العبقري في الرياضيات

الدوال الأسية

الثالثة ثانوي

الشعب: تسيير وإقتصاد.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال الأسية واللوغاريتمية)

الملخص // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

ملخص: حول الدّوال الأسية واللوغاريتمية// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: تسيير وإ.

1 الدّالة الأسية

❶ مبرهنة وتعريف

توجد دّالة **وحيدة** f **قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$ بحيث:

$f'=f$ ① $\quad f(0)=1$ ②

نرمز إليها بالرمز **''exp''**، ونسميها **الدّالة الأسية النيبيرية.**

نتائج من التعريف:

- $\boxed{\exp(0)=1}$.
- من أجل **كل عدد حقيقي** x، $\boxed{\exp'(x)=\exp(x)}$.

❷ خواص جبرية

x و y عددان **حقيقيان** وَ n عدد **صحيح**.

① $\exp(x)>\mathbf{0}$

② $\exp(x)\times\exp(-x)=1$

$\left(\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}\right)$

③ $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

④ $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

⑤ $(n\in\mathbb{Z})\ \exp(nx)=[\exp(x)]^n$

العدد e والترميز e^x:

- العدد e هو **صورة 1** بالدّالة **الأسية** أي:

$$\boxed{\exp(1)=e\simeq 2{,}72}$$

- حسب **الخاصية** ⑤ ومن أجل $x=1$ نجد:

$(n\in\mathbb{Z})\ \exp(n)=[\exp(1)]^n=e^n$

اصطلاحاً: $\boxed{\exp(x)=e^x}$

(من أجل كل $x\in\mathbb{R}$)

قواعد الحساب: (خواص الدّالة " exp ")

x و y عددان **حقيقيان** وَ n عدد **صحيح**.

① $\boxed{e^0=1}$ $\quad$ ② $\boxed{(e^x)'=e^x>0}$

③ $\boxed{e^x\times e^{-x}=1}$ $\quad \left(\boxed{e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}>0}\right)$

④ $\boxed{e^{x+y}=e^x\times e^y}$ $\quad$ ⑤ $\boxed{e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}}$

⑥ $\boxed{e^{nx}=(e^x)^n}$ $(n\in\mathbb{Z})$

❸ دراسة الدّالة " exp "

لدينا: $\exp(x)=e^x$ وَ $D_{\exp}=]-\infty;+\infty[$.

النهايات

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ $\quad$ ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$

إتجاه التغير

من أجل **كل عدد حقيقي** x، $\boxed{(e^x)'=e^x>0}$

إذن: الدّالة **''exp'' متزايدة تماماً** على $\mathbb{R}$.

جدول التغيّرات

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)'$		+		
e^x	0^+	1	e	$+\infty$

نعلم أنّ $e^x > \mathbf{0}$ **من جدول التغيرات:**

- $0 < e^x < 1$ **يعني:** $x < 0$
- $e^x = 1$ **يعني:** $x = 0$
- $1 < e^x < e$ **يعني:** $0 < x < 1$
- $e^x > e$ **يعني:** $x > 1$

يُمكن أن يكون x **عبارة جبرية**.

بمأنّ الدّالة **"exp" متزايدة تماماً** على $\mathbb{R}$، فإنّ:

- $e^a > e^b$ **يعني:** $a > b$
- $e^a < e^b$ **يعني:** $a < b$
- $e^a = e^b$ **يعني:** $a = b$

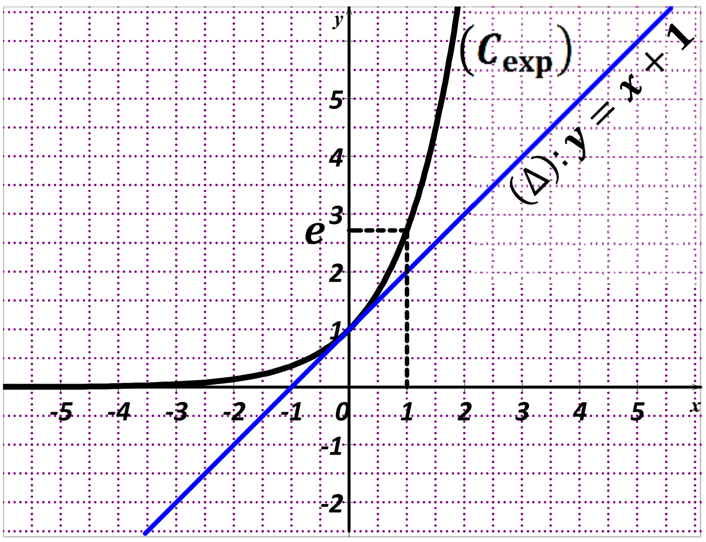
a وَ b **عددان حقيقيان** أو **عبارتان جبريتان**.

ملاحظة مهمة: تُستعمل **لحل معادلات** وَ**متراجحات** أو**لدراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن** e.

نتائج:

- بمأنّ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+}$ فإنّ $(C_{\exp})$ **يقبل محور الفواصل كمُقارب** عند $-\infty$.
- لدينا: $\exp(0) = e^0 = 1$ وَ $\exp'(0) = 1$
إذن: $(C_{\exp})$ **يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماساً**، $(\Delta): y = \exp'(0)\,(x-0) + \exp(0)$
أي: $\boxed{(\Delta): y = x + 1}$.
- باستعمال **تعريف العدد المشتق** للدّالة "exp" عند **0**:
لدينا: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} = \exp'(0)$، إذن: ❸ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$.
- الدّالة $x \mapsto x+1$ هي **أحسن تقريب تآلفي** للدّالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0
أي: $\boxed{e^x \simeq x+1}$ من أجل x قريب من 0.

التمثيل البياني



❹ دراسة الدّالة " $\exp \circ u$ "

لدينا: $(exp \circ u)(x) = e^{u(x)}$

النهايات

لدراسة نهاية دّالة ''$\exp \circ u$'' نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دّالة مركبة.

إتجاه التغيّر

للدّالتين " u " و ''$\exp \circ u$'' نفس اتجاه التغيّر على I، حيث: u معرّفة على I.
لأنّ الدّالة ''exp'' متزايدة تماماً.

المشتقة

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}}$$

إشارة $\left(e^{u(x)}\right)'$ من إشارة $u'(x)$ لأنّ: $e^{u(x)} > 0$.

❺ التزايد المقارن

التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto e^x$ وَ $x \mapsto x$:

❹ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ❺ $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$

التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto e^x$ وَ $x \mapsto x^n$:

❹ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ❺ $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0^-$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

تُستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

❻ معادلات من الشكل " $ae^{2x} + be^x + c = 0$ " حيث $(a \neq 0)$

نضع: $X = e^x$

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ ثمّ نستنتج قيم x في حالة وجودها (لأنّ $e^x > 0$).

- نأخذ قيم $X > 0$ لإيجاد x وذلك بالعودة إلى الوضع.

❼ المعادلات التفاضلية من الشكل " $y' = ay + b$ " بحيث $(a \neq 0)$

- المعادلة التفاضلية $y' = ay$، الحلول هي الدّوال $x \mapsto ce^{ax}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$، الحلول هي الدّوال $x \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- إذا أُعطي شرط مثلاً $f(x_0) = y_0$، نُعوض في الحلول، نقوم بإيجاد c، ويُصبح الحل **وحيد** للمعادلة التفاضلية.

❽ إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

- إشارة $e^x - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		-	0	+	

لدراسة إشارة العبارة $ae^{2x} + be^x + c$ $(abc \neq 0)$

نحلّله باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

☜ $\Delta > 0$ $ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')(e^x - X'')$

☜ $\Delta = 0$ $ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')^2$

☜ $\Delta < 0$ $ae^{2x} + be^x + c$

يُمكن تلخص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.

إشارة $ae^{\alpha x+\beta}+b$

إذا كان: a و b **موجبين** فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b>0$.

إذا كان: a و b **سالبين** فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b<0$.

إذا كان: a و b **مختلفين في الإشارة**، فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b$ **متغيرة الإشارة** ولمعرفة إشارته

- نحل المعادلة و المتراجحات $ae^{\alpha x+\beta}+b>0$، $ae^{\alpha x+\beta}+b<0$، $ae^{\alpha x+\beta}+b=0$

2 الدّالة اللوغاريتمية

❶ اللوغاريتم النيبيري لعدد

مبرهنة وتعريف:

يوجد **عدد حقيقي وحيد b** بحيث $e^b=a>0$،
يسمى هذا العدد **اللوغاريتم النيبيري** للعدد a،
ونرمز إليه بالرمز " $\ln a$ " أي $\boxed{b=\ln a}$.

مثلاً: $e^b=2$ معناه: $b=\ln 2$.

❶ تعريف الدّالة " $\ln$ "

نسمي "**الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية**" الدّالة التي نرمز إليها بالرمز "**ln**"، والتي **تُرفق** بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج من التعريف:

- من أجل $x\in\mathbb{R}$ وَ $y\in]0;+\infty[$، $\boxed{e^x=y \text{ يعني: } x=\ln y}$
- من أجل $x\in]0;+\infty[$، $\boxed{e^{\ln x}=x}$.
- من أجل $x\in\mathbb{R}$، $\boxed{\ln(e^x)=x}$.
- بمأنّ: $e^0=1$ فإنّ: $\ln 1=0$، وَبمأنّ: $e^1=e$ فإنّ: $\ln e=1$.

حسب النتيجة 1) الدّالة **اللوغاريتمية النيبيرية "ln"** هي **الدّالة العكسية** للدّالة **الأسية النيبيرية "exp"**.

في معلم متعامد ومتجانس، $(C_{\exp})$ وَ $(C_{\ln})$ **متناظران بالنسبة إلى** المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (المنصف الأوّل).

❷ خواص جبرية

الخاصية الأساسية:

x و y عددان **حقيقيان** من $]0;+\infty[$،

① $\boxed{\ln(xy)=\ln x+\ln y}$

نتائج:

x و y عددان **حقيقيان** من $]0;+\infty[$، وَ n عدد **صحيح**.

② $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x}$

③ $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y}$

④ $\boxed{\ln(x^n)=n\ln x}$ $(n\in\mathbb{Z})$

⑤ $\boxed{\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x}$

- يكون للعدد $\ln x$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $x > 0$ (ما بعد $\ln$ **موجب تماماً**)
- يكون للعدد $\ln[u(x)]$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) > 0$. (ما بعد $\ln$ **موجب تماماً**)
- يكون للعدد $\ln|u(x)|$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) \neq 0$.
- يكون للعدد $\ln[u(x)]^n$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) \neq 0$، في حالة $n = 2k$ **زوجي**.
$u(x) > 0$، في حالة $n = 2k + 1$ **فردي**.

❸ دراسة الدّالة " $\ln$ "

لدينا: $\ln: x \mapsto \ln(x)$ وَ $D_{\ln} =]0; +\infty[$.

النهايات

❶ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ❷ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

إتجاه التغيّر

من أجل **كل** x من $]0; +\infty[$، $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0}$

إذن: الدّالة **"ln" متزايدة تماماً** على $]0; +\infty[$.

جدول التغيّرات

x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln x)'$	‖			+			
$\ln x$	‖ $-\infty$	- - ↗	0	+ + ↗	1	+ ↗	$+\infty$

نعلم أنّ $\ln x$ **متغيرة الإشارة** (لأنّ $\ln x \in \mathbb{R}$)

ومن جدول التغيرات:

- $\ln x < 0$ **يعني:** $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$ **يعني:** $x = 1$
- $0 < \ln x < 1$ **يعني:** $1 < x < e$
- $\ln x = 1$ **يعني:** $x = e$
- $\ln x > 1$ **يعني:** $x > e$

- **إشارة $\ln x$**

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+	

يُمكن أن يكون x **عبارة جبرية** (استعمل كلمة ما بعد $\ln$)

بمأنّ الدّالة **"ln" متزايدة تماماً** على $]0; +\infty[$، فإنّ

- $\ln a > \ln b$ **يعني:** $a > b$
- $\ln a < \ln b$ **يعني:** $a < b$
- $\ln a = \ln b$ **يعني:** $a = b$

a وَ b **عددان حقيقيان موجبان تماماً** أوَ **عبارتان جبريتان موجبتان تماماً**.

ملاحظة مهمة: تُستعمل **لحل معادلات** وَ**متراجحات** أوَ**لدراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن ln**.

نتائج:

- بما أنّ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} lnx = -\infty}$ فإنّ (C_{ln}) يقبل **محور التراتيب كمُقارب له.**
- لدينا: $\ln(1) = 0$ وَ $(\ln \mathbf{1})' = \frac{1}{\mathbf{1}} = 1$

إذن: $(C_{\ln})$ يقبل **عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماساً،** $(\Delta'): y = (\ln \mathbf{1})'(x-1) + \ln 1$

أي: $\boxed{(\Delta'): y = x - 1}$.

