

الطريق الى البكالوريا

عدد التمارين : 105

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

الأستاذ مرنيذ وليد



3 conseils pour devenir bon en maths

Ne pas apprendre, comprendre !

Faire des exercices

Ne pas regarder les solutions

آخر تحديث : 9 جانفي 2022

السنة الدراسية

2022 - 2021

المحتويات

2	I	بطاقة تعريفية للمتتاليات العددية
6	II	تمارين تدريبية
14	III	مواضيع بكالوريات جزائرية
15	1	شعبة علوم تجريبية
30	2	شعبة تقني رياضي
38	3	شعبة رياضيات
44	IV	مواضيع بكالوريات أجنبية
53	V	مواضيع بكالوريات تجريبية لمدارس أشبال الأمة
54	4	شعبة علوم تجريبية
59	5	شعبة رياضيات

القسم 1

بطاقة تعريفية للمتتاليات العددية

المتتاليات العددية

■ إذا كانت جميع الحدود موجبة، نقوم بحساب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

– إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ، إذن المتتالية متزايدة

– إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ ، إذن المتتالية متناقصة

■ باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع، نثبت أنه من أجل كل

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 : n \text{ عدد طبيعي}$$

المتتالية الحسابية

عبارة الحد العام

1. متتالية حسابية (u_n) معرفة:

■ بعدها الأول u_0 أو u_p

■ من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{أو} \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

حيث r هو أساس (u_n)

2. نقول أن المتتالية (u_n) حسابية بعدها الأول u_0 و أساسها

r إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ، الفرق

بين كل حدين متتابعين هو ثابت أي

$$u_{n+1} - u_n = r$$

الوسط الحسابي

إذا كانت a ، b و c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب
حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن: $a + c = 2b$

المجموع

مجموع متتالية حسابية:

■ بعدها الأول u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

■ بعدها الأول u_p

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

حيث: $(n - p + 1)$ عدد حدود المتتالية من u_p حتى u_n .

بصفة عامة

$$S_n = (\text{عدد الحدود}) \times \left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right)$$

طريقة توليد متتالية عددية

يوجد طريقتين لتعريف متتالية عددية:

■ عبارة الحد العام $u_n = f(n)$

■ علاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

التمثيل البياني لمتتالية معرفة بعلاقة

تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

طريقة:

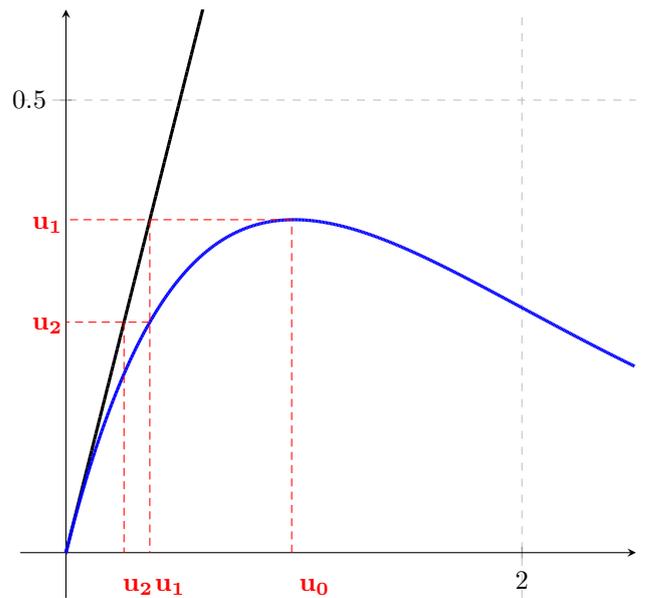
نقوم برسم التمثيل البياني (C_f) للدالة المرفقة بالمتتالية (u_n)

و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

مثال:

لتكن المتتالية u_n معرفة:

بعدها الأول $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$



دراسة اتجاه تغير متتالية عددية

لدراسة اتجاه تغير متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

$u_{n+1} = f(u_n)$ نتبع إحدى الطرق الآتية:

■ ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ (إخراج العامل المشترك و

استعمال جدول الإشارة)

– إذا كان الفرق $u_{n+1} - u_n \geq 0$ إذن المتتالية متزايدة

– إذا كان الفرق $u_{n+1} - u_n \leq 0$ إذن المتتالية

متناقصة.

