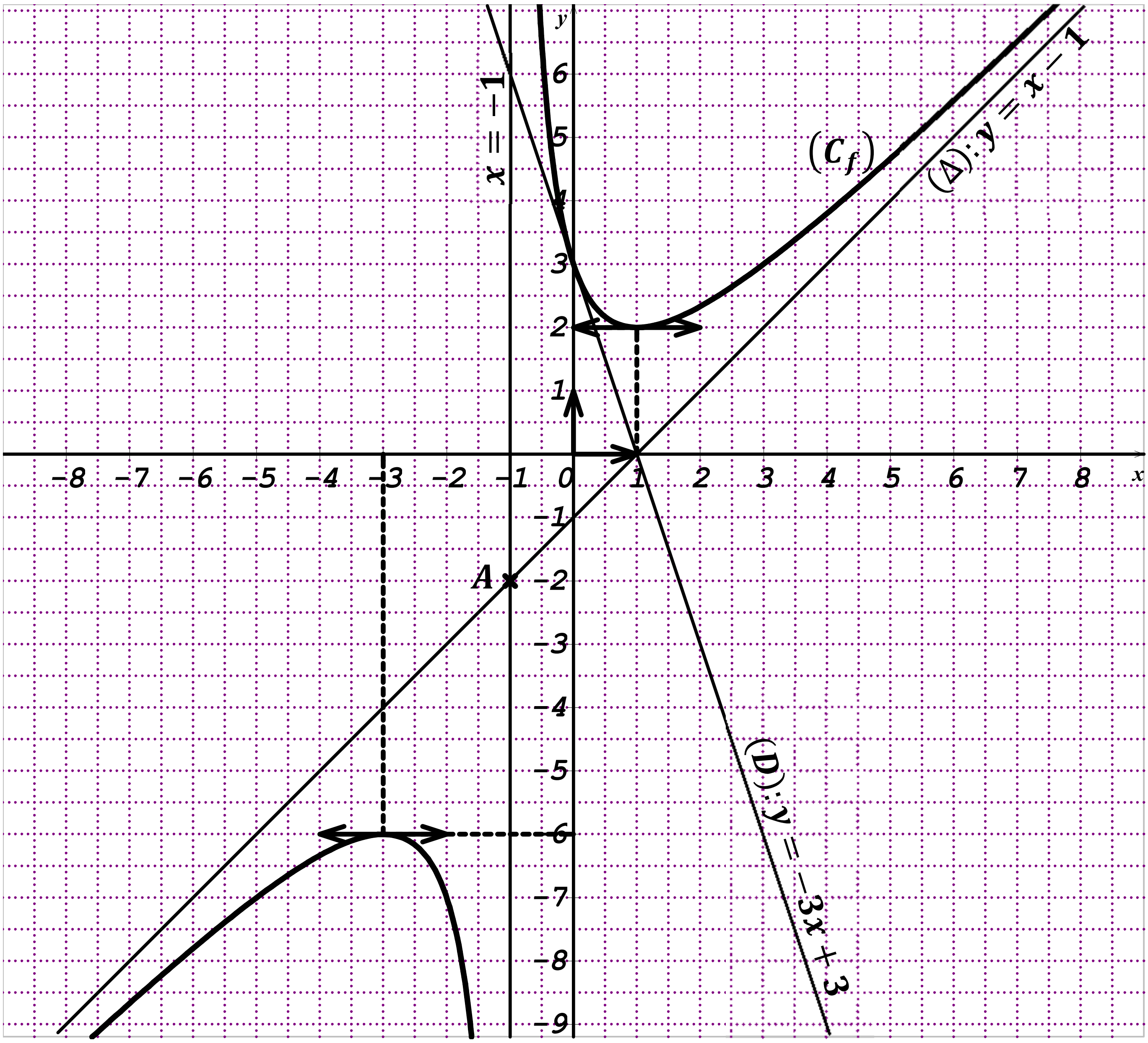
لدينا: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

ومنه: $f(-2-x) = (-2-x) - 1 + \frac{4}{(-2-x)+1} = -x - 3 + \frac{4}{-x-1} = -x - 3 - \frac{4}{x+1}$

وعليه: $f(-2-x) + f(x) = -x - 3 - \frac{4}{x+1} + x - 1 + \frac{4}{x+1} = -4$

إذن: النقطة $A(-1;-2)$ هي **مركز تناظر** للمنحنى (C_f).