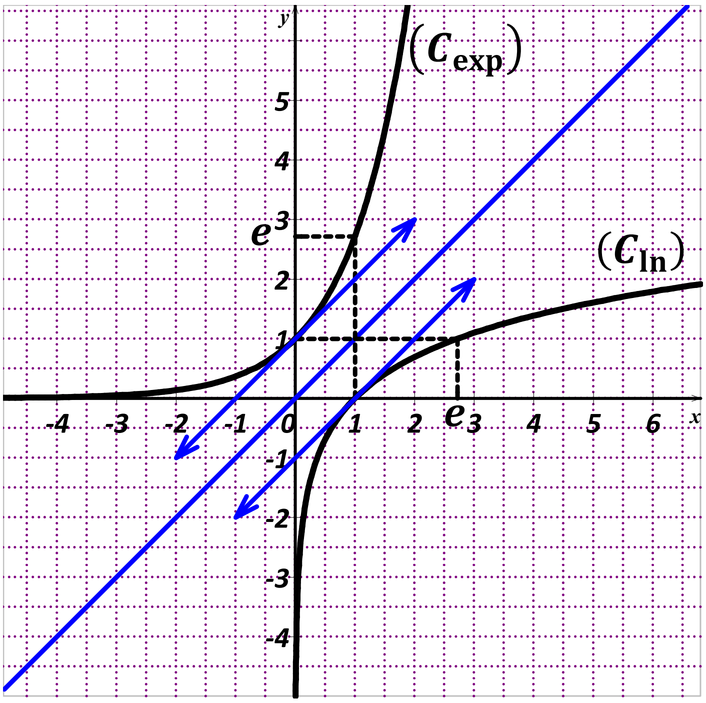
- باستعمال **تعريف العدد المشتق** للدّالة $''\ln''$ عند **1**

$(\ln 1)' = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$، إذن: ❸ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1}$.

- الدّالة $x \mapsto x - 1$ هي **أحسن تقريب تآلفي** للدّالة $x \mapsto \ln x$ بجوار **1**

أي: $\boxed{\ln x \simeq x - 1}$ من أجل x قريب من **1**.

التمثيل البياني



❹ دراسة الدّالة " $\ln \circ u$ "

لدينا: $(\ln \circ u)(x) = \ln[u(x)]$

النهايات

لدراسة نهاية دّالة $''\ln \circ u''$ نستعمل **المبرهنة الخاصة بنهاية دّالة مركبة.**

إتجاه التغيّر

للدّالتين $''u''$ وَ $''\ln \circ u''$ **نفس اتجاه التغيّر** على I، حيث:

u معرّفة و**موجبة تماماً** على I.

لأنّ الدّالة **"ln" متزايدة تماماً.**

المشتقة

$$\boxed{(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

ملاحـــظة:

$$\boxed{(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

❺ التزايد المقارن

التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$:

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ ❺ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0^-$

التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x^n$:

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$ ❺ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^n\ln x = 0^-$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

تُستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

❻ معادلات من الشكل " $a[\ln x]^2 + b\ln x + c = 0$ " حيث $(a \neq 0)$

نضع: $X = \ln x$

نقوم بعد ذلك **بحل المعادلة** $aX^2 + bX + c = 0$ ثمّ **نستنتج قيم x في حالة وجودها** (لأنّ $x > 0$).

- نأخذ قيم X لإيجاد x وذلك بالعودة إلى الوضع.

❼ إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

لدراسة إشارة العبارة $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c$ $(abc \neq 0)$

نحلّله باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c = a(\ln x - X')(\ln x - X'')$
- $\Delta = 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c = a(\ln x - X')^2$
- $\Delta < 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c$

يُمكن تلخص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.

إشارة $a\ln(\alpha x + \beta) + b$

- نحل المعادلة والمتراجحات $a\ln(\alpha x + \beta) + b > 0$،
  $a\ln(\alpha x + \beta) + b < 0$،
  $a\ln(\alpha x + \beta) + b = 0$

ملاحظة مهمة جداً: لحل معادلات (أو متراجحات) تتضمن $\ln$ نُعين أولا مجموعة التعريف D.

الــــدّالة

❶ الأسية ❷ اللوغاريتمية

❷ النهايات ☹

الأسية:

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$
❸ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	
❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	❺ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$
❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	❺ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x = 0^-$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

اللوغاريتمية:

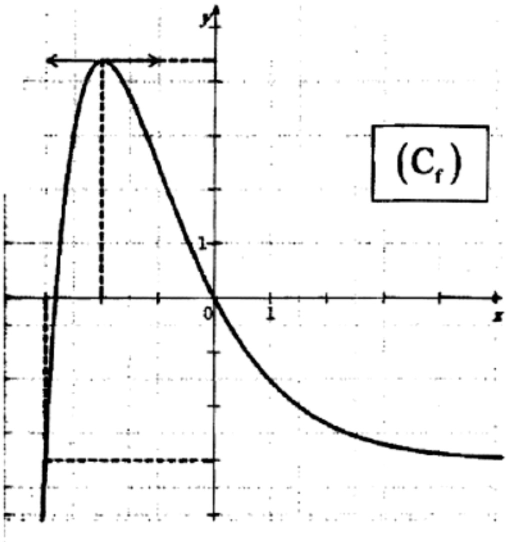
❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$	❷ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$
❸ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	
❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$	❺ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0^-$
❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$	❺ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^n\ln x = 0^-$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال الأسية -بكالوريات جزائرية)

التمارين// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.



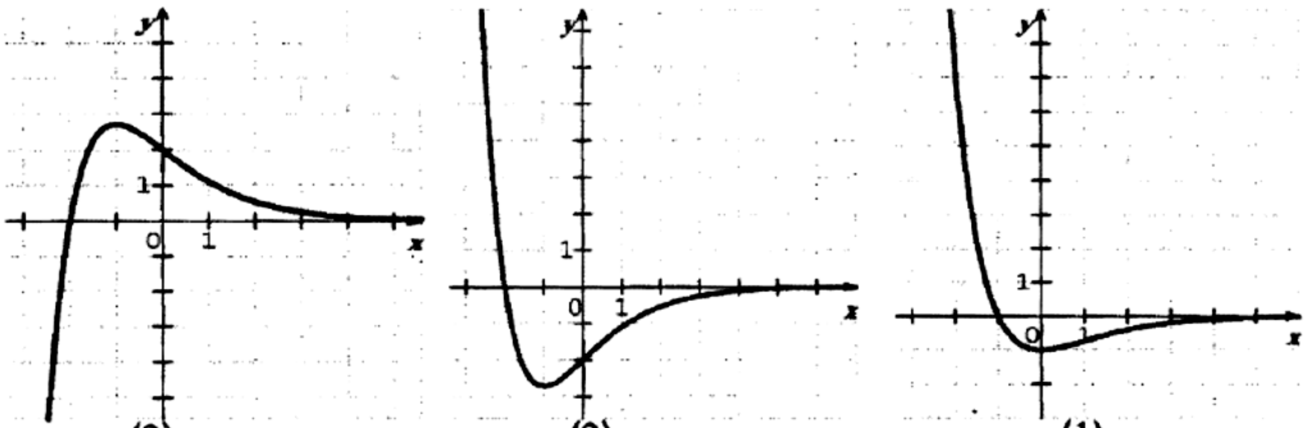
f دّالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = (x + a)e^{-x} + b$ حيث a وَ b عددان حقيقيان وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) بقراءة بيانية للمنحنى (C_f):

أ) عيّن $f(-3)$، $f(0)$، $f'(-2)$.

ب) عيّن حسب قيّم x إشارة $f'(x)$.

ج) من بين المنحنيات الثلاثة (1)، (2)، (3) عيّن، مع التبرير، المنحنى المُمثل للدّالة f' مشتقة الدّالة f.



(3) (2) (1)

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) = (x + 3)e^{-x} - 3$.

ب) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

جـ) بيّن أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له.

د) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلا وحيدا α محصور بين 1,50 وَ 1,52.

3) نعتبر الدّالة F المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = (-x - 4)e^{-x}$ وليكن I العدد الحقيقي حيث: $I = \int_{-2}^{0} f(x)dx$.

أ) احسب $F'(x)$ ثمّ استنتج دّالة أصلية للدّالة f على $\mathbb{R}$.

ب) أعط تفسيرا بيانيا للعدد I مُبررا الحصر التالي $4,5 < I < 5$ بإعتبارات بيانية مَحضة.

جـ) احسب العدد I.

التمرين 02: (08 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

1) لتكن f الدّالة المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = e^{2x} - e^{x} - x - 2$.

أ. احسب نهاية الدّالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$. (نَقبل أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$)

ب. بيّن أنّ الدّالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأنّ دّالتها المشتقة f' تُحقق: $f'(x) = (e^{x} - 1)(2e^{x} + 1)$.

جـ. ادرس حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f وشكّل جدول تغيراتها.

2) (C) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ على المجال $]-\infty;1]$

أ. بيّن أنّ المستقيم (d) الذي معادلته $y = -x - 2$ مُقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (d).

ب. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-2{,}11 < \alpha < -2{,}10$ وَ $0{,}81 < \beta < 0{,}82$ وفسّر النتيجة هندسياً.

جـ. ارسم المستقيم (d) والمنحنى (C).

3) عيّن دّالة أصلية F للدّالة f على المجال $]-\infty;1]$.

التمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

جدول التغيّرات المُقابل هو للدّالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = (x+1)e^{1-x}$، ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

1) بيّن أنّ معادلة (Δ) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة **1** هي: $y = -x + 3$.

2) g هي الدّالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x) = -xe^{1-x} + 1$.

أ- أدرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

ب- أحسب $g(1)$، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

3) h هي الدّالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x) = (x+1)e^{1-x} + x - 3$.

أ- لاحظ أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $h(x) = f(x) + x - 3$، ثم استنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

ب- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $h'(x) = g(x)$، ثم استنتج جدول تغيّرات الدّالة h.

جـ- تحقّق أنّ المعادلة: $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1;+\infty[$ يُطلب تعيينه.

د- حدّد إشارة $h(x)$، ثمّ استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

هـ- أنشئ كلا من المماس (Δ) والمنحنى (C_f).

التمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^{x}-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1-أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$. فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2-أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$، مُقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) تحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإنّ: $f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$، ثمّ استنتج أنّ المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = 2x - 2$، مُقارب للمنحنى (C_f).

3-بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإنّ: $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$.

استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4-مثّل بيانيا كلاً من (Δ)، (Δ') و (C_f).

5-احسب العدد: $\int_1^2 f(x)dx$، ثمّ فسره هندسيا.

التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الدّالة العددية f معرّفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 6(1 - 2x)e^{-x} + 5$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

I) 1) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسياً. (يُعطى $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$)

2)ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3)أنشئ (C_f).

4)أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 3{,}5$ تقبل في $[0; 7]$ حلين مختلفين α، β حيث:

$0{,}7 < \alpha < 0{,}8$ وَ $2{,}9 < \beta < 3$.

ب) حل بيانياً في المجال $[0; 7]$ المتراجحة: $f(x) \leq 3{,}5$.

5)أ) عيّن العددين الحقيقيين a، b بحيث تكون الدّالة g المعرّفة على $[0; 7]$ بـ:

$g(x) = (ax + b)e^{-x}$ دّالة أصلية للدّالة h المعرّفة على $[0; 7]$ بــ: $h(x) = 6(1 - 2x)e^{-x}$.

ب) استنتج دّالة أصلية للدّالة f على $[0; 7]$.

II)الكلفة الهامشية C_M لصناعة كمية x (مقدرة بالطن) من منتوج، حيث x ينتمي إلى المجال $[0; 7]$

تُنمذج بالدّالة f أي: $C_M(x) = f(x)$ (الكلفة مقدرة بملايين الدنانير).

1)حدّد كمية المنتوج بحيث تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن، وما هي قيمة هذه الكلفة؟ (تُدور النتيجة إلى 10^{-2})

2)ما هي كميات المنتوج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 3,5 مليون دينار؟

3)نُذكّر أنّ دالة الكلفة الإجمالية دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية.

أ) بيّن أنّ الكلفة الإجمالية C_T معرفة بــ: $C_T(x) = (12x + 6)e^{-x} + 5x + k$ حيث k عدد حقيقي.

ب) حدّد قيمة k إذا علمت أنّ المصاريف الثابتة 2 مليون دينار (أي $C_T(0) = 2$).

التمرين 06: (09 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} - 3$.

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = \frac{4}{e^x + 1} - 3$.

ب) احسب نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$؛ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3)أ) جِد فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $\Omega(0;-1)$.

جـ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(-x)+f(x)=-2$ ثم استنتج أنّ (C_f) يقبل مركز تناظر.

د) أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم.

4)أحسب مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=0$، $x=-\ln 3$ وَ $y=0$.

5) h الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $h(x)=f(|x|)$، و(C_h) منحناها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ) بيّن أنّ h دّالة زوجية.

ب) اعتماداً على المنحنى (C_f)، اشرح كيف يتم رسم المنحنى (C_h) ثمّ ارسمه في نفس المعلم السابق.

التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

f الدّالة العددية للمتغيّر الحقيقي x المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^x+2e^{-x}-3$.

اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة مع التعليل.

		الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة جـ)
1	حلّي المعادلة $f(x)=0$ هما	0 و $\ln 2$	0 و $-\ln 2$	0 و $\ln 3$
2	نهاية $f(x)$ عندما x يؤول إلى $+\infty$ هي	$-\infty$	$+\infty$	-3
3	على المجال $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$ الدّالة f	متزايدة تماما	متناقصة تماما	ليست رتيبة
4	m القيمة المتوسطة للدّالة f على المجال $[0;2]$، مُدوّر m إلى الوحدة هو:	*1*	*2*	*- 1*

التمرين 08: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

نعتبر الدّالة f المعرّفة على D_f حيث $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{e^x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ) احسب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ وفسّر بيانيا النتائج المُحصل عليها.

ب) احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2)أ) بيّن أنّه من أجل كل x من D_f، $f'(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3)ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=1$.

4)عيّن معادلة لـ المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 3$.

5)نعتبر الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=f(x)-\frac{9}{4}(x-\ln 3)-1$.