اتجاه التغير

■ اذا كان $r > 0$ فان المتتالية u_n متزايدة تماما

■ اذا كان $r < 0$ فان المتتالية u_n متناقصة تماما

■ اذا كان $r = 0$ فان المتتالية (u_n) ثابتة

◀ المتتالية الهندسية

عبارة الحد العام

1. متتالية هندسية (u_n) معرفة

■ بعدها الاول v_0 او v_p

■ من اجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = v_p \times r^{(n-p)} \quad \text{أو} \quad v_n = v_0 \times r^n$$

2. نقول ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية حدها الاول v_0

و اساسها $q \neq 0$ اذا فقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

حيث q عدد ثابت يمثل اساس المتتالية.

الوسط الهندسي

اذا كانت a, b, c اعداد حقيقية ماخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فان: $a \times c = b^2$

المجموع

مجموع متتالية هندسية:

■ حدها الاول v_0 :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

■ حدها الاول v_p :

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

حيث: $(n - p + 1)$ عدد حدود المتتالية من v_p حتى v_n .

عدد حدود المتتالية = دليل الحد الاخير - دليل الحد الاول + 1

بصفة عامة

$$S_n = (\text{الحد الاول}) \times \left(\frac{\text{عدد الحدود}}{1 - q} \right)$$

اتجاه التغير

■ اذا كان $q > 1$ ، المتتالية (q^n) متزايدة

■ اذا كان $0 < q < 1$ ، المتتالية (q^n) متناقصة.

ومن اجل متتالية هندسية كيفية، نأخذ بعين الاعتبار الحد الاول v_0

■ اذا كان $v_0 > 0$ ، (v_n) و (q^n) لهما نفس اتجاه التغير

■ اذا كان $v_0 < 0$ ، (v_n) و (q^n) لهما اتجاه تغير متعاكسان

■ اذا كان $q = 1$ او $q = 0$ المتتالية (q^n) ثابتة

■ اذا كان $q < 0$ المتتالية (q^n) غير رتيبة

نهاية متتالية هندسية

■ اذا كان $q > 1$ فان $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ (متباعدة)

■ اذا كان $q = 1$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ (مقاربة)

■ اذا كان $-1 < q < 1$ فان $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ (مقاربة)

■ اذا كان $q \leq -1$ فان النهاية غير موجودة (متباعدة)

◀ كيفية حساب نهاية متتالية عددية

1. متتالية معرفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

لحساب نهاية متتالية نتبع احدى الطرق التالية:

■ الطريقة 1: (متتالية محدودة)

اذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة

من الاعلى $u_n \leq M$ فهي مقاربة نحو عدد حقيقي

$$l \leq M$$

■ اذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة

من الاسفل $u_n \geq m$ فهي مقاربة نحو عدد حقيقي

$$l \geq m$$

■ الطريقة 2:

اذا كانت المتتالية (u_n) مقاربة (الطريقة 1) نحو

عدد حقيقي l و f مستمرة عند l ، اذن l هو حل

$$f(l) = l$$

■ الطريقة 3:

استعمال مبرهنة الحصر في حساب النهايات

■ الطريقة 4:

حساب النهايات باستعمال المقارنة تسمح لنا باثبات

ان المتتالية متباعدة

الحل:

من اجل كل عدد طبيعي n نسبي الخاصية: $P(n) : 0 < u_n < 2$

1. المرحلة 1: (الخاصية الابتدائية)

من اجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 1$ اذن $0 < u_0 < 2$ ومنه $P(0)$ صحيحة

2. المرحلة 2: (الوراثية)