2) **رسم كلا من (Δ)، (D) و (C_f):**



3) **تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلاّن مختلفان:**

يكون للمعادلة $f(x) = m$ **حلاّن مختلفان** إذا كـــــان: $\boxed{m \in]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[}$.

توضيح فقط: (المناقشة عبارة عن مناقشة أفقية)

حلول المعادلة $f(x)=m$ بيانياً هي **فواصل نقط تقاطع** (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=m}$.
(استعمل مسطرة وقم بتحريكها من الأسفل إلى الأعلى بالتوازي مع محور الفواصل عدد التقاطعات مع المنحنى هو عدد الحلول ولا تنسى في نفس الوقت قراءة m على محور التراتيب)

4)حساب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e^2-1$:

بمأنّ (C_f) يقع **فوق** (Δ) على المجال $[1;e^2-1]$

فإنّ: $S=\int_1^{e^2-1}[f(x)-y]\,dx=\int_1^{e^2-1}\left(\frac{4}{x+1}\right)dx=[4\ln|x+1|]_1^{e^2-1}=[4\ln(x+1)]_1^{e^2-1}$

ومنه: $S=4[\ln((e^2-1)+1)-\ln((1)+1)]=4[\ln(e^2)-\ln(2)]=4[2-\ln(2)]$

إذن: $\boxed{S=(8-4\ln(2))u.a}$.

حل التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ و $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)تبيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإنّ، $f(x)=x-5+\frac{a}{x^2}$:

- **ط01:** لدينا: $\frac{x^3-5x^2+a}{x^2}=\frac{(x-5)x^2+a}{x^2}=f(x)=x-5+\frac{a}{x^2}$،

ولدينا من جهة أخرى: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$ بالمطابقة نجد: $\boxed{a=4}$ إذن: $\boxed{f(x)=x-5+\frac{4}{x^2}}$.

- **ط02:** $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}=\frac{x^2(x-5)}{x^2}+\frac{4}{x^2}=x-5+\frac{4}{x^2}$.

2)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0}f(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

وبمأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}(x^3-5x^2+4)=4\\ \lim\limits_{x\to0}x^2=0^+\end{cases}$، فإنّ: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$.

3)أ-تبيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإنّ، $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$:

- **ط01:** باستعمال العبارة: $f(x)=x-5+\frac{4}{x^2}$

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=1-\frac{4(2x)}{(x^2)^2}=1-\frac{8x}{x^4}=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$$

ولدينا من جهة أخرى: $\frac{x^3-8}{x^3}=\frac{x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8}{x^3}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$

إذن: $\boxed{f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}}$.

- **ط02:** باستعمال العبارة: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-10x)\times x^2-(2x)(x^3-5x^2+4)}{[x^2]^2}=\frac{3x^4-10x^3-2x^4+10x^3-8x}{x^4}=\frac{x^4-8x}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}$$

ولدينا من جهة أخرى: $\frac{x^3-8}{x^3}=\frac{x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8}{x^3}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$

إذن: $\boxed{f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}}$.

استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f :

إشارة $f'(x)$: يُمكن كتابتها على الشكل $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}=\frac{x-2}{x}\times\frac{x^2+2x+4}{x^2}$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x، $x^2+2x+4>0$ (لأنّ مميزه **سالب تماما** $\Delta=-12<0$)

إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $\frac{x-2}{x}$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$x-2$	-	||	-	0	+
x	-	||	+		+
$f'(x)$	+	||	-	0	+

إذن: f **متزايدة تماماً** على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]2;+\infty[$، وَ**متناقصة تماماً** على المجال $]0;2]$.

ب-تشكيل جدول تغيرات الدّالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	||	$+\infty$ ↘	-2	↗	$+\infty$

حيث: $f(2)=-2$.

4)اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل، يُطلب تعيين معادلتيهما:

لدينا: $\boxed{\lim_{x\to0}f(x)=+\infty}$؛ إذن: **محور التراتيب** مقارب لــ(C_f).