الجدول المُقابل يُمثل جدول تغيرات الدّالة g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

أ) احسب $g(\ln 3)$ واستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

ب) ادرس على المجال $]0;+\infty[$ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T)، ثمّ فسّر ذلك بيانيا.

6)احسب $f(\ln 2)$ ثمّ أرسم المماس (T) وَ (C_f) على المجال $]-\infty;0[\cup]0;3]$.

التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I)لتكن g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x-1-e^{2x}$.

1)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

2)استنتج إشارة $g(x)$.

II)نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2-x-\frac{1}{2}e^{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ حيث $\|\vec{\imath}\|=2cm$.

1)احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. (يُعطى: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}=+\infty$)

2)ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3)أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0{,}25<\alpha<-0{,}24$.

ب) أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A إحداثياها $\left(0;\frac{-1}{2}\right)$.

جـ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A.

4)ارسم (T) وَ (C_f).

5)أ) احسب بالسّنتمتر مربع المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=\alpha$ و $y=0$.

ب) تحقّق أنّ $A(\alpha)=\frac{1}{3}(4\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha+3)cm^2$.

التمرين 10: (08 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I)نعتبر الدّالة العددية g المعرّفة على $[0;+\infty[$ بِـ: $g(x)=1+(1-x)e^{-x+1}$.

ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ بيّن أنّه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $g(x)>0$. (لا يُطلب حساب النهايات)

II)نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بِـ: $f(x)=x+xe^{-x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1)أ. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. ثمّ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f).

ب. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2)بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات للدّالة f.

3)بيّن أنّ المعادلة $f(x)=4$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $3{,}75<\alpha<3{,}77$.

4)اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة ***1*** ثمّ ارسم (T)، (Δ) وَ (C_f).

5)نعتبر الدّالة العددية F المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $F(x)=\frac{1}{2}x^2-(x+1)e^{-x+1}$.

أ. بيّن أنّ الدّالة F هي دّالة أصلية للدّالة f على المجال $[0;+\infty[$.

ب. أوجد القيمة المضبوطة للعدد $\int_1^4 f(x)dx$، ثمّ أعط تفسيرا هندسيا لهذا العدد.

6)تنمذج الكلفة الهامشية C_m لإنتاج كمية q (مقدرة بآلاف الوحدات) حيث $0\le q\le 7$ بالدّالة f المعرّفة سابقا أي: $C_m(q)=f(q)$ حيث: $q\in[0;7]$. (الكلفة الهامشية مقدّرة بملايين الدنانير)

أ. ما هي كمية المنتوج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 4 ملايين دينار؟

ب. نذكّر أنّ دّالة الكلفة الإجمالية C_T هي دّالة أصلية لدّالة الكلفة الهاشمية. احسب القيمة المتوسطة للكلفة الإجمالية عندما تنتج الشركة ما بين 1000 وحدة و4000 وحدة.

التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) g الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;0]$ كما يلي: $g(x)=2x+6-e^{2x+1}$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]-\infty;0]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3<\alpha<-2{,}9$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;0]$.

II) f الدّالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0]$ كما يلي: $f(x)=-2x^2-12x+e^{2x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

حيث الوحدة على محور الفواصل $1cm$ وعلى محور التراتيب $0{,}5cm$.

1) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$: $f'(x)=-2g(x)$.

2) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f على المجال $]-\infty;0]$.

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4) بيّن أنّ: $f(\alpha)=-2\alpha(\alpha+5)+6$ وأعط حصرا للعدد $f(\alpha)$، ثمّ ارسم (C_f) على المجال $[-4;0]$.

5) احسب بدلالة α التكامل: $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال الأسية -بكالوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: تسيير وإقتصاد

حل التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = (x+a)e^{-x} + b$ وَ $D_f = \mathbb{R}$، حيث a وَ b عددان حقيقيان.

1)بقراءة بيانية للمنحنى (C_f)،

أ) تعيين $f(-3)$، $f(0)$، $f'(-2)$:

من البيان لدينا: $\boxed{f(-3) = -3}$؛ $\boxed{f(0) = 0}$

وَ $\boxed{f'(-2) = 0}$ (المماس عند النقطة ذات الفاصلة (-2) مُوازي لمحور الفواصل).

ب) تعيين حسب قيّم x إشارة $f'(x)$:

من البيان لدينا: f **متزايدة تماما** على المجال $]-\infty; -2]$ و**متناقصة تماما** على المجال $[-2; +\infty[$ إذن:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

ج) المنحنى المُمثل للدّالة f' مشتقة الدّالة f هو **المنحنى (2)** لأنّ:

- من أجل $x \in]-\infty; -2]$، **المنحنى (2)** يقع فوق محور الفواصل أي: $\boxed{f'(x) \geq 0}$.
- ومن أجل $x \in [-2; +\infty[$، **المنحنى (2)** يقع تحت محور الفواصل أي: $\boxed{f'(x) \leq 0}$.

2)أ) تبيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) = (x+3)e^{-x} - 3$:

من 1)أ)، لدينا: $\begin{cases} f(-3) = -3 \\ f(0) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases}$ بحيث: $f'(x) = 1e^{-x} - e^{-x}(x+a) = (1-x-a)e^{-x}$

ومنه: $\begin{cases} (-3+a)e^{-(-3)} + b = -3 \\ (0+a)e^{-0} + b = 0 \\ (1-(-2)-a)e^{-(-2)} = 0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} (-3+a)e^{3} + b = -3 \quad \dots (1) \\ a + b = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots . (2) \\ (3-a)e^{2} = 0 \quad \dots\dots\dots (3) \end{cases}$

من (3) نجد: $\boxed{a = 3}$، وبالتعويض في (2) نجد: $\boxed{b = -3}$، إذن: $\boxed{f(x) = (x+3)e^{-x} - 3}$.

ب) تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f :

x	$-\infty$		-2		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-			
$f(x)$	$-\infty$	↗	$e^2 - 3$	↘	-2	↘	-3

بحيث، $\lim\limits_{x\to-\infty} [(x+3)e^{-x} - 3] = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x+3) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [(x+3)e^{-x} - 3] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} - 3\right) = -3$

وَ $f(-2) = (-2+3)e^{-(-2)} - 3 = e^2 - 3$

جـ) تبيان أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له:

بما أنّ: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3$ ،

فإنّ: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=-3}$ **(المُوازي لمحور الفواصل)** مُقارب لـ(C_f) عند $+\infty$.

د) تبيان أنّ المعادلة $f(x)=-2$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلاً وحيداً α محصور بين $1,50$ وَ$1,52$:

- لدينا: f **مستمرة ومتناقصة تماما** على المجال $]0;+\infty[$ (لأنّها **متناقصة تماما** على المجال $]-2;+\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -3 \end{cases}$ ، أي: $-2\in\,]-3;0]$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=-2$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلاً وحيداً α.

وبما أنّ: $\begin{cases} f(1{,}50)\simeq -1{,}996 \\ f(1{,}52)\simeq -2{,}011 \end{cases}$ ، أي: (2 - محصور بين $f(1{,}50)$ و $f(1{,}52)$)

فإنّ: $\boxed{1{,}50<\alpha<1{,}52}$.

3) لدينا: $F(x)=(-x-4)e^{-x}$ وَ $D_F=\mathbb{R}$؛ I العدد الحقيقي حيث: $I=\int_{-2}^{0} f(x)dx$.

أ) حساب $F'(x)$: $F'(x) = -1\times e^{-x} - e^{-x}(-x-4) = (-1+x+4)e^{-x} = (x+3)e^{-x}$

استنتاج دالّة أصلية للدّالّة f على $\mathbb{R}$:

بما أنّ: $F'(x)=(x+3)e^{-x}$ فإنّ: F أصلية للدّالّة $x\mapsto (x+3)e^{-x}$

وبالتالي: $x\mapsto F(x)-3x$ هي أصلية للدّالّة f.

ب) إعطاء تفسيرا بيانيا للعدد I:

العدد I هو مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=-2$ ، $x=0$.

تبرير الحصر التالي $4,5<I<5$ باعتبارات بيانية مَحضة:

جـ) حساب العدد I:

لدينا: $I=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = [(-x-4)e^{-x}-3x]_{-2}^{0}$

ومنه: $I=[(-0-4)e^{-0}-3(0)] - [(-(-2)-4)e^{-(-2)}-3(-2)]$

وعليه: $I=-4-(-2e^2+6) = -10+2e^2$.

حل التمرين 02: (08 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

1) لدينا: $f(x)=e^{2x}-e^x-x-2$ وَ $D_f=\mathbb{R}$.

أ. حساب نهاية الدّالّة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$: **(علماً أنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}}=0$)**

- لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^{2x}-e^x-x-2)=+\infty$ ، لأنّ: $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x\to-\infty}(-x-2)=+\infty \end{cases}$.
- وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^{2x}-e^x-x-2) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^x}-\frac{x}{e^{2x}}-\frac{2}{e^{2x}}\right)\right)=+\infty$ ،

لأنّ: $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{2x}}=0 \end{cases}$.

ب. تبيان أنّ الدّالّة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأنّ f' تُحقق، $f'(x)=(e^x-1)(2e^x+1)$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنّها مجموع دّوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وهي:
$x \mapsto e^{2x}$؛ $x \mapsto -e^{x}$ و $x \mapsto -x - 2$،

ولدينا: $f'(x) = 2e^{2x} - e^{x} - 1$ **(1)**

ولدينا من جهة أخرى: $(e^{x} - 1)(2e^{x} + 1) = 2e^{2x} + e^{x} - 2e^{x} - 1 = 2e^{2x} - e^{x} - 1$ **(2)**

إذن: $\boxed{f'(x) = (e^{x} - 1)(2e^{x} + 1)}$.

جـ. دراسة حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثمّ استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(e^{x} - 1)$ لأنّ: $2e^{x} + 1 > 0$

$e^{x} - 1 > 0$ يعني $e^{x} > 1$ وعليه $x > \ln 1$ أي: $x > 0$

$e^{x} - 1 = 0$ يعني $e^{x} = 1$ وعليه $x = \ln 1$ أي: $x = 0$

$e^{x} - 1 < 0$ يعني $e^{x} < 1$ وعليه $x < \ln 1$ أي: $x < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

إذن: f **متناقصة تماما** على المجال $]-\infty; 0]$، و**متزايدة تماما** على المجال $[0; +\infty[$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

2) (C) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ على المجال $]-\infty; 1]$

أ. تبيان أنّ المستقيم (d) الذي معادلته $y = -x - 2$ مُقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x - 2)] = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{2x} - e^{x}) = 0$، لأنّ: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$.

إذن: المستقيم (d) الذي معادلته $y = -x - 2$ مُقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (d):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x - 2)$، لدينا: $f(x) - (-x - 2) = e^{2x} - e^{x} = e^{x}(e^{x} - 1)$

إشارة الفرق $f(x) - (-x - 2)$ من إشارة $(e^{x} - 1)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{x} - 1$		-	0	+	
$f(x) - (-x - 2)$		-	0	+	
الوضع النسبي	(C) يقع تحت (d)		(C) يقطع (d)		(C) يقع فوق (d)

ب. تبيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-2,11 < \alpha < -2,10$ و $0,81 < \beta < 0,82$ وتفسير النتيجة هندسياً:

بالنسبة لـ α:

- f **مستمرة** و**متناقصة تماما** على المجال $]-2,11; -2,10[$ (لأنّها **متناقصة تماما** على $]-\infty; 0]$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(-2,11) \simeq 0,00346 \\ f(-2,10) \simeq -0,00746 \end{cases}$ أي: $f(-2,11) \times f(-2,10) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-2,11; -2,10[$.

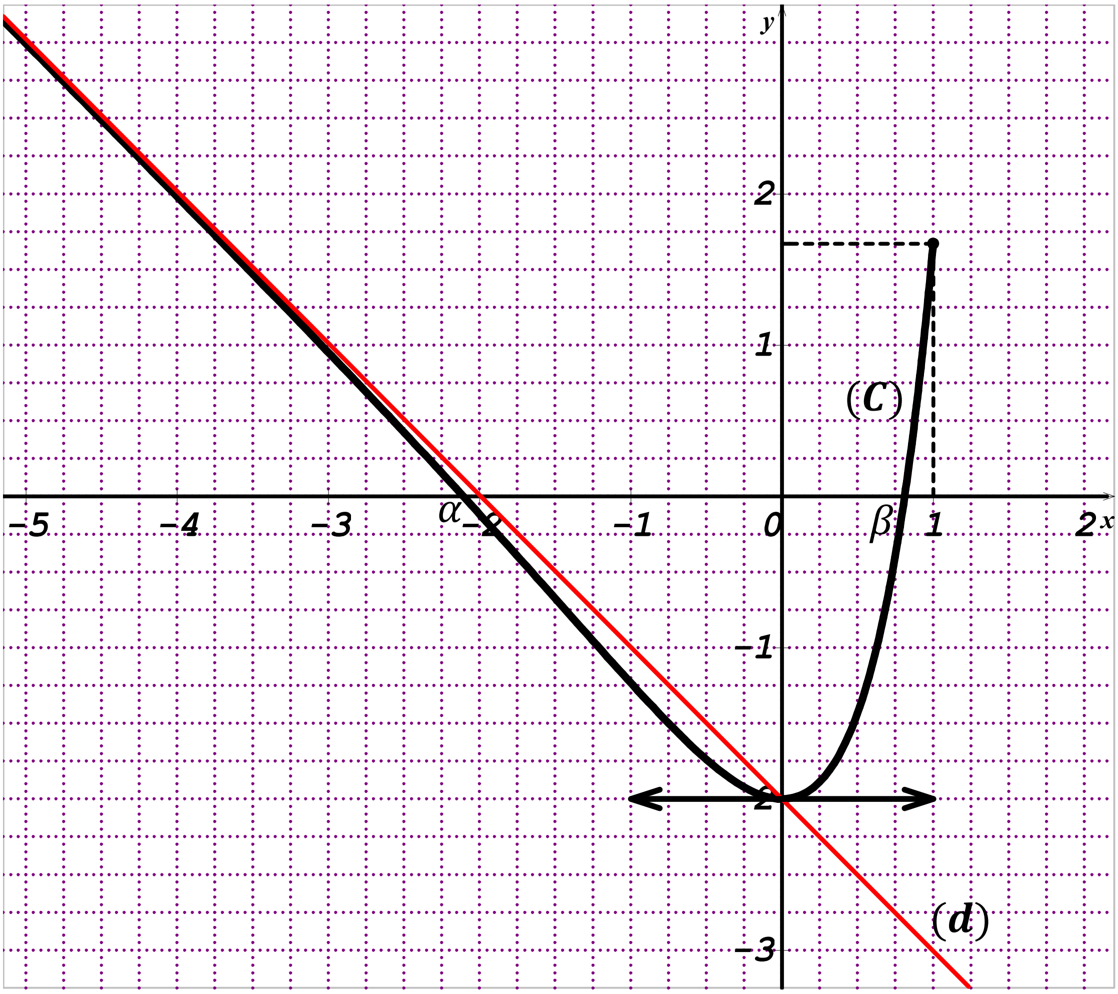
بالنسبة لـ β:

- f **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $]0{,}81;0{,}82[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $[0;+\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(0{,}81) \simeq -0{,}0048 \\ f(0{,}82) \simeq 0{,}0646 \end{cases}$ أي: $f(0{,}81)\times f(0{,}82)<0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً β في المجال $]0{,}81;0{,}82[$.