من اجل عدد طبيعي $n > 0$ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ اي $0 < u_n < 2$ ونبرهن ان الخاصية $P(n+1)$ صحيحة اي $0 < u_{n+1} < 2$.
من فرضية التراجع لدينا:

$$0 < u_n < 2$$

$$2 < 2 + u_n < 4$$

$$\sqrt{2} < \sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{4}$$

$$\underline{0 < \sqrt{2} < u_{n+1} < 2}$$

بالتعدي

اي ان الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل $n+1$

3. المرحلة 3: (الاستنتاج)

اذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع و من اجل كل عدد طبيعي n فان: $0 < u_n < 2$

2. متتالية معرفة بعلاقة الحد العام $u_n = f(n)$.

نقوم بحساب نهاية المتتالية (u_n) اي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

■ اذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ فهي متقاربة

■ اذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \mp\infty$ فهي متباعدة.

النهاية اذا وجدت فهي وحيدة. 

متتاليتان متجاورتان

نقول عن متتاليتين (u_n) و (v_n) انهما متجاورتان اذا فقط اذا كان

■ (u_n) متزايدة

■ (v_n) متناقصة

■ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

مبدأ البرهان بالتراجع

يستعمل مبدأ البرهان بالتراجع لاثبات خاصية متعلقة بالاعداد الطبيعية n .
للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من اجل كل عدد طبيعي n يكفي:

1. نتأكد من ان $P(n_0)$ صحيحة من اجل n_0

2. اذا كانت $P(n)$ صحيحة من اجل n اكبر من او يساوي n_0 فان $P(n+1)$ صحيحة من اجل $n+1$

3. اذن الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

تطبيق:

لتكن (u_n) متتالية معرفة بعدها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

• اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$

...

القسم II

تمارين تدريبية

رموز مفتاحية

👁 فكرة تستحق المحاولة

🏠 تمارين للتدرب في المنزل

🎯 تمارين للتعمق

📝 تمارين للتدرب تتضمن افكار اساسية

تمرين رقم 1:



(u_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية بعدها الاول $u_0 = 2$ و بالعلاقة: $u_2 + u_5 = 25$

(1) عين اساس المتتالية الحسابية (u_n) .

(2) اكتب الحد العام u_n بدلالة n .

(3) احسب قيمة الحد الذي رتبته 11.

(4) احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

تمرين رقم 2:



$$\begin{cases} u_0 + u_3 = 6 \\ u_2 + u_5 = 22 \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية حسابية حيث:}$$

(1) اوجد الحد الاول u_0 و الاساس r لهذه المتتالية.

(2) اكتب الحد العام (u_n) بدلالة n .

(3) هل العدد 2013 هو حد من حدود المتتالية؟

(4) ماهي قيمة ورتبة الحد الذي نبدء منه حتى يكون مجموع 20 حدا متتابعا من هذه المتتالية مساويا 1100 ؟

(5) احسب بدلالة n الجداء: $P_n = 2011^1 \times 2011^5 \times 2011^9 \times \dots \times 2011^{4n+1}$.

تمرين رقم 3:

📝 | 🏠 | 🎯 البرهان بالتراجع

(1) برهن بالتراجع على ان من اجل كل عدد طبيعي n : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

(2) استنتج قيمة المجموع: $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 101$.

تمرين رقم 4:

البرهان بالتراجع | ✍ | ©

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ 1. اثبت ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان $u_n > 1$ 2. اثبت ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

تمرين رقم 5:

البرهان بالتراجع | ✍ | ©

 (u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $u_0 = 3$ و من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$
اثبت ان المتتالية (u_n) ثابتة اثبت ان المتتالية

تمرين رقم 6:

البرهان بالتراجع | ✍ | ©

 (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 2$

تمرين رقم 7:

البرهان بالتراجع | ✍ | ©

 (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$
اثبت ان من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$

تمرين رقم 8:

البرهان بالتراجع | ✍ | ©

 α عدد حقيقي ينتمي الى المجال $]0; 1[$ ولتكن المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{(1 + \alpha)u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$$

اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$

تمرين رقم 9:



(u_n) متتالية حسابية متزايدة حدها الاول : $u_1 = -4$ و $u_2^2 + u_3^2 = 37$.