ولدينا: $\begin{cases}f(x)=x-5+\frac{4}{x^2}\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0\end{cases}$؛ إذن: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=x-5}$ مقارب مائل لــ(C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

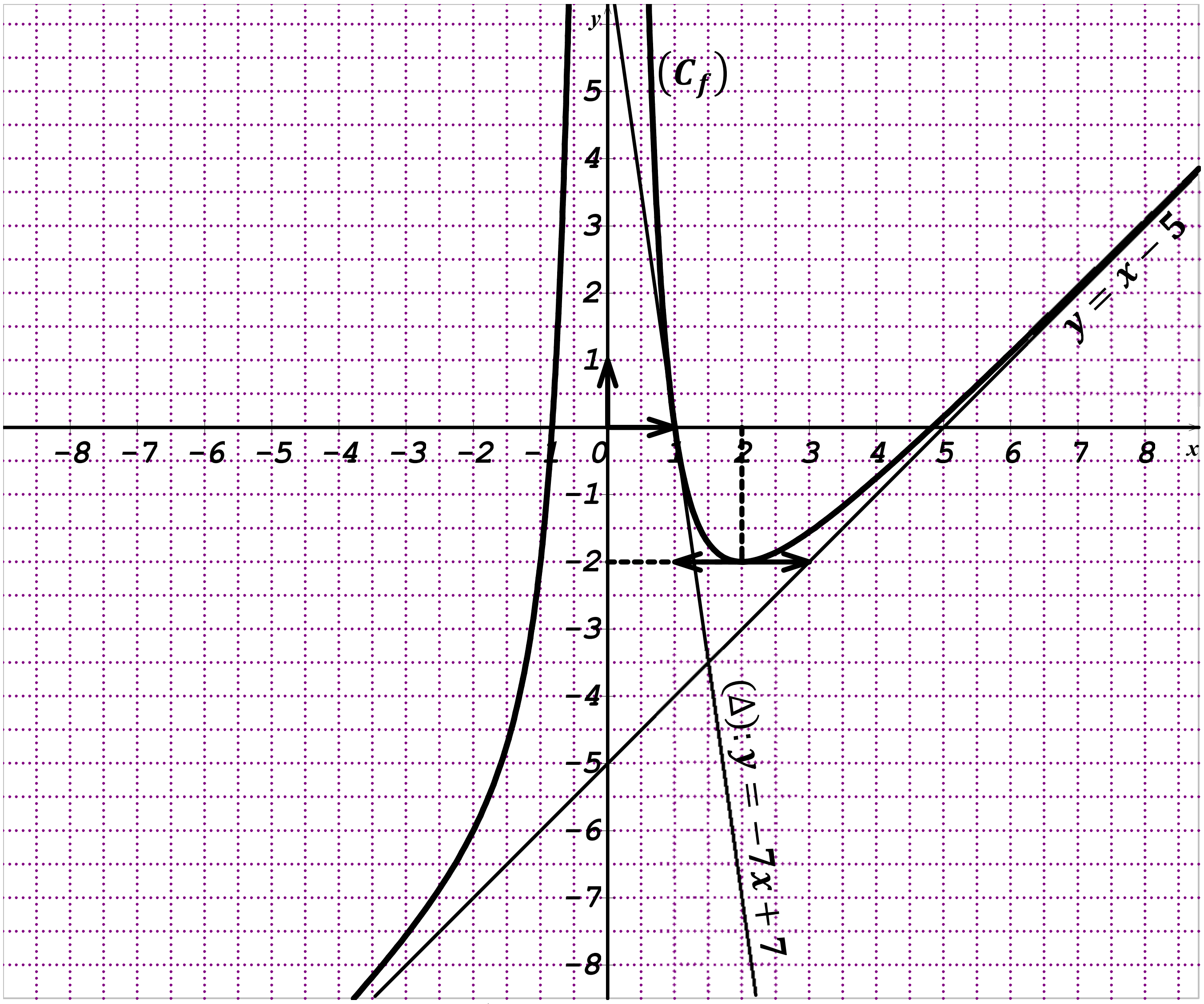
5)إيجاد معادلة لــ(Δ) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1:

معادلة (Δ) من الشكل: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

ولدينا: $\begin{cases}f'(1)=\frac{(1)^3-8}{(1)^3}=\frac{1-8}{1}=-7\\ f(x)=(1)-5+\frac{4}{(1)^2}=-4+4=0\end{cases}$ بالتعويض نجد: $y=-7(x-1)+0$

إذن: $\boxed{(\Delta):y=-7x+7}$.

6)رسم (Δ) والمنحنى (C_f):



7)أ-تعيين الدّالة الأصلية F للدّالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تُحقق، $F(2) = -10$:

- لدينا: $f(x) = x - 5 + \frac{4}{x^2} = x - 5 + 4 \times \frac{1}{x^2}$، ومنه: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{4}{x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$
- ولدينا: $F(2) = -10$ معناه: $\frac{1}{2}(2)^2 - 5(2) - \frac{4}{(2)} + c = -10$

أي: $2 - 10 - 2 + c = -10$

وبالتالي: $c = 0$ إذن: $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{4}{x}}$.