تفسير النتيجة هندسياً: المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما، α و β.

جـ. رسم المستقيم (d) والمنحنى (C):



3)تعيين دّالة أصلية F للدّالة f على المجال $]-\infty;1]$:

بمأنّ f **مستمرة** على المجال $]-\infty;1]$، فإنّها تقبل **دّوال أصلية** من الشكل

$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}-\frac{1}{2}x^2-2x+c$ (حيث $c\in\mathbb{R}$).

حل التمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x)=(x+1)e^{1-x}$ وَ $D_f=[-1;+\infty[$.

1)تبيان أنّ معادلة (Δ) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي، $y=-x+3$:

معادلة (Δ) من الشكل: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(1)=-1e^{1-1}=-1 \\ f(1)=(1+1)e^{1-1}=2 \end{cases}$، بحيث $f'(x)=1e^{1-x}-e^{1-x}(x+1)=-xe^{1-x}$.

بالتعويض نجد: $y=-(x-1)+2$ إذن: $\boxed{(\Delta): y=-x+3}$.

2)لدينا: $g(x)=-xe^{1-x}+1$ وَ $D_g=[-1;+\infty[$.

أ-دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g:

g قابلة للاشتقاق على المجال $[-1;+\infty[$، ولدينا:

$g'(x) = -1 \times e^{1-x} - e^{1-x} \times (-x) = (x-1)e^{1-x}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-1)$

x	-1 1 $+\infty$
$g'(x)$	- 0 +

إذن: g **متناقصة تماما** على المجال $[-1;1]$، و**متزايدة تماما** على المجال $[1;+\infty[$.

ب-حساب $g(1)$، ثمّ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[-1;+\infty[$:

لدينا: $g(1) = -(1) \times e^{1-1} + 1 = -1 + 1 = 0$

وبالتالي: من أجل كل x من المجال $[-1;+\infty[$، $g(x) \geq g(1)$ أي: $\boxed{g(x) \geq 0}$.

3) لدينا: $h(x) = (x+1)e^{1-x} + x - 3$ و $D_h = [-1;+\infty[$.

أ-نلاحظ أنّه من أجل كل x من المجال $[-1;+\infty[$، $h(x) = f(x) + x - 3 = f(x) - y_{(\Delta)}$،

استنتاج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$:

من جدول تغيّرات الدّالة f لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، وبمأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-3) = +\infty$ فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty}$.

ب-تبيان أنّه من أجل كل x من المجال $[-1;+\infty[$، $h'(x) = g(x)$، ثم استنتاج جدول تغيّرات الدّالة h:

لدينا: $h(x) = f(x) + x - 3$ ومنه: $h'(x) = f'(x) + 1 = -xe^{1-x} + 1 = g(x) \geq 0$

وبالتالي: h **متزايدة تماما** على المجال $[-1;+\infty[$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	-1 1 $+\infty$
$h'(x)$	+ 0 +
$h(x)$	-4 ↗ - - - 0 + + + ↗ $+\infty$

بحيث: $h(-1) = f(-1) + (-1) - 3 = 0 - 4 = -4$.

جـ-التحقّق أنّ المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1;+\infty[$ يُطلب تعيينه:

- h **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $[-1;+\infty[$.
- ولدينا: $\begin{cases} h(-1) = -4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \end{cases}$، أي: $0 \in [-4;+\infty[$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1;+\infty[$

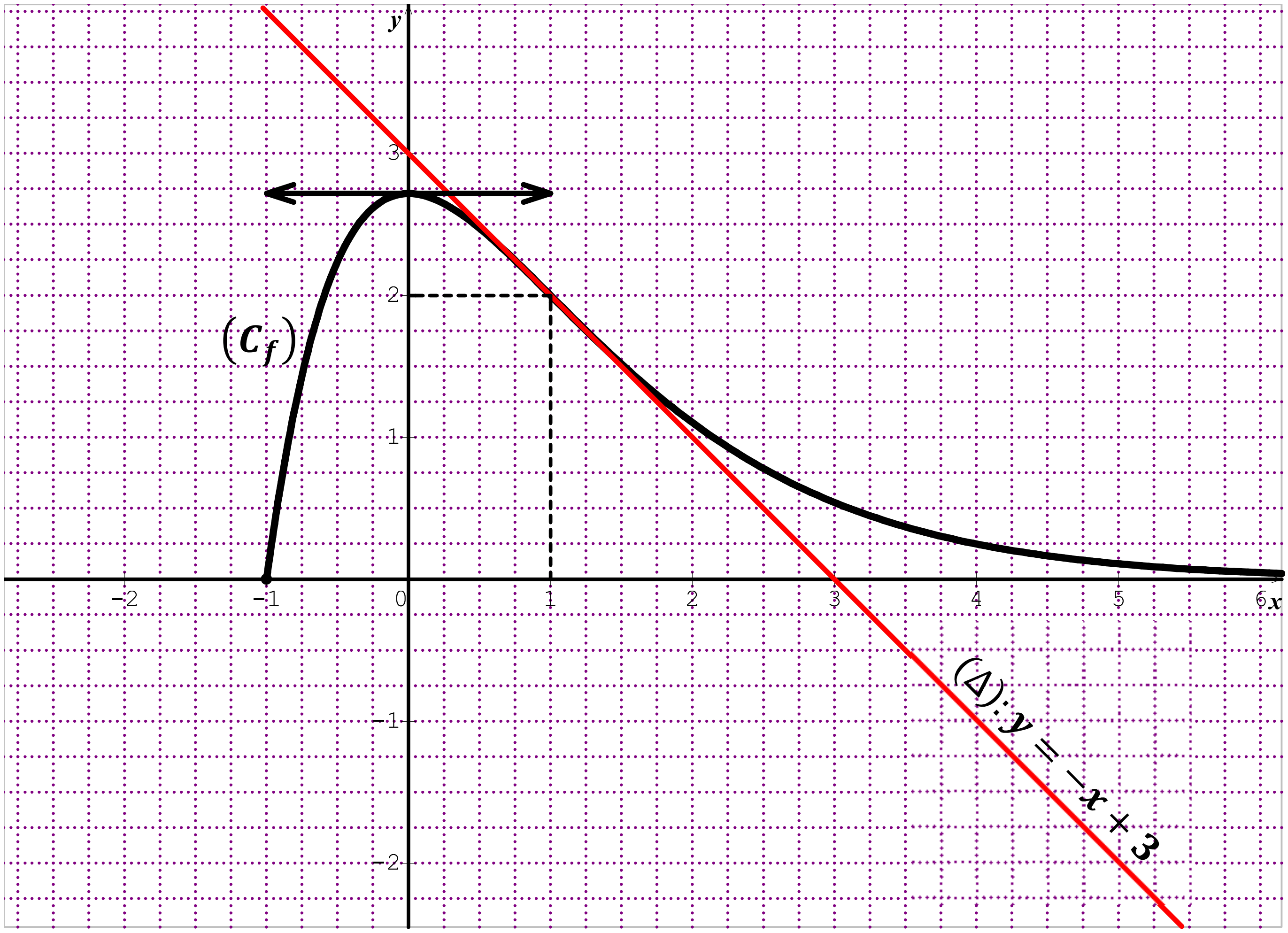
تعيين الحل:

بمأنّ $h(x) = f(x) - y_{(\Delta)}$ فإنّ **فاصلة نقطة التمّاس هي الحل**، وبالتالي: حل المعادلة $h(x) = 0$ هو $\boxed{x = 1}$.

د-تحديد إشارة $h(x)$، ثمّ استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

x	-1 1 $+\infty$
$h(x)$	- 0 +
$f(x) - (-x+3)$	- 0 +
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ) (C_f) يقطع (Δ) (C_f) يقع فوق (Δ)

هـ-إنشاء كلا من المماس (Δ) والمنحنى (C_f):



حل التمرين 04: (07 نقاط بكالوريا 2013// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$ وَ $D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

1-أ) حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$، وتفسير النتيجتين هندسياً:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = -\infty$، وَ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = +\infty$

لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0}(2x - 1) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}}(e^x - 1) = 0^- \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}(e^x - 1) = 0^+ \end{cases}$.

التفسير الهندسي للنتيجتين: حامل محور التراتيب مُقارب لـ(C_f).

ب) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = +\infty$ لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty}(2x - 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty}(e^x - 1) = +\infty \end{cases}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = -\infty$ لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty}(2x - 1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty}(e^x - 1) = -1 \end{cases}$.

2-أ) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$، مُقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right) = 0$ ؛

وَ $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right) = -1$

إذن: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$، **مُقارب مائل** للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) التحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإنّ، $f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x-1}$، ثمّ استنتاج أنّ المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = 2x - 2$، مُقارب للمنحنى (C_f):

لدينا: $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x-1} - \mathbf{1} + \mathbf{1} = 2x - 2 + \frac{1}{e^x-1} + \mathbf{1}$

ومنه: $f(x) = 2x - 2 + \frac{1}{e^x-1} + \frac{e^x-1}{e^x-1} = 2x - 2 + \frac{1+e^x-1}{e^x-1} = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x-1}$ **(وهو المطلوب)**

وعليه: $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (2x - 2)] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}\right) = 1$

وَ $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (2x - 2)] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right) = 0$

إذن: المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = 2x - 2$، **مُقارب مائل** للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

3-تبيان أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، فإنّ $f'(x) = \frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$:

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ وَ $]0; +\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2(e^x-1)^2-e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2(e^{2x}+1-2e^x)-e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2e^{2x}+2-4e^x-e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$$

استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(2e^{2x} - 5e^x + 2)$

بوضع: $X = e^x$ نجد: $2X^2 - 5X + 2$ (مميزه $\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2) = 9 > 0$)

له جدران متمايزان هما، $X' = \frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5+3}{4} = 2$ وَ $X'' = \frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

- من أجل $X = 2$ معناه: $e^x = 2$ نجد: $x = \ln 2$.
- من أجل $X = \frac{1}{2}$ معناه: $e^x = \frac{1}{2}$ نجد: $x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	

إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty; -\ln 2]$ وَ $[\ln 2 ; +\infty[$،

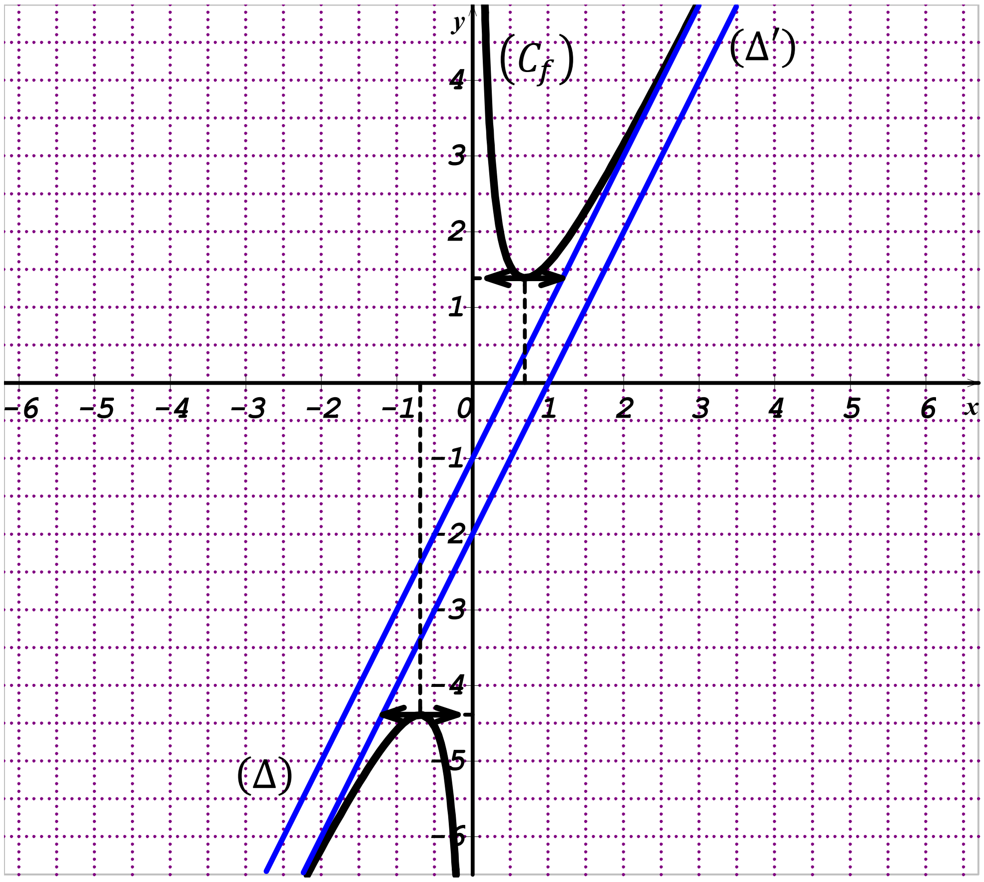
وَ**متناقصة تماما** على المجال $[-\ln 2 ; 0[$ وَ $]0; \ln 2]$، **ويكون جدول تغيراتها كالتالي:**