- (1) اوجد r اساس هذه المتتالية.
- (2) اكتب الحد العام (u_n) بدلالة n .
- (3) هل يوجد حد من حدود المتتالية يساوي 486 ؟
- (4) ماهي رتبته؟
- (5) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- (6) اوجد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 282$.

تمرين رقم 10:



(v_n) متتالية حسابية حدها الاول v_1 و

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{4} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 6 \end{cases}$$

- (1) عين الحدود v_1 ، v_2 و v_3 للمتتالية واساسها.
- (2) احسب الحد العام v_n بدلالة n .
- (3) عبر بدلالة n عن المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.
- (4) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = -21$.

تمرين رقم 11:



(u_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{3}{2}$ ومجموع حدودها الثلاثة الاولى u_0 ، u_1 و u_2 يساوي 38.

- (1) احسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2 .
- (2) احسب الحد العام u_n بدلالة n .
- (3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.
ثم استنتج المجموع S_5 (يعطي S_5 على شكل كسر غير قابل للاختزال).

تمرين رقم 12:



(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة بحدها الاول u_0 و الاساس q بحيث: $8u_6 = 125u_9$.

(1) احسب الاساس q . احسب بدلالة u_0 و n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(2) عين u_0 بحيث: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 150$.

(3) نفرض $u_0 = 90$ ، عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق $u_n \leq 10^{-3}$.

تمرين رقم 13:



(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} ب: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 3u_n - 6$

من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n - 3$

(1) بين ان المتتالية (v_n) هندسية، ثم عين اساسها وحدها الاول.

(2) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، ثم استنتج بدلالة n المجموع: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

تمرين رقم 14:



لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0 = \alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

(1) نفرض $\alpha = 3$.

(ا) احسب u_1 ، u_2 و u_3 . ضع تخمينا حول طبيعة المتتالية (u_n) ثم اثبت صحة تخمينك.

(ب) هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

(2) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$

(ا) اثبت ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(ب) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(ج) بين ان المتتالية (u_n) متقاربة محددتا نهايتها.

(د) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) نفرض $\alpha = 6$. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

تمرين رقم 15:



لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \alpha(u_n - 2)$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم.

(1) عين العدد α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n + 4$.

(ا) عين العدد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الاول و اساسها.

(ب) من اجل قيمة α المحصل عليها في السؤال (أ).

- احسب بدلالة n كل من المجموعين: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $T_n = (v_0)^3 + (v_1)^3 + (v_2)^3 + \dots + (v_n)^3$.

تمرين رقم 16:



(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$

(1) احسب الحدود: u_1, u_2, u_3 . (تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال).

(2) (w_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كمايلي: $w_n = \frac{n}{n+1}$

(ا) قارن بين الحدود الاربعة الاولى للمتتالية (u_n) و الحدود الاربعة الاولى للمتتالية (w_n) .

(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = w_n$

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كمايلي: $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(ا) بين ان: $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$

(ب) ليكن S_n المجموع المعرف كمايلي: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

- اكتب S_n بدلالة n ، ثم عين نهاية المجموع S_n لما n يؤول الى $+\infty$.

تمرين رقم 17:



لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كمايلي: $u_0 = 12, v_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$

(1) اثبت ان المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(2) احسب w_n بدلالة n .

(3) اثبت ان المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.

(4) اثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة على \mathbb{N} . و ان المتتالية (v_n) متزايدة على \mathbb{N} .

(5) عين u_n و v_n بدلالة n .

(6) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n .