ب-حساب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$:

بمأنّ (C_f) يقع **تحت** محور الفواصل على المجال $[1; 2]$، فــإنّ:

$$S = \int_1^2 -f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx = [F(x)]_2^1 = F(1) - F(2) = -\frac{17}{2} - (-10) = -\frac{17}{2} + 10$$

إذن: $\boxed{S = \frac{3}{2}u.a}$.

حل التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$ و $D_f =]-\infty; +\infty[$.

(C) المنحنى البياني الممثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الوحدة $1\,cm$ على محور الفواصل و$4\,cm$ على محور التراتيب.

1)تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}$:

لدينا: $1-\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x}{x^2+1}=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=f(x)$، إذن: $\boxed{f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}}$.

2)حساب نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$، واستنتاج أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=$، نستنتج أنّ

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=1}$ **(المُوازي لمحور الفواصل)** مقارب لـ(C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

3)دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$: (ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$)

لدينا: $f(x)-y=1-\frac{x}{x^2+1}-1=\frac{-x}{x^2+1}$

إذن: إشارة الفرق $f(x)-y$ من إشارة البسط $(-x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		-	0	+	
$f(x)-1$		+	0	-	
الوضع النسبي	(C) يقع فوق (Δ)		(C) يقطع (Δ)		(C) يقع تحت (Δ)

4)حساب $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدّالة f ثم تشكّيل جدول تغيراتها:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+1)-(2x)(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-x^2-1-2x^3+2x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط (x^2-1)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ وَ$[1;+\infty[$، وَ**متناقصة تماما** على المجال $[-1;1]$؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

5)تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(-x)=2-f(x)$:

لدينا: $f(-x)=1-\frac{(-x)}{(-x)^2+1}=1+\frac{x}{x^2+1}=2-1+\frac{x}{x^2+1}=2-\left(1-\frac{x}{x^2+1}\right)=2-f(x)$

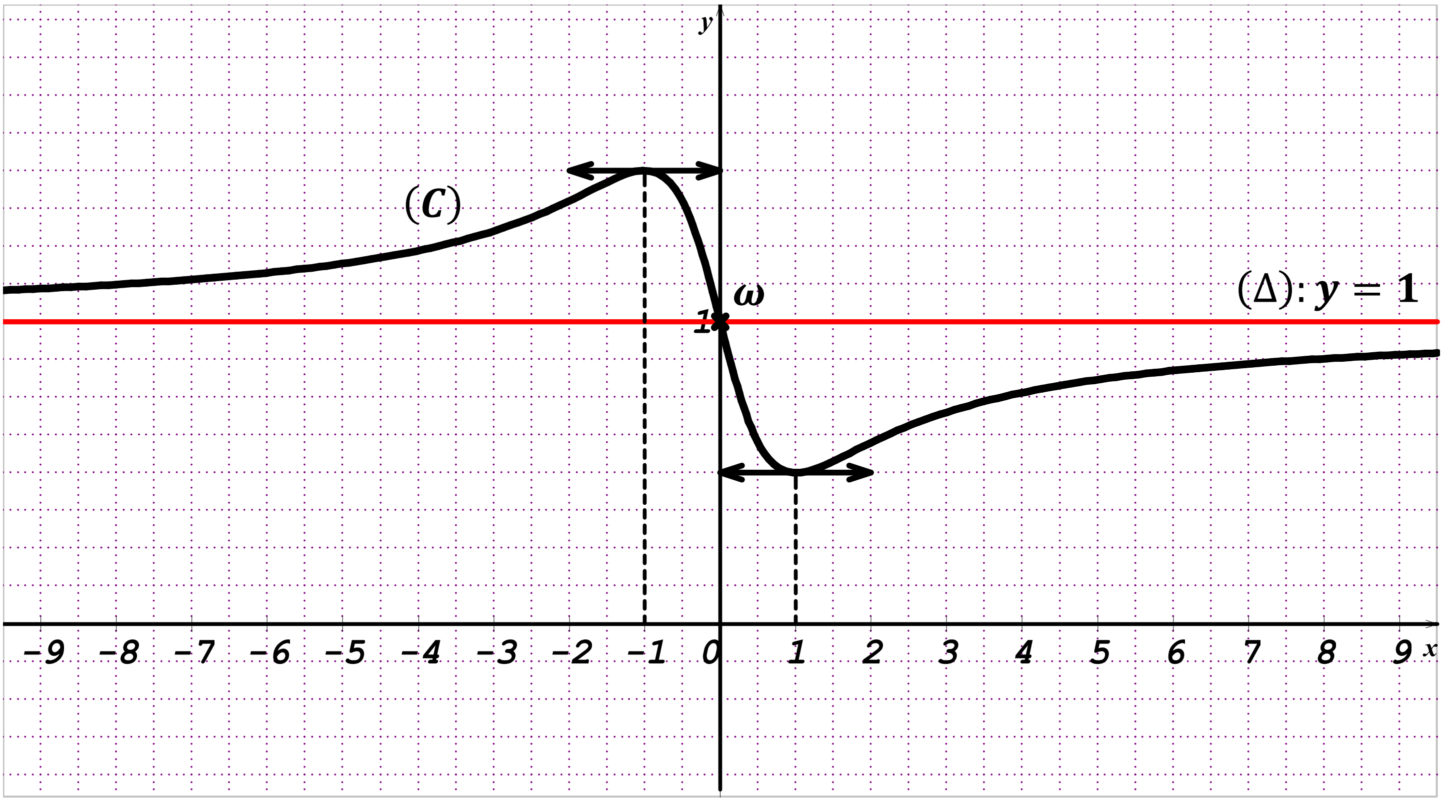
إذن: $\boxed{f(-x)=2-f(x)}$.