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-2\ln 2 - 3$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2$	↗	$+\infty$

حيث: $f(\ln 2) = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{e^{\ln 2}-1} = 2\ln 2$،

وَ $f(-\ln 2) = 2(-\ln 2) - 1 + \frac{1}{e^{-\ln 2}-1} = -2\ln 2 - 1 + \frac{1}{\frac{1}{e^{\ln 2}}-1} = -2\ln 2 - 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2\ln 2 - 3$

4-تمثيل بيانيا كلاً من (Δ)؛ (Δ') و (C_f):



5-حساب العدد: $\int_1^2 f(x)dx$، ثمّ تفسيره هندسيا:

لدينا: $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x-1}\right) dx = [x^2 - x + \ln(e^x - 1)]_1^2$

ومنه: $\int_1^2 f(x)dx = [2^2 - 2 + \ln(e^2 - 1)] - [1^2 - 1 + \ln(e^1 - 1)]$

وعليه: $\int_1^2 f(x)dx = 2 + \ln(e^2 - 1) - \ln(e - 1) = 2 + \ln(e - 1)(e + 1) - \ln(e - 1)$

وبالتالي: $\int_1^2 f(x)dx = 2 + \ln(e - 1) + \ln(e + 1) - \ln(e - 1) = [2 + \ln(e + 1)]u.a$

تفسيره هندسيا: هو مساحة الحيّز المستوي المُحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$، $x = 2$ وَ $y = 0$.

حل التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = 6(1 - 2x)e^{-x} + 5$ وَ $D_f = [0; +\infty[$.

I) 1) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ تفسير النتيجة هندسياً: (علماً أنّ $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$)

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (6e^{-x} - 12xe^{-x} + 5) = 5$ لأنّ: $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \end{cases}$.

التفسير الهندسي للنتيجة: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = 5}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ تشكّيل جدول تغيّراتها:

f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$، ولدينا:

$f'(x) = 6[-2e^{-x} + (-e^{-x})(1 - 2x)] = 6e^{-x}(-2 - 1 + 2x) = 6e^{-x}(2x - 3)$.

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2x-3)$ على $[0;+\infty[$.

x	0 $\frac{3}{2}$ $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +

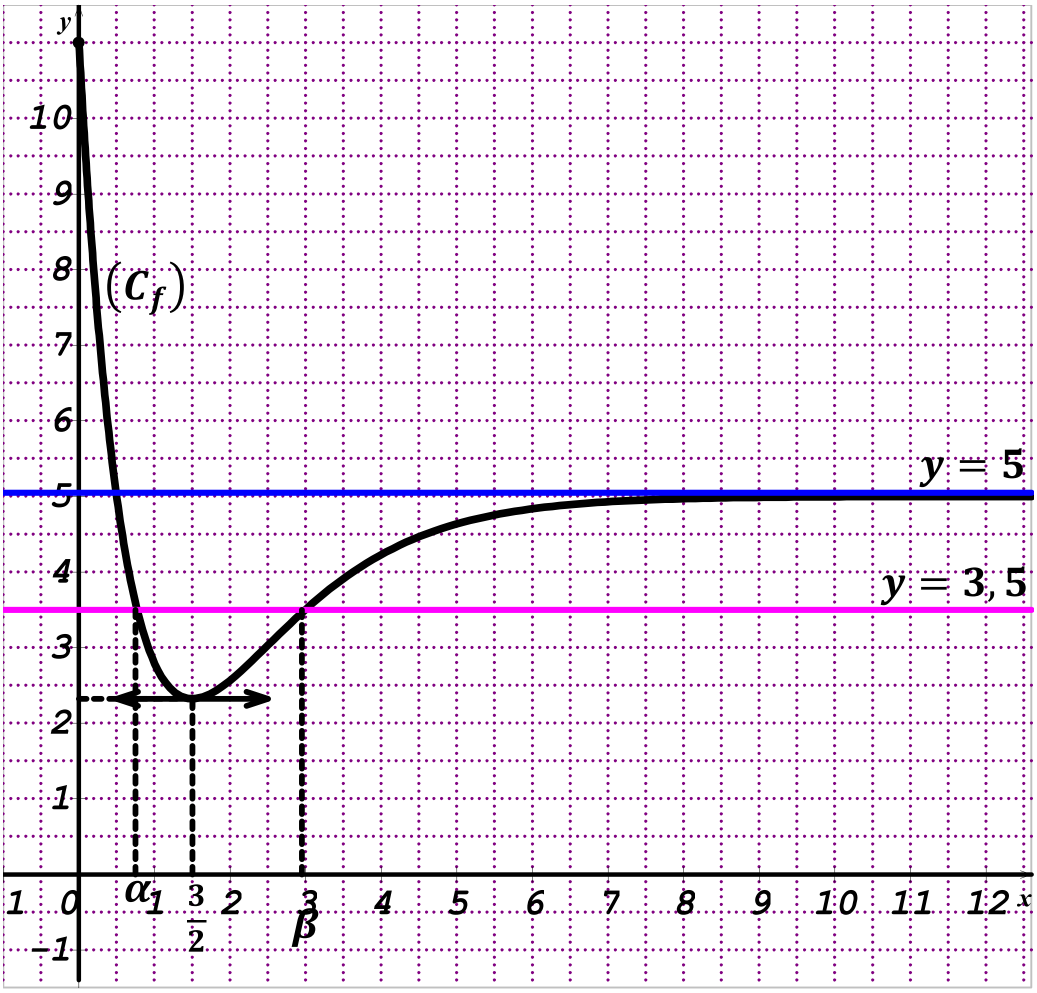
إذن: f **متناقصة تماما** على $\left[0;\frac{3}{2}\right]$، وَ**متزايدة تماما** على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$؛

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	0 $\frac{3}{2}$ $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	11 ↘ $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ↗ 5

حيث $f\left(\frac{3}{2}\right)=-12e^{-\frac{3}{2}}+5$.

3)إنشاء (C_f):



4)أ) تبيان أنّ المعادلة $f(x)=3,5$ تقبل في $[0;7]$ حلين مختلفين α، β حيث: $0,7<\alpha<0,8$ وَ $2,9<\beta<3$:

- **على المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$.**

- الدّالة f **مستمرة** وَ**متناقصة تماما** على المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$،

- ولدينا: $\begin{cases} f(0) = 11 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2.32 \end{cases}$، أي: 3,5 محصور بين $f(0)$ وَ $f\left(\frac{3}{2}\right)$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 3,5$ تقبل في المجال $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ حلاً وحيداً α.

ولدينا من جهة أخرى: $\begin{cases} f(0,7) \simeq 3,8 \\ f(0,8) \simeq 3,39 \end{cases}$، أي: $f(0,8) < 3,5 < f(0,7)$ إذن: $\boxed{0,7 < \alpha < 0,8}$.

- **على المجال** $\left[\frac{3}{2}; 7\right]$.

- الدّالة f **مستمرة** وَ**متزايدة تماما** على المجال $\left[\frac{3}{2}; 7\right]$ (لأنّها **متزايدة تماما** على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$)،

- ولدينا: $\begin{cases} f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2,32 \\ f(7) \simeq 4,93 \end{cases}$، أي: 3,5 محصور بين $f\left(\frac{3}{2}\right)$ وَ $f(7)$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 3,5$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; 7\right]$ حلاً وحيداً β.

ولدينا من جهة أخرى: $\begin{cases} f(2,9) \simeq 3,42 \\ f(3) \simeq 3,5 \end{cases}$، أي: $f(2,9) < 3,5 < f(3)$ إذن: $\boxed{2,9 < \beta < 3}$.

ب) حل بيانياً في المجال $[0; 7]$ المتراجحة، $f(x) \leq 3,5$:

حلول المتراجحة، $f(x) \leq 3,5$ **بيانياً** في المجال $[0; 7]$ هي **فواصل** نقط (C_f) **الواقعة تحت** المستقيم ذو المعادلة $y = 3,5$ **مع فواصل** نقط **التقاطع**؛ من البيان: $\boxed{S = [\alpha; \beta]}$.

5)أ) تعيين العددين الحقيقيين a، b بحيث تكون الدّالة g المعرّفة على $[0; 7]$ بـ: $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ دّالة أصلية للدّالة h المعرّفة على $[0; 7]$ بـ: $h(x) = 6(1 - 2x)e^{-x}$.

g دّالة أصلية للدّالة h على المجال $[0; 7]$ معناه: $g'(x) = h(x) \ldots (*)$

لدينا: $g'(x) = ae^{-x} + (-e^{-x})(ax + b) = (a - b - ax)e^{-x}$

$(*)$ تُصبح $(a - b - ax)e^{-x} = (6 - 12x)e^{-x}$ ومنه: $\begin{cases} a - b = 6 \\ -a = -12 \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} b = 6 \\ a = 12 \end{cases}$

إذن: $\boxed{g(x) = (12x + 6)e^{-x}}$.

ب) استنتاج دّالة أصلية للدّالة f على $[0; 7]$:

بمأنّ: $f(x) = h(x) + 5$ فإنّ: $F(x) = g(x) + 5x$، حيث F **دّالة أصلية** لـ f على المجال $[0; 7]$.

II) الكلفة الهامشية C_M لصناعة كمية x (مقدرة بالطن) من منتوج، حيث x ينتمي إلى المجال $[0; 7]$ تُنمذج بالدّالة f أي: $C_M(x) = f(x)$ (الكلفة مقدرة بملايين الدنانير).

1)تحديد كمية المنتوج بحيث تكون الكلفة الهامشية أقل ما يُمكن، وقيمة هذه الكلفة: (تُدور النتيجة إلى 10^{-2})

لدينا: الدّالة f تقبل قيمة حدية صغرى من أجل $x = \frac{3}{2}$، قيمتها $f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2,32$.

ومنه: كمية المنتوج بحيث تكون الكلفة الهامشية أقل ما يُمكن هي ***1,5*** طن، وقيمة هذه الكلفة هي ***2,32*** مليون دينار.

2)كميات المنتوج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 3,5 مليون دينار:

لدينا: حلول المتراجحة $f(x) \leq 3,5$، في المجال $[0; 7]$ هي x حيث: $x \in [\alpha; \beta]$.

ومنه: كميات المنتوج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية ***3,5*** مليون دينار، هي x حيث: $x \in [\alpha; \beta]$.

3)نُذكّر أنّ دّالة **الكلفة الإجمالية دّالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية**

أ) تبيان أنّ الكلفة الإجمالية C_T معرّفة بـ: $C_T(x) = (12x + 6)e^{-x} + 5x + k$ حيث k عدد حقيقي:

لدينا: $C_T'(x) = 12e^{-x} + (12x + 6)(-e^{-x}) + 5 = (12 - 12x - 6)e^{-x} + 5$

ومنه: $C_T'(x) = 6(1-2x)e^{-x} + 5 = f(x) = C_M(x)$

إذن: الكلفة الإجمالية C_T معرّفة بـ: $C_T(x) = (12x+6)e^{-x} + 5x + k$ حيث k عدد حقيقي.

ب) تحديد قيمة k إذا علماً أنّ المصاريف الثابتة 2 مليون دينار (أي $C_T(0) = 2$):

نضع: $C_T(0) = 2$ نجد: $6 + k = 2$ ومنه: $\boxed{k = -4}$

إذن: قيمة k إذا علماً أنّ المصاريف الثابتة 2 مليون دينار هي -4.

حل التمرين 06: (09 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1} - 3$ و $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

1) أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $f(x) = \frac{4}{e^x+1} - 3$:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1} - 3 = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)} - 3 = \frac{4}{e^x+1} - 3$.

ب) حساب نهاية الدّالّة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$؛ ثمّ تفسّير النتيجتين هندسيا:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{e^x+1} - 3\right) = 4 - 3 = 1$ لأنّ: $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{e^x+1} - 3\right) = -3$ لأنّ: $\lim_{x\to+\infty}(e^x+1) = +\infty$.

التفسير الهندسي للنتيجتين:

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = 1}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ(C_f) عند $-\infty$.

وَالمستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = -3}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ(C_f) عند $+\infty$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدّالّة f ثم تشكّيل جدول تغيراتها:

f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = 4\left(\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}\right) = \frac{-4e^x}{(e^x+1)^2} < 0$

وبالتالي: f **متناقصة تماما** على $\mathbb{R}$، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$1 \searrow -3$

3) أ) ايجاد فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x) = 0$)

$f(x) = 0$ تُكافئ: $\frac{4}{e^x+1} - 3 = 0$

ومنه: $\frac{4-3(e^x+1)}{e^x+1} = 0$

وعليه: $\frac{-3e^x+1}{e^x+1} = 0$

ومنه: $-3e^x + 1 = 0$ وَ $e^x + 1 \neq 0$ إذن: $\boxed{x = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3}$

ب) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $\Omega(0;-1)$:

معادلة (T) من الشكل $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(0) = \frac{-4e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{-4}{4} = -1 \\ f(0) = -1 \quad \text{ترتيب } \Omega \end{cases}$، إذن: $\boxed{(T): y = -x - 1}$.

جـ) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $f(-x) + f(x) = -2$ ثمّ استنتاج أنّ (C_f) يقبل مركز تناظر:

لدينا: $f(x)=\frac{4}{e^{x}+1}-3$ وَ $f(-x)=\frac{4e^{-(-x)}}{e^{-(-x)}+1}-3=\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}-3$

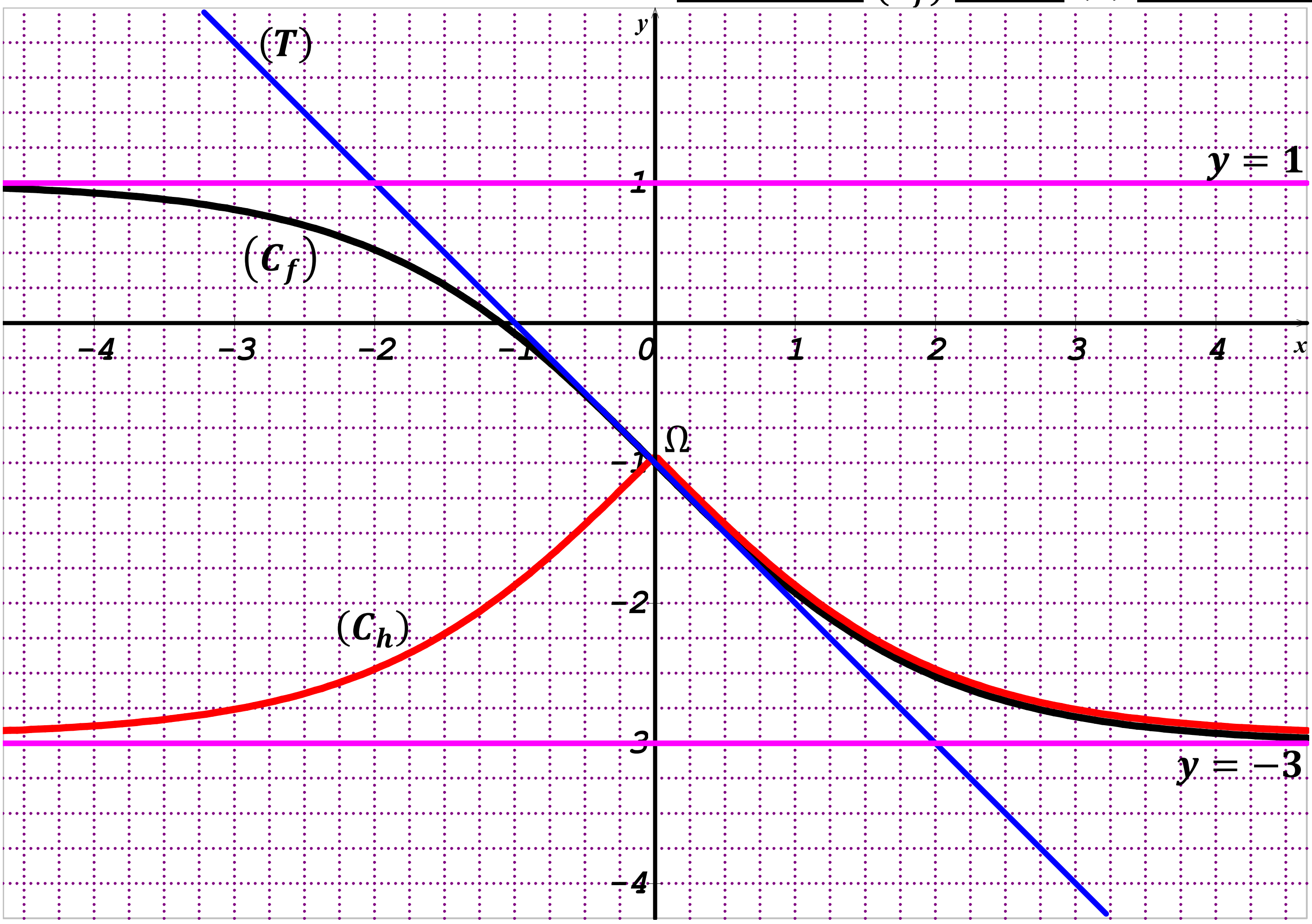
ومنه: $f(-x)+f(x)=\left(\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}-3\right)+\left(\frac{4}{e^{x}+1}-3\right)=\frac{4(e^{x}+1)}{e^{x}+1}-6=4-6=-2$

استنتاج أنّ (C_f) يقبل مركز تناظر:

لدينا: $f(-x)+f(x)=-2$ من الشكل $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ حيث $\alpha=0$ وَ $\beta=-1$.

إذن: النقطة $\Omega(0;-1)$ هي مركز تناظر لـ (C_f).

د) رسم المماس (T) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم:



4) حساب مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=0$، $x=-\ln 3$ و $y=0$:

لتكن A هي مساحة الحيز، نجد: $A=\int_{-\ln 3}^{0}-f(x)dx=\int_{-\ln 3}^{0}\left(\frac{4(-e^{-x})}{e^{-x}+1}+3\right)dx$

ومنه: $A=[4\ln(e^{-x}+1)+3x]_{-\ln 3}^{0}=(4\ln 2)-(4\ln 4-3\ln 3)$

إذن: $\boxed{A=(-4\ln 2+3\ln 3)u.a}$.

5) لدينا: $h(x)=f(|x|)$ وَ $D_h=\mathbb{R}$، و (C_h) منحناها البياني في المعلم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

أ) تبيان أنّ h دالّة زوجية:

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإنّ $-x\in\mathbb{R}$ ولدينا: $h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$.

إذن: h دالّة زوجية.

ب) اعتماداً على المنحنى (C_f)، شرح كيف يتم رسم المنحنى (C_h) ثمّ رسمه في نفس المعلم السابق:

لدينا: $h(x)=f(|x|)=\begin{cases}f(x); x\geq 0\\ f(-x); x\leq 0\end{cases}$، ومنه نستنتج ما يلي:

(C_h) يكون **منطبق** على (C_f) على المجال $[0;+\infty[$، و**نرسم الجزء المتبقي** من (C_h) على المجال $]-\infty;0]$ **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب**، لأنّ: h دالّة زوجية.

حل التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = e^x + 2e^{-x} - 3$ و $D_f = \mathbb{R}$.

اختيار الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة مع التعليل:

1/الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ)،

لأنّ: لدينا: $f(x) = 0$ تُكافئ: $e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$

أي: $e^x + \frac{2}{e^x} - 3$

ومنه: $\frac{e^{2x}+2-3e^x}{e^x} = 0$

وعليه: $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

وبوضع: $\boxed{X = e^x}$ نجد: $X^2 - 3X + 2 = 0$ $(*)$ نحسب المميز Δ: $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$

ومنه: $X' = \frac{3+1}{2} = 2$ وَ $X'' = \frac{3-1}{2} = 1$ وبالعودة إلى الوضع نجد: $e^x = 2$ وَ $e^x = 1$

إذن: $\boxed{S = \{0; \ln 2\}}$.

2/الإجابة الصحيحة هي الإجابة ب)،

التعليل: بمأنّ: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ وَ $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ فإنّ: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

3/الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ)،

التعليل: f **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = e^x - 2e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 2)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(e^{2x} - 2)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

إذن: على المجال $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$ الدّالة f **متزايدة تماماً**.

4/الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ)، التعليل:

لدينا: $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (e^x + 2e^{-x} - 3)dx = \frac{1}{2}[e^x - 2e^{-x} - 3x]_0^2$ إذن: $\boxed{m \simeq 1}$.

حل التمرين 08: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تسيير وا.

لدينا: $f(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x-1}$ و $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1(أ) حساب النهايات، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ وَ $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ وَتفسّير بيانيا النتائج المُحصل عليها:

- لدينا: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x-1}\right) = 1}$ لأنّ: $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ وَ $\lim_{x\to-\infty}(e^x - 1) = -1$
- وَلدينا: $\boxed{\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}0}\left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty}$ وَ $\boxed{\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x-1}\right) = -\infty}$

لأنّ: $\lim_{x\overset{<}{\to}0}(e^x - 1) = 0^-$ وَ $\lim_{x\overset{>}{\to}0}(e^x - 1) = 0^+$ وَ $\lim_{x\to0}(e^x) = 1$.

التفسير البياني للنتائج المُحصل عليها:

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=1}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ(C_f) عند $-\infty$، و**محور التراتيب** مقارب لـ(C_f).

ب) حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$ فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

2)أ) تبيان أنّه من أجل كل x من D_f، $f'(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$:

f **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^x-\left(\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}\right)=\frac{1}{2}e^x+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغيّر الدّالّة f ثمّ تشكّيل جدول تغيراتها:

لدينا: $f'(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}>0$،

إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	**1**	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3)دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=1$:

ندرس إشارة الفرق $f(x)-1$ على D_f.

لدينا: $f(x)-1=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{e^x-1}-1=\frac{e^x(e^x-1)-2-2(e^x-1)}{2(e^x-1)}=\frac{e^x(e^x-1)-2e^x}{2(e^x-1)}=\frac{e^x(e^x-3)}{2(e^x-1)}$

إشارة الفرق $f(x)-1$ من إشارة الجداء $(e^x-3)(e^x-1)$

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
e^x-1		-	‖		+		
e^x-3		-	‖	-	0	+	
$f(x)-1$		+	‖	-	0	+	
الوضع النسبي		(C_f) يقع فوق (Δ)	‖	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

4)تعيين معادلة لـ(T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 3$:

معادلة (T) من الشكل $y=f'(\ln 3)(x-\ln 3)+f(\ln 3)$

لدينا: $\begin{cases} f'(\ln 3)=\frac{1}{2}e^{\ln 3}+\frac{e^{\ln 3}}{(e^{\ln 3}-1)^2}=\frac{9}{4} \\ f(\ln 3)=\frac{1}{2}e^{\ln 3}-\frac{1}{e^{\ln 3}-1}=\frac{2}{2}=1 \end{cases}$، إذن: $\boxed{(T): y=\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}\ln 3+1}$.

5) لدينا: $g(x) = f(x) - \frac{9}{4}(x - \ln 3) - 1$ وَ $D_g =]0; +\infty[$.

نلاحظ أنّ: $g(x) = f(x) - \left(\frac{9}{4}x - \frac{9}{4}\ln 3 + 1\right) = f(x) - y_{(T)}$.

أ) حساب $g(\ln 3)$ واستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x:

لدينا: $g(\ln 3) = f(\ln 3) - \frac{9}{4}(\ln 3 - \ln 3) - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$

بمأنّ g **متزايدة تماماً** على المجال $]0; +\infty[$ وَ $g(\ln 3) = 0$ فإنّ إشارة $g(x)$ هي كالتالي:

x	0		$\ln 3$		$+\infty$
$g(x)$	‖	-	0	+	

ب) دراسة على المجال $]0; +\infty[$ وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T)، ثمّ تفسير ذلك بيانيا:

لدينا: من أجل $x \in]0; \ln 3[$، $g(x) < 0$ أي: $f(x) - y_{(T)} < 0$ إذن: (C_f) يقع **تحت** (T).