تمرين رقم 18:



$$(u_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ كمايلي : } \begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = 4u_n \end{cases}$$

(1) احسب الحدود : u_2, u_3, u_4, u_5 . (يطلب كتابة هذه الحدود على الشكل 2^α)(2) (v_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N}^* كمايلي : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$ (ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية معيننا اساسها وحدها الاول.(ب) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n (ج) احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (د) عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق : $u_n > 3.96$

تمرين رقم 19:

(I) (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما و بحيث : $\ln u_3 - \ln u_4 = -1$ و $\ln u_3 + \ln u_4 = 5$ (1) عين اساس المتتالية (u_n) وحدها الاول u_1 (2) اكتب بدلالة n ، ثم احسب الجداء : $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ (II) (v_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* كمايلي : $v_n = \ln u_{n+1} - 2 \ln u_n$ (ا) بين ان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول(ب) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ (ج) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $\ln S_n = 0$

تمرين رقم 20:

(1) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = xe^{-x}$ و ليكن (C) تمثيلها البيانيفي معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (ا) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ (ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.(ج) انشئ المنحني (C)

(د) بين انه من اجل كل عدد حقيقي m من المجال $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين.
 (هـ) حل المعادلة $f(x) = m$ في الحالتين : $m = 0$ و $m = \frac{1}{e}$

$$(2) \begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases} \quad \text{المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي :}$$

(ا) اثبت بالتراجع انه من اجل كل n من \mathbb{N} : $u_n > 0$ اثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة
 (ب) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة ثم عين نهايتها.

$$(3) \quad w_n = \ln u_n \quad \text{المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي :}$$

(ا) اثبت انه من اجل كل n من \mathbb{N} : $u_n = w_n - w_{n+1}$

(ب) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، اثبت ان : $S_n = w_0 - w_{n+1}$

$$(ج) \quad \text{استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

القسم III

مواضيع بكالوريات جزائرية

1

شعبة علوم تجريبية

تمرين رقم 21:

© | ✍ علوم تجريبية - 2021 - الموضوع الأول (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة على \mathbb{N} ب: $u_n = -4n + 3$

(1) بين ان المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين اساسها r وحدها الاول u_0

(2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = -2n^2 + n + 3$

(ب) عين قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = -30132$

(3) المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماما و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \ln(v_n)$

(ا) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

(ب) بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها e^{-4}

(4) من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $S'_n = \ln \left[v_0 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \right] + \ln \left[v_1 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \right] + \dots + \ln \left[v_n \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \right]$

احسب S'_n بدلالة n .

تمرين رقم 22:

© | علوم تجريبية - 2021 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ حيث $u_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{8}(u_n + 5)$

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$

(2) بين ان (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على \mathbb{N} ب: $v_n = 3(3 - u_n)$

(ا) احسب v_0 ثم بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{3}{8}$

(ب) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (3 - u_0) \times (3 - u_1) \times \dots \times (3 - u_n)$

احسب P_n بدلالة n .

تمرين رقم 23:

© | علوم تجريبية - 2020 - الموضوع الأول (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة ب: $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي) ، ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$

(1) نفرض ان $\alpha = -4$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -4$

(2) نفرض ان $\alpha \neq -4$ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية \mathbb{N} ب: $v_n = u_n + 4$

(ا) اثبت ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{3}{4}$

(ب) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثم بين ان المتتالية (u_n) متقاربة

(ج) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

احسب S_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

تمرين رقم 24:

© | علوم تجريبية - 2020 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة ب: $u_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

(1) احسب كلا من u_1 و u_2 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} ب: $v_n = u_n - n + 1$

(ا) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها 3 ، يطلب حساب حدها الاول

(ب) اكتب (v_n) بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + n^2 - n - 3)$

(ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

تمرين رقم 25:

© | علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 13$ و من اجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

(1) (ا) برهن بالتراجع انه: من اجل كل عدد طبيعي n , $u_n > 1$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة.