استنتاج أنّ (C) يقبل مركز تناظر يُطلب تعيينه:

لدينا: $f(-x)=2-f(x)$ يعني: $f(-x)+f(x)=2$، من الشكل: $f(2(0)-x)+f(x)=2(1)$؛

إذن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر لـ(C).

6)رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C):



7)أ. حساب التكامل، $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$:

لدينا: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}[ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{ln2}{2}$

ب. حساب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$:

لدينا: $A = 4cm^2 \times \int_0^1 f(x)dx = 4cm^2 \times \int_0^1 \left(1-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

ومنه: $A = 4cm^2 \times \left(\int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx\right) = 4cm^2 \times \left([x]_0^1 - \frac{\ln 2}{2}\right)$

وعليه: $A = 4cm^2 \times \left(1-\frac{\ln 2}{2}\right) = (4-2\ln 2)cm^2$.

حل التمرين 07: (05 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$ وَ $D_f =]-1;+\infty[$.

1)حساب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$:

لدينا: $\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} \left(\frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}\right) = +\infty$ لأنّ $\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} (x+1) = 0^+$.

وَ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$ لأنّ $\lim_{x\to +\infty} \frac{57600}{x+1} = 0$.

2)أ-تبيان أنّه من أجل كل من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$:

f قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = x^2 - \frac{57600}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 - 57600}{(x+1)^2} = \frac{(x(x+1))^2 - 57600}{(x+1)^2} = \frac{(x^2+x)^2 - (240)^2}{(x+1)^2}$$

وبالتالي: $\boxed{f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}}$.

ب-استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

لدينا: $x^2+x+240>0$ (لأنّ مميزه **سالب تماما** $\Delta=(1)^2-4(1)(240)=-959<0$)

وبالتالي: إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2+x-240)$

نضع: $x^2+x-240=0 \quad (*)$

نحل المعادلة $(*)$**: نحسب المميز** Δ: $\Delta=(1)^2-4(1)(-240)=1+960=961>\mathbf{0}$

ومنه: $x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{961}}{2(1)}=\frac{-1+31}{2}=\frac{30}{2}=15\in]-1;+\infty[$

و $x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{961}}{2(1)}=\frac{-1-31}{2}=\frac{-32}{2}=-16\notin]-1;+\infty[$

x	-1		15		$+\infty$
$x^2+x-240$	‖	-	0	+	
$f'(x)$	‖	-	0	+	

إذن: f **متناقصة تماما** على المجال $]-1;15]$، و**متزايدة تماما** على المجال $[15;+\infty[$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	-1		15		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	**4825**	↗	$+\infty$

جـ-إيجاد الدالة الأصلية H للدّالة $h: x\mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x=0$:

مجموعة الدّوال الأصلية للدّالة h على المجال $]-1;+\infty[$ هي الدّوال: $H(x)=\ln(x+1)+c$، حيث c ثابت حقيقي، ونعلم أنّ $H(0)=0$ ومنه: $c=0$ إذن: $\boxed{H(x)=\ln(x+1)}$.

3) تُنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و200 آلة على الأكثر.

تُنَمْذَجُ الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال $[5;200]$ بالدّالة f أي أنّ: من أجل كل x من المجال $[5;200]$، $C_m(x)=f(x)$.

أ-إيجاد عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن:

لدينا: $C_m(x)=f(x)$

من جدول تغيرات الدّالة f، **4825** هي **قيمة حدية صغرى** لـf على المجال $[5;200]$، من أجل $x=15$.

إذن: عدد الآلات التي يجب أن تُنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يُمكن هو ***15***.

ب-نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج x آلة. ونُذكّر أنّ $C'(x)=C_m(x)$.

ايجاد الكلفة الإجمالية $C(x)$، علما أنّ الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000DA:

- لدينا: $C'(x)=C_m(x)=f(x)$ أي: C هي **الدّالة الأصلية** للدّالة $C_m=f$ حيث $C(5)=4\times10^4$
- ولدينا: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+100+\frac{57600}{x+1}$

يكون: $C(x)=\frac{1}{12}x^4+100x+57600\ln(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})+\boldsymbol{c}$ (حيث $c\in\mathbb{R}$)

من جهة أخرى: $C(5)=4\times10^4$ نجد: $\frac{1}{12}5^4+100(5)+57600\ln(\mathbf{5}+\mathbf{1})+\boldsymbol{c}=4\times10^4$

ومنه: $c=-\frac{6625}{12}-57600\ln 6+4\times 10^4$

وبالتالي: $\boxed{c=\frac{473375}{12}-57600\ln 6}$

بالتعويض نجد: $C(x)=\frac{1}{12}x^4+100x+57600\ln(x+1)+\frac{473375}{12}-57600\ln 6$

إذن: $\boxed{C(x)=\frac{1}{12}x^4+100x+57600\ln\left(\frac{x+1}{6}\right)+\frac{473375}{12}}$.

استنتاج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى:

لدينا: $C(15)=\frac{1}{12}(15)^4+100(15)+57600\ln\left(\frac{15+1}{6}\right)+\frac{473375}{12}=\mathbf{101662,43}\boldsymbol{DA}$.

حل التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

اختيار الاقتراح الصحيح الوحيد، مع التبرير:

1) 2) **متتاليات عددية.**

3)منحنى الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2-1)^3$، يقبل مماساً في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ معادلته من الشكل: $y=f'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+f(\sqrt{2})$،

ولدينا: $\begin{cases} f(\sqrt{2})=\left(\sqrt{2}^2-1\right)^3=1 \\ f'(\sqrt{2})=6\sqrt{2}\left(\sqrt{2}^2-1\right)^2=6\sqrt{2} \end{cases}$ لأنّ: $\begin{cases} f(x)=(x^2-1)^3 \\ f'(x)=3\times 2x(x^2-1)^2=6x(x^2-1)^2 \end{cases}$

بالتعويض نجد: $y=6\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+1=6\sqrt{2}x-11$،

إذن: الاقتراح الصحيح هو **ب)** $y=6\sqrt{2}x-11$.

4) 5) 6) **إحتمالات.**

حل التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 02// الشعبة: تسيير وا.

I) لدينا: $g(x)=x^3-x^2-1$ وَ $D_g=]-\infty;+\infty[$.

1)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ **وَ** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ **:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$.

2)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ تشكّل جدول تغيراتها:

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	

إذن: g **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;0]$ وَ $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$، **ومتناقصة تماما** على المجال $\left[0;\frac{2}{3}\right]$؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		α		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0		+		
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$\frac{-31}{27}$	↗	0	↗	$+\infty$

3)تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,46<\alpha<1,48$:

لدينا: g **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $]1,46;1,48[$ (لأنها **متزايدة تماما** على $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$)

ولدينا: $\begin{cases} g(1,46)=-0,02 \\ g(1,48)=+0,05 \end{cases}$ أي: $g(1,46)\times g(1,48)<0$.

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,46<\alpha<1,48$،

أي: $\boxed{g(\alpha)=0}$.