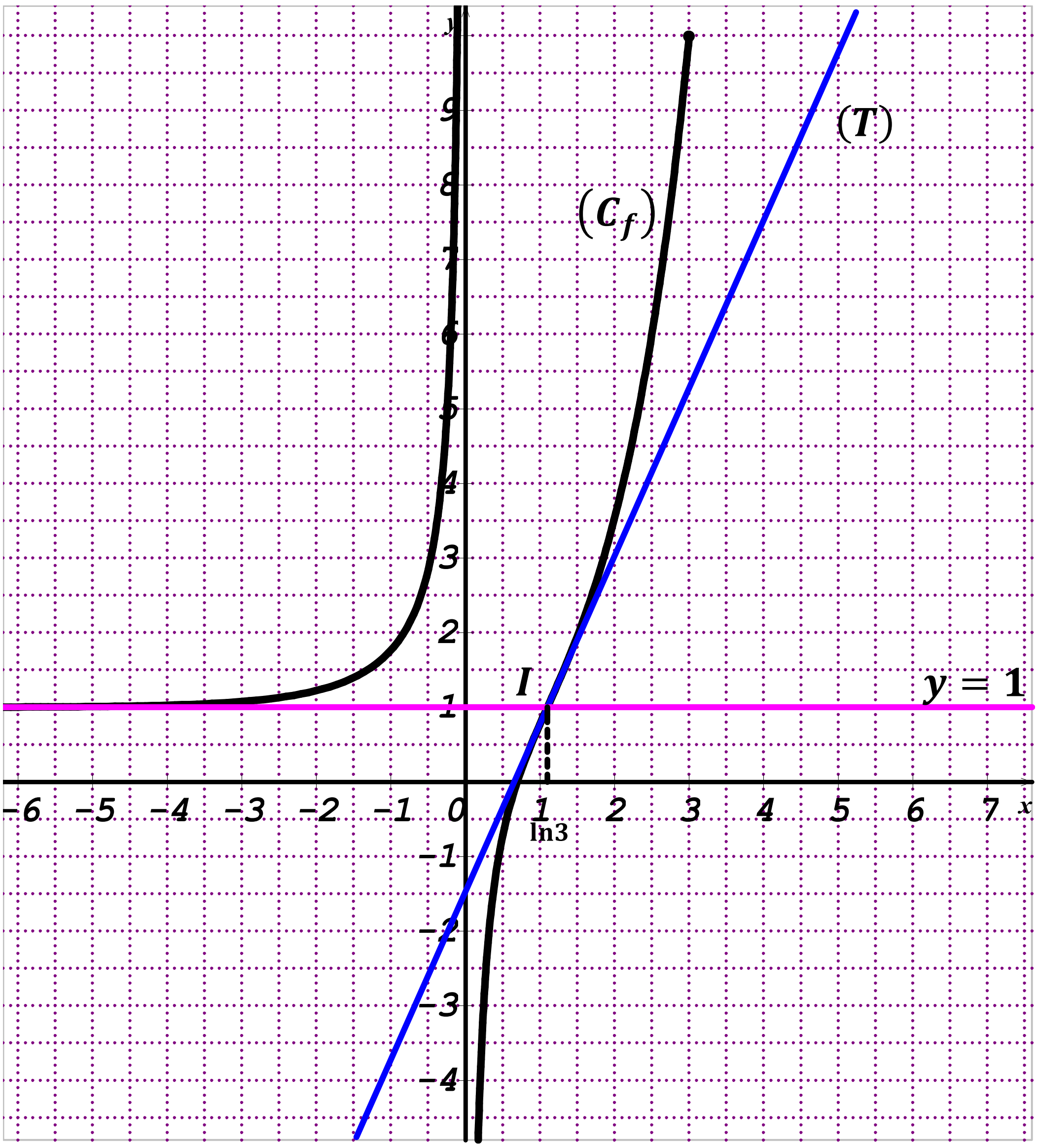
وَمن أجل $x = \ln 3$، $g(x) = 0$ أي: $f(x) - y_{(T)} = 0$ إذن: (C_f) **يقطع** (T).

وَمن أجل $x \in]\ln 3 ; +\infty[$، $g(x) > 0$ أي: $f(x) - y_{(T)} > 0$ إذن: (C_f) يقع **فوق** (T).

التفسير البياني: (C_f) يقبل **نقطة انعطاف** $I(\ln 3 ; 1)$.

6) حساب $f(\ln 2)$ ثمّ رسم المماس (T) وَ (C_f) على المجال $]-\infty; 0[\cup]0; 3]$:

لدينا: $f(\ln 2) = \frac{1}{2}e^{\ln 2} - \frac{1}{e^{\ln 2} - 1} = \frac{2}{2} - \frac{1}{1} = 0$.



حل التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 01// الشعبة: تسيير وإ.

I) لدينا: $g(x) = 2x - 1 - e^{2x}$ وَ $D_g = \mathbb{R}$.

1) دراسة اتجاه تغيّر الدّالّة g:

g **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$، ولدينا: $g'(x) = 2 - 2e^{2x} = 2(1 - e^{2x})$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1 - e^{2x})$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	

إذن: g **متزايدة تماما** على المجال $]-\infty; 0]$ و**متناقصة تماما** على المجال $[0; +\infty[$.

2) استنتاج إشارة $g(x)$:

لدينا: $g(0) = 2(0) - 1 - e^{2(0)} = -2$، بالتالي: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x) \leq g(0)$

أي: $g(x) \leq -2$ إذن: $\boxed{g(x) < 0}$.

II) لدينا: $f(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}e^{2x}$ وَ $D_f = \mathbb{R}$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$، $\|\vec{\imath}\| = 2cm$.

1) حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$: (علماً أنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = +\infty$)

- لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2) = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{2x}) = 0$.
- ولدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \times \frac{e^{2x}}{x^2}\right)\right] = -\infty$ لأنّ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2} \times \frac{e^{2x}}{x^2}\right) = -\infty \end{cases}$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدّالّة f ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

f **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$، ولدينا: $f'(x) = 2x - 1 - e^{2x} = g(x) < 0$.

إذن: f **متناقصة تماما** على $\mathbb{R}$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3) أ) تبيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,25 < \alpha < -0,24$:

- f **مستمرة** و**متناقصة تماما** على المجال $]-0,25; -0,24[$ (لأنّها **متناقصة تماما على** $\mathbb{R}$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(-0,25) \simeq 0,01 \\ f(-0,24) \simeq -0,01 \end{cases}$، أي: $f(-0,25) \times f(-0,24) < 0$.

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,25 < \alpha < -0,24$.

ب) إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A إحداثياها $\left(0; \frac{-1}{2}\right)$:

لدينا: $f''(x) = g'(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	

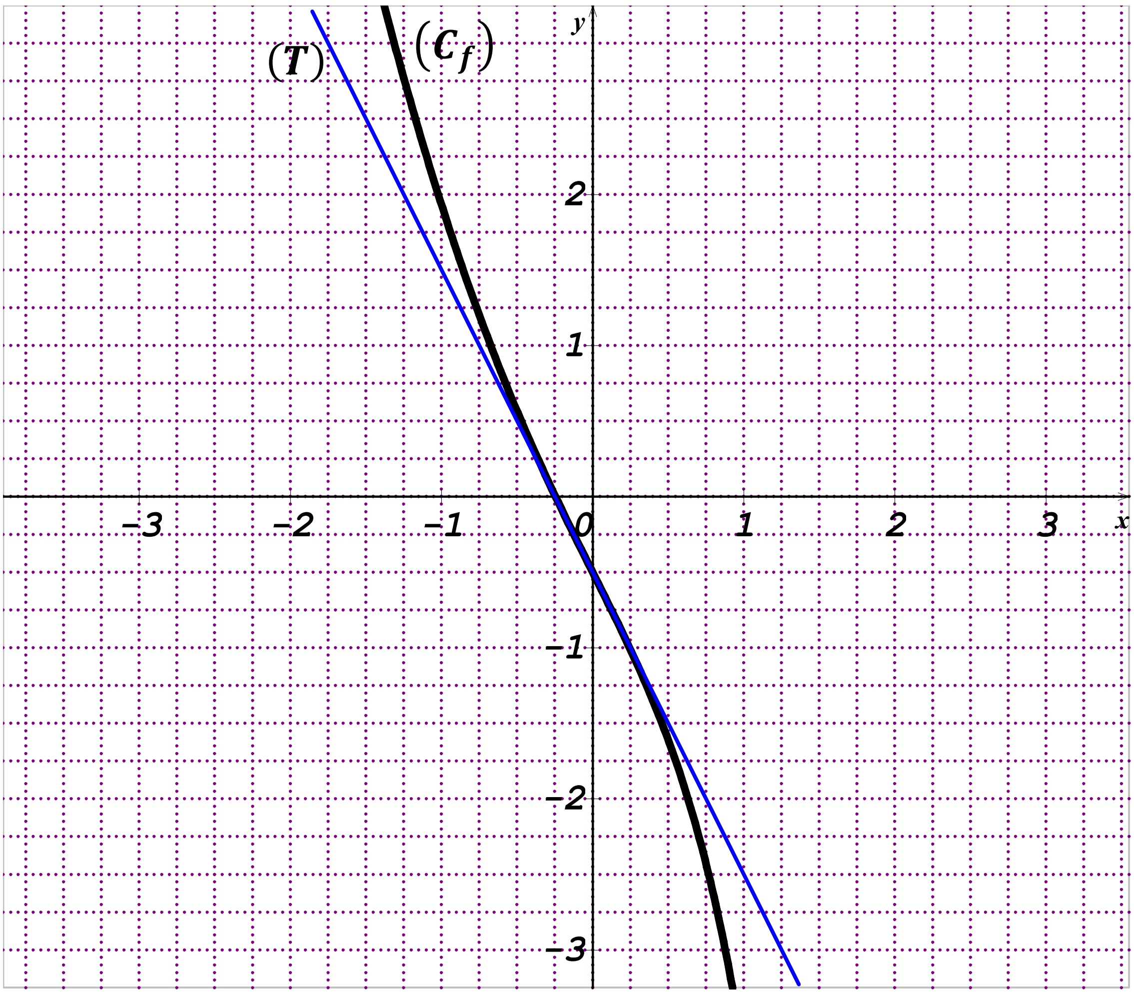
نلاحظ أنّ: $f''(x)$ **انعدمت عند** 0 **مغيرة إشارتها**، إذن: (C_f) يقبل **نقطة انعطاف** $\left(0;f(0)\right)A$، أي: $A\left(0;\frac{-1}{2}\right)$.

جـ) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A:

معادلة (T) من الشكل $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(0)=g(0)=-2 \\ f(0)=-\frac{1}{2} \quad A \text{ ترتيب} \end{cases}$، إذن: $\boxed{(T): y=-2x-\frac{1}{2}}$.

4) رسم (T) وَ (C_f):



5) أ) حساب بالسّنتمتر مربع المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=\alpha$ و $y=0$:

بمأنّ: الدّالة f **مستمرة وسالبة** على المجال $[\alpha\,;0]$ فإنّ:

$$A(\alpha)=\left(\int_\alpha^0 -f(x)d(x)\right)\times 4cm^2=\left(\int_\alpha^0\left(-x^2+x+\frac{1}{2}e^{2x}\right)d(x)\right)\times 4cm^2$$

ومنه: $A(\alpha)=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}e^{2x}\right]_\alpha^0\times 4cm^2=\left(\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{4}e^{2\alpha}\right)\right)\times 4cm^2$

وعليه: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{4}e^{2\alpha}\right)\times 4cm^2=\left(1+\frac{4}{3}\alpha^3-2\alpha^2-e^{2\alpha}\right)cm^2$

ب) التحقّق أنّ $A(\alpha)=\frac{1}{3}(4\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha+3)cm^2$:

لدينا: $f(\alpha)=0$ يعني: $\alpha^2-\alpha-\frac{1}{2}e^{2\alpha}=0$ ومنه: $\alpha^2-\alpha=\frac{1}{2}e^{2\alpha}$ أي: $\boxed{2\alpha^2-2\alpha=e^{2\alpha}}$

وبالتالي: $A(\alpha)=\left(1+\frac{4}{3}\alpha^3-2\alpha^2-e^{2\alpha}\right)cm^2=\left(1+\frac{4}{3}\alpha^3-2\alpha^2-(2\alpha^2-2\alpha)\right)cm^2$

ومنه: $A(\alpha)=\left(1+\frac{4}{3}\alpha^3-2\alpha^2-2\alpha^2+2\alpha\right)cm^2=\left(1+\frac{4}{3}\alpha^3-4\alpha^2+2\alpha\right)cm^2$

إذن: $A(\alpha)=\frac{1}{3}(4\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha+3)cm^2$ (وهو المطلوب).

حل التمرين 10: (08 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) لدينا: $g(x)=2x+6-e^{2x+1}$ وَ $D_g=]-\infty;0]$.

1)أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$:

بمأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+6)=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1}=0$ فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty}$.

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]-\infty;0]$ ثمّ تشكّيل جدول تغيّراتها:

g **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على $]-\infty;0]$، ولدينا: $g'(x)=2-2e^{2x+1}=2(1-e^{2x+1})$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1-e^{2x+1})$ لأنّ: $2>0$

$1-e^{2x+1}>0$ يعني $-e^{2x+1}>-1$ وعليه $e^{2x+1}<1$ ويكون $2x+1<0$ أي: $x<-\frac{1}{2}$

$1-e^{2x+1}=0$ يعني $-e^{2x+1}=-1$ وعليه $e^{2x+1}=1$ ويكون $2x+1=0$ أي: $x=-\frac{1}{2}$

$1-e^{2x+1}<0$ يعني $-e^{2x+1}<-1$ وعليه $e^{2x+1}>1$ ويكون $2x+1>0$ أي: $0\geq x>-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		**0**
$g'(x)$		**+**	0	**-**	

إذن: g **متزايدة تماما** على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$، و**متناقصة تماما** على المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right]$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$		α		$-\frac{1}{2}$		**0**
$g'(x)$		**+**		**+**	0	**-**	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	4	↘	$6-e$

2)أ) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3<\alpha<-2,9$:

- g **مستمرة** و**متزايدة تماما** على المجال $]-3;-2,9[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$)
- ولدينا: $\begin{cases} g(-3)\simeq -0,007 \\ g(-2,9)\simeq 0,192 \end{cases}$ أي: $g(-3)\times g(-2,9)<0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-3<\alpha<-2,9$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;0]$:

x	$-\infty$		α		**0**
$g(x)$		**-**	0	**+**	

II) لدينا: $f(x)=-2x^2-12x+e^{2x+1}$ وَ $D_f=]-\infty;0]$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

حيث الوحدة على محور الفواصل $1cm$ وعلى محور التراتيب $0,5cm$.