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} ب: $v_n = \ln(u_n - 1)$

اثبت ان المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(3) اكتب v_n بدلالة n ثم بين انه: من اجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ و احسب عندئذ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n , $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$

تمرين رقم 26:

© | علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

f الدالة المعرفة على المجال $[4; 7]$ ب: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

(1) (ا) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7]$

(ب) استنتج انه: من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فان $f(x) \in [4; 7]$

(2) برهن انه: من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فان $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$

ثم استنتج انه: من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فان $f(x) - x > 0$

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 4$ و من اجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = f(u_n)$

(ا) برهن بالتراجع انه: من اجل كل عدد طبيعي n , $4 \leq u_n < 7$

(ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين انها متقاربة.

(4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n , $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$

(5) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n , $0 < 7 - u_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$, ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 27:

🏠 علوم تجريبية - 2018 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ حيث $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

(1) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$

ب) بين ان (u_n) متتالية متناقصة تماما على \mathbb{N} و استنتج انها متقاربة

(2) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

- اثبت ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الاول

(3) عبر بدلالة n عن u_n و v_n ، واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

تمرين رقم 28:

🏠 علوم تجريبية - 2018 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي : $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

(1) احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = 2n + 1$

ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) احسب المجموعين S_n و T_n حيث :

$$T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}} \text{ و } S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

تمرين رقم 29:

🏠 علوم تجريبية - 2017 - الدورة الاستثنائية. الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر المتتاليتين u_n و v_n المعرفتين على مجموعة الاعداد الطبيعية \mathbb{N} كمايلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

(1) احسب الحدين : u_1 و v_1

(2) ا) اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$

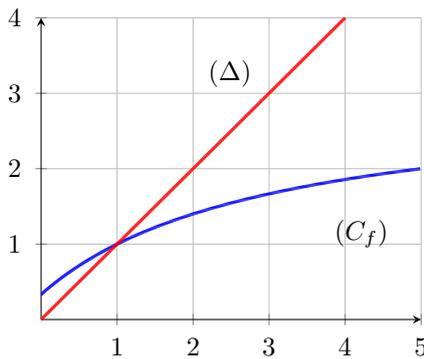
(ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

(3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على \mathbb{N} كمايلي : $w_n = u_n - v_n$
برهن ان المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n

(4) بين ان المتتالية (u_n) و (v_n) متجاورتان

تمرين رقم 30:

علوم تجريبية - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (04 نقاط)



نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$
 α عدد حقيقي موجب، المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بحدها الاول $u_0 = \alpha$ حيث $u_0 = \alpha$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(I) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

(II) نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$

(1) (I) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حساب الحدود)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

(I) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الاول

(ب) عبر بدلالة n عن u_n و v_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \frac{1}{u_{n+2} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$

تمرين رقم 31:

علوم تجريبية - 2017 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الاعداد الطبيعية \mathbb{N} كمايلي :
 $u_0 = \frac{1}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$

(1) (I) برهن بالتراجع ان : من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$

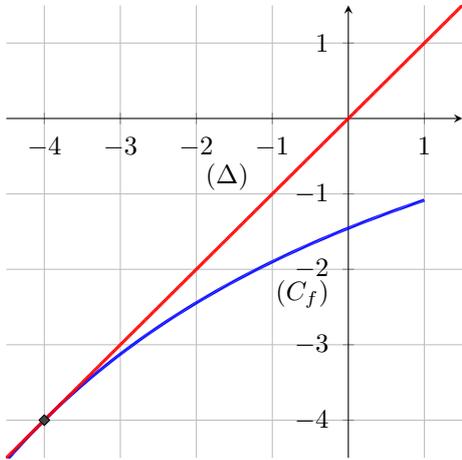
(ب) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة.