4)استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x:

من السؤال 3) نُلخص إشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II) مؤسسة صناعية تنتج يوميا كميّة q (مُقدرة بالطّن) من منتوج بكلفة متوسطة C_M (مُقدرة بملايين الدّنانير) معرّفة على $[0;10]$ بـ: $C_M(q)=\frac{1}{2}q^2-q+1-\frac{1}{2}\ln(q^2+1)$.

1)تبيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي q من $[0;10]$، $C'_M(q)=\frac{g(q)}{q^2+1}$:

لدينا: $C_M(q)=\frac{1}{2}q^2-q+1-\frac{1}{2}\ln(q^2+1)$

ومنه: $C_M'(q)=q-1-\frac{1}{2}\left(\frac{2q}{q^2+1}\right)=q-1-\frac{q}{q^2+1}=\frac{(q-1)(q^2+1)-q}{q^2+1}=\frac{q^3-q^2-1}{q^2+1}=\frac{g(q)}{q^2+1}$.

2)تعيين اتجاه تغيّر الكلفة المتوسطة C_M ثمّ تشكيل جدول تغيراتها: (بأخذ $\alpha\simeq 1,47$)

لدينا: $C_M'(q)=\frac{g(q)}{q^2+1}$ ومنه: إشارة $C_M'(q)$ من إشارة $g(q)$ على المجال $[0;10]$ (لأنّ $q^2+1>0$)

q	1		α		10
$C_M'(q)$		-	0	+	

إذن: C_M **متناقصة تماما** على المجال $[1;\alpha]$، وَ**متزايدة تماما** على المجال $[\alpha;10]$.

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

q	1		α		10
$C_M'(q)$		-	0	+	
$C_M(q)$	0,15	↘	0,04	↗	38,69

3)تعيين الكميّة التي تُنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة ثمّ تحديد هذه الكلفة المتوسطة:

الكمية التي تُنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة هي $\boxed{q=\alpha\simeq 1,47t}$، وَ $\boxed{C_M(\alpha)\simeq 0,04}$، أي: $40000D$

4)إيجاد الكلفة الإجمالية C لإنتاج 2 طن يوميا: (أي: $C(2)$)

لدينا: $C(2) = 2C_M(2) = 2\left(\frac{1}{2}(2)^2 - 2 + 1 - \frac{1}{2}\ln(2^2+1)\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\ln(5)\right)$

إذن: $\boxed{C(2) \simeq 0{,}39}$ أي: $390000D$.

حل التمرين 10: (07 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) لدينا : $g(x) = x^3 + x - 2$ وَ $D_g = \mathbb{R}$.

بقراءة بيانية تعيين $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

من البيان، لدينا: $g(1) = 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II) لدينا : $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2}$ وَ $D_g =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$،

و (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty}$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

وَ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty}$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ وتفسّير النتيجة بيانيا:

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{-(x-1)}{x^2} = +\infty}$ لأنّ $\lim\limits_{x\to0}(-(x-1)) = 1$، $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0^+$ وَ $\lim\limits_{x\to0} x = 0$.

تفسيّرها البياني: محور التراتيب مقارب لـ (C_f).

2)تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$:

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{1(x^2) - 2x(x-1)}{(x^2)^2} = 1 - \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = 1 - \frac{-x+2}{x^3} = \frac{x^3+x-2}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

ـاستنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

إشارة $f'(x)$ نُلخصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		-	‖	+		+	
$g(x)$		-	‖	-	0	+	
$f'(x)$		+	‖	-	0	+	

إذن:

متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]1;+\infty[$، وَ **متناقصة تماما على المجال** $]0;1]$؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	α		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0 ↗	$+\infty$	||	$+\infty$ ↘	01	↗	$+\infty$

3) أ) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x - \frac{x-1}{x^2} - x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0$

وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \frac{x-1}{x^2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$

إذن: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $\boxed{y = x}$ **مقارب مائل** للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

لدينا: $f(x) - y = \frac{-x+1}{x^2}$، ومنه: إشارة الفرق من إشارة البسط $(-x + 1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x) - x$		$+$	||	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C) يقع فوق (Δ)	||	(C) يقع فوق (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) يقع تحت (Δ)	

4) تبيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,4; -1,3[$:

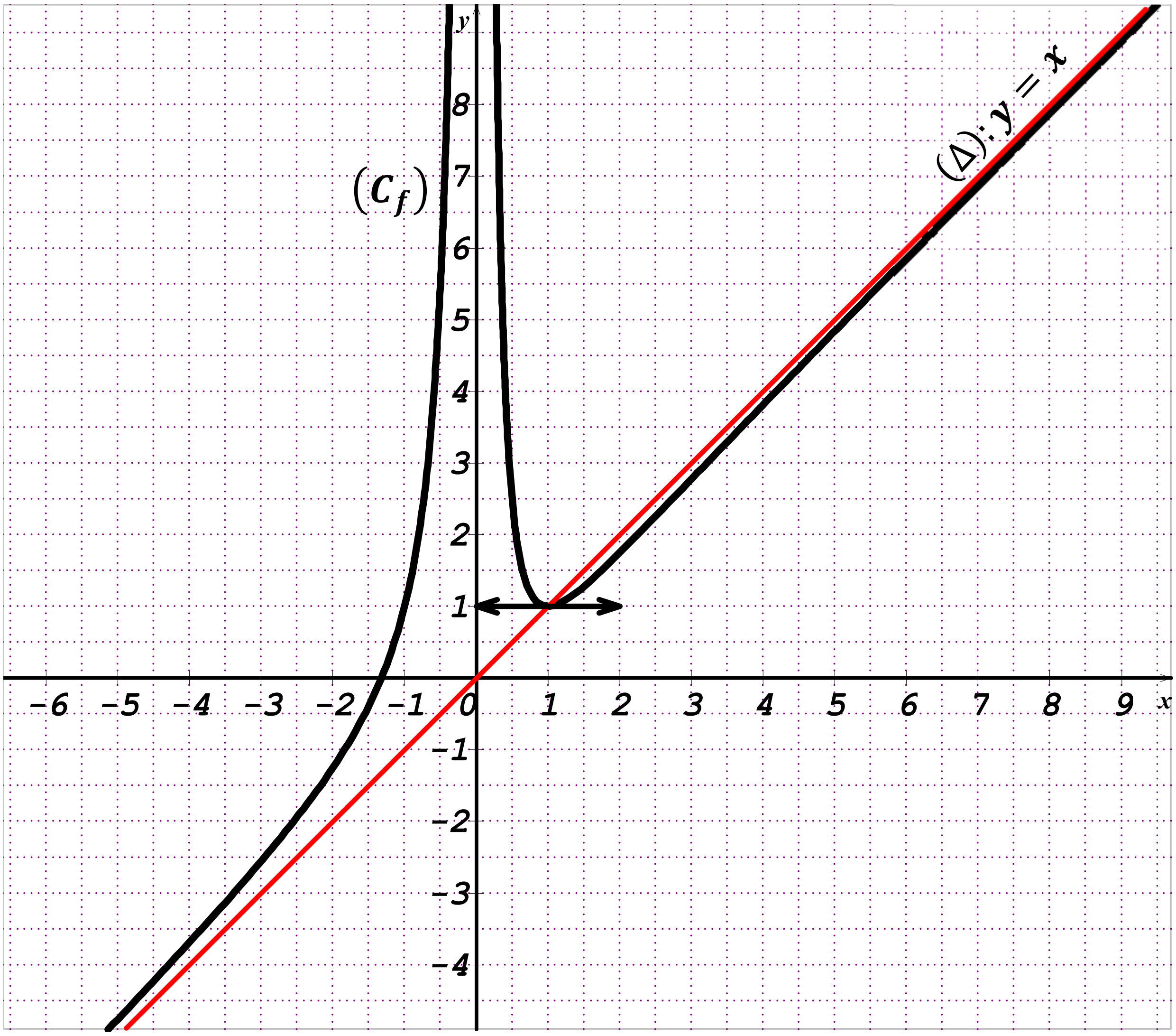
لدينا: f **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $]-1,4; -1,3[$ (لأنها **متزايدة تماما** على $]-\infty; 0[$)

ولدينا: $\begin{cases} f(-1,4) \simeq -0,18 \\ f(-1,3) \simeq +0,06 \end{cases}$ أي: $f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$.

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,4; -1,3[$،

أي: $\boxed{f(\alpha) = 0}$.

5) رسم (Δ) ثمّ المنحنى (C_f):



6)حساب A مساحة الحيّز المستوى المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها، $y = x$،
$x = 1$ وَ$x = 3$:

$$\int_1^3 [x - f(x)]dx = \left[\frac{1}{x} + \ln x\right]_1^3 = \left(\ln 3 - \frac{2}{3}\right) u.a$$