1)إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$، $f'(x)=-2g(x)$:

f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]-\infty;0]$، ولدينا:

$$f'(x)=-4x-12+2e^{2x+1}=-2(2x+6-e^{2x+1})=-2g(x)$$

2)استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f على المجال $]-\infty;0]$:

لدينا: $f'(x)=-2g(x)$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

x	$-\infty$		α		0
$f'(x)$		+	0	-	

إذن: f **متزايدة تماما** على المجال $]-\infty;\alpha]$، و**متناقصة تماما** على المجال $[\alpha;0]$.

3)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ تشكيل جدول تغيرات الدّالة f :

بما أنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2-12x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x+1}=0\end{cases}$، فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$.

جدول تغيّرات الدّالة f :

x	$-\infty$		α		0
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	e

4)تبيان أنّ $f(\alpha)=-2\alpha(\alpha+5)+6$:

- لدينا: $f(\alpha)=-2\alpha^2-12\alpha+e^{2\alpha+1}$
- ولدينا من جهة أخرى $g(\alpha)=0$ أي: $2\alpha+6-e^{2\alpha+1}=0$ وعليه: $\boxed{e^{2\alpha+1}=2\alpha+6}$.

وبالتالي: $f(\alpha)=-2\alpha^2-12\alpha+2\alpha+6=-2\alpha^2-10\alpha+6=-2\alpha(\alpha+5)+6$.

اعطاء حصراً للعدد $f(\alpha)$:

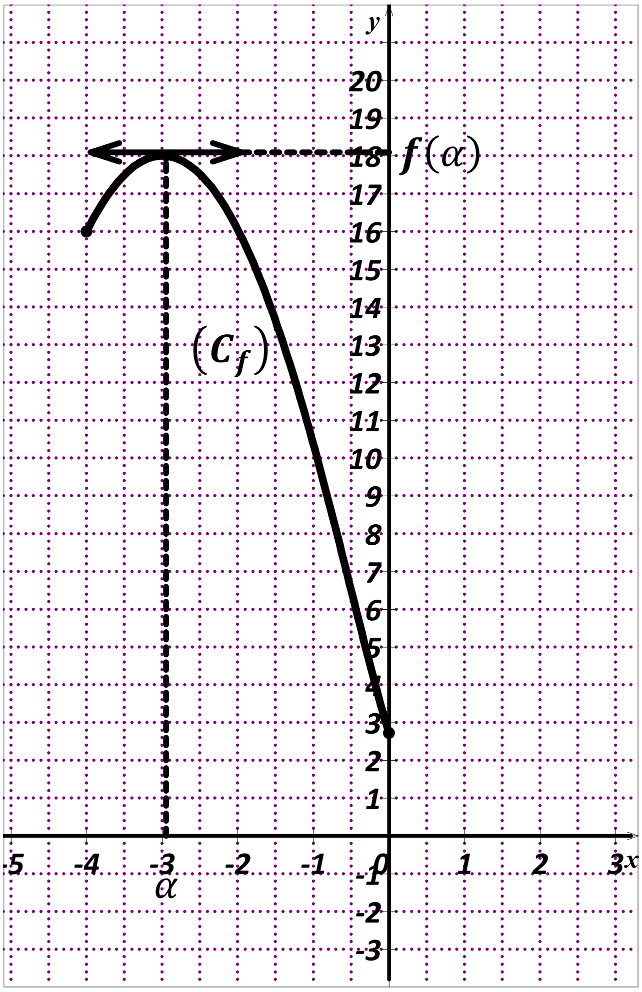
لدينا: $-3<\alpha<-2{,}9$ ومنه: $\begin{cases}5{,}8<-2\alpha<6\\ 2<\alpha+5<2{,}1\end{cases}$

وعليه: $11{,}6<-2\alpha(\alpha+5)<12{,}6$

ويكون: $17{,}6<-2\alpha(\alpha+5)+6<18{,}6$

أي: $\boxed{17{,}6<f(\alpha)<18{,}6}$.

رسم (C_f) على المجال $[-4;0]$:



5)حساب بدلالة α التكامل، $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$ ثمّ تفسير النتيجة بيانيا:

لدينا: $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0}(-2x^2 - 12x + e^{2x+1})dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_{\alpha}^{0}$

ومنه: $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \frac{1}{4}e + \frac{1}{3}\alpha^3 + 3\alpha^2 - \frac{1}{4}e^{2\alpha+1}$

تفسير النتيجة بيانيا: هي **نصف** مساحة الحيز المستو المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = \alpha$؛ $x = 0$ وَ $y = 0$.

حل التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I)لدينا: $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x+1}$ وَ $D_g = [0; +\infty[$.

دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ تبيان أنّه من أجل كل x من $[0; +\infty[$، $g(x) > 0$:

g معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$، ولدينا:

$$g'(x) = -e^{-x+1} + (-e^{-x+1})(1 - x) = e^{-x+1}\big(-1 - (1 - x)\big) = e^{-x+1}(-2 + x)$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x - 2)$ على $[0; +\infty[$.

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

إذن: g **متناقصة تماما** على المجال $[0; 2]$ وَ**متزايدة تماما** على المجال $[2; +\infty[$.

نلاحظ أنّه من أجل كل x من $[0; +\infty[$، $g(x) \geq g(2)$ (لأنّ $g(2) = 1 - \frac{1}{e}$ قيمة حدية صغرى لـg)

أي: $g(x) \geq 1 - \frac{1}{e} > 0$ إذن: $\boxed{g(x) > 0}$.

II) لدينا: $f(x) = x + xe^{-x+1}$ وَ $D_f = [0; +\infty[$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f):

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x(1 + e^{-x+1})\right) = +\infty$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1} = 0$.
- ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} (xe^{-x+1}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e\frac{x}{e^x}\right) = 0$ ، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

إذن: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ **مقارب مائل** للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ): (ندرس إشارة الفرق $(f(x) - x)$)

لدينا: من أجل $x \in [0; +\infty[$ ، $f(x) - x = xe^{-x+1} \geq 0$ إذن: (C_f) يقع **فوق** (Δ) على $[0; +\infty[$.

2) تبيان أنّه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ ، $f'(x) = g(x)$ ثمّ تشكيل جدول تغيّرات للدّالة f :

f **معرفة وقابلة للاشتقاق** على المجال $[0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = 1 + e^{-x+1} + (-e^{-x+1})(x) = 1 + (1 - x)e^{-x+1} = g(x) > 0$$

إذن: f **متزايدة تماما** على $[0; +\infty[$ ، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

3) تبيان أنّ المعادلة $f(x) = 4$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $3,75 < \alpha < 3,77$:

- f **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]3,75; 3,77[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $[0; +\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(3,75) \simeq 3,99 \\ f(3,77) \simeq 4,01 \end{cases}$ ، أي: $f(3,75) < 4 < f(3,77)$.

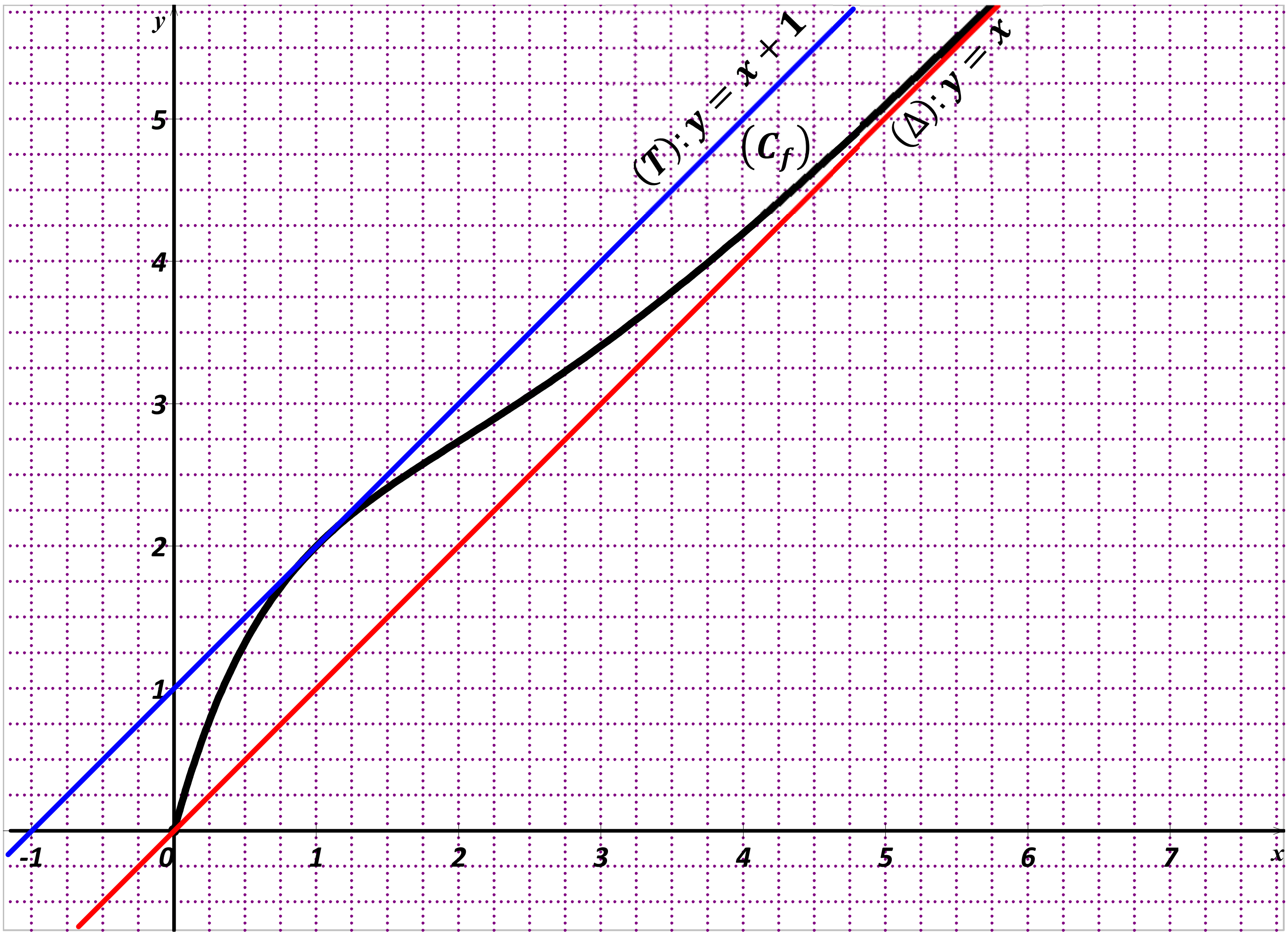
إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 4$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,75 < \alpha < 3,77$.

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة *1*:

معادلة (T) من الشكل $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(1) = g(1) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ ، إذن: $\boxed{(T): y = x + 1}$.

رسم (T) ، (Δ) وَ (C_f):



5) لدينا: F دّالة عددية معرّفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - (x+1)e^{-x+1}$.

أ. تبيان أنّ الدّالة F هي دّالة أصلية للدّالة f على المجال $[0; +\infty[$:

F دّالة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $[0\,; +\infty[$، ولدينا:

$$F(x) = x - [(1)e^{-x+1} + (-e^{-x+1})(x+1)] = x - [(1 - x - 1)e^{-x+1}] = x + xe^{-x+1} = f(x)$$

إذن: F هي دّالة أصلية للدّالة f على المجال $[0; +\infty[$.

ب. ايجاد القيمة المضبوطة للعدد $\int_1^4 f(x)dx$، ثمّ إعطاء تفسيرا هندسيا لهذا العدد:

لدينا: $\int_1^4 f(x)dx = [F(x)]_1^4 = F(4) - F(1)$

ومنه: $\int_1^4 f(x)dx = \left(\frac{1}{2}(4)^2 - (4+1)e^{-4+1}\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 - (1+1)e^{-1+1}\right)$

وعليه: $\int_1^4 f(x)dx = 8 - 5e^{-3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{19}{2} - 5e^{-3}$.

تفسيره الهندسي هو مساحة الحيز المستو المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$؛ $x = 4$ وَ $y = 0$.

6) تُنمذج الكلفة الهامشية C_m لإنتاج كمية q (مقدرة بآلاف الوحدات) حيث $0 \le q \le 7$ بالدّالة f المعرّفة سابقا

أي: $C_m(q) = f(q)$ حيث: $q \in [0; 7]$. (الكلفة الهامشية مقدّرة بملايين الدنانير)

أ. ايجاد كمية المنتوج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 4 ملايين دينار:

لدينا: f **متزايدة تماما** على المجال $[0; 7]$ وَ $f(\alpha) = 4$، **ومنه:** $f(x) \le 4$ إذا وفقط إذا كان $x \in [0; \alpha]$

أي: $C_m(q) \le 4$ إذا وفقط إذا كان $q \in [0; \alpha]$

ب. دّالة الكلفة الإجمالية C_T هي **دّالة أصلية** لدّالة الكلفة الهاشمية.

حساب القيمة المتوسطة للكلفة الإجمالية عندما تنتج الشركة ما بين 1000 وحدة و4000 وحدة:

لدينا: الكلفة الإجمالية C_T هي **دّالة أصلية** لدّالة الكلفة الهاشمية C_m وَالدّالة F هي **دّالة أصلية** لدّالة f وَبمأنّ: $C_m(q) = f(q)$ فإنّ: $C_T(q) = F(q)$، وبالتالي القيمة المتوسطة للكلفة الإجمالية عندما تنتج الشركة ما بين 1000 وحدة و4000 وحدة هي العدد الحقيقي μ حيث

$$\mu = \frac{1}{4-1}\int_1^4 C_m(q)dq = \frac{1}{3}\left[\frac{19}{2} - 5e^{-3}\right] = \frac{19}{6} - \frac{5e^{-3}}{3}.$$