(2) (I) بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n

(ب) اثبت ان : من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ثم استنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 32:

🏠 علوم تجريبية - 2017 - الموضوع الثاني (04 نقاط)



المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 f الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x - 16}{x + 11}$ وليكن
 (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

(I) تحقق ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$ ثم بين ان

: من اجل كل $x \in [-4; 1]$ فان $f(x) \in [-4; 1]$

(II) (u_n) متتالية معرفة بحدها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد

$$u_{n+1} = f(u_n), n \text{ طبيعي}$$

(1) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (لا يطلب حساب الحدود) ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

(2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $-4 < u_n \leq 0$

ثم بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

اثبت ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم احسب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$

تمرين رقم 33:

🏠 علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الأول (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0; 4]$ كمايلي : $f(x) = \frac{13x}{9x + 13}$

(1) (ا) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال I

(ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى I

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بحدها الاول $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ ، من اجل كل عدد طبيعي n

(ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 4$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج انها متقاربة

(3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

(4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كمايلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

(ا) برهن ان المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول v_0

(ب) اكتب v_n بدلالة n

$$\text{ج) استنتج ان: } u_n = \frac{52}{36n + 13} \text{ وذلك من اجل كل عدد طبيعي } n, \text{ ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

تمرين رقم 34:

علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الثاني (4.50 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} مجموعة الاعداد الطبيعية بحدها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n :
 $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$ و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n :
 $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

(1) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول v_0

(2) ا) عبر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n

ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

(4) تحقق ان : $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وذلك من اجل كل عدد طبيعي n

(5) استنتج بدلالة n المجموع : $S' = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$

تمرين رقم 35:

علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الأول (05 نقاط)

(I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$: $f(x) = \sqrt{2x + 8}$ (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) ا) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) عين احداثي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له.

(3) ارسم (C) و (Δ).

(II) (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (بدون حسابها) موضحا خطوط الانشاء.

(2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(3) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$.

د) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين رقم 36:

🏠 علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

1. الف الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{5x}{x+2}$

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$

2. المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بحدها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$

(1) (أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) , ثم استنتج انها متقاربة.

(2) (ب) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كمايلي: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

(أ) برهن ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{5}$ يطلب حساب حدها الاول v_0

(ب) اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n)

(د) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S'_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

تمرين رقم 37:

🏠 علوم تجريبية - 2015 - الموضوع الأول (04.5 نقطة)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$

(1) احسب u_1 , u_2 و u_3 .

(2) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$

(3) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل

(4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$

(أ) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

(ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n , ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) بين انه من اجل كل n من \mathbb{N} : $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

تمرين رقم 38:

🏠 علوم تجريبية - 2015 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

المستوى منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(I) الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

(1) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$

(2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$

(3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$

(II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على \mathbb{N} كمايلي :

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(1) (ا) انشئ على حامل محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2 و u_3 ؛ v_0, v_1, v_2 و v_3 دون حسابها.

(ب) خمن اتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

(2) (ا) اثبت انه من اجل كل n من \mathbb{N} : $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث : $\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

(3) (ا) اثبت انه من اجل كل n من \mathbb{N} : $\frac{1}{3}(v_n - u_n) \leq v_{n+1} - u_{n+1}$

(ب) بين انه من اجل كل n من \mathbb{N} : $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(ج) استنتج ان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ ؛ ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n)

تمرين رقم 39:

🏠 علوم تجريبية - 2014 - الموضوع الأول (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي : $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$ ، و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 4$.

(1) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(2) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على \mathbb{N} .

(4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كمايلي : $w_n = 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$.

(ا) بين ان المتتالية (w_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} .

(ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$.

تمرين رقم 40:

🏠 علوم تجريبية - 2014 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

(1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية \mathbb{N} بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2^{-n}}}$

(e هو اساس اللوغاريتم النيبيري).

(1) بين ان (u_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

(ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(2) نضع، من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ، \ln يرمز الى اللوغاريتم النيبيري).

(1) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

(2) (ا) احسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$.

(ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$.

تمرين رقم 41:

علم تجريبية - 2013 - الموضوع الاول (04 نقاط)

(I) المتتالية (v_n) معرفة على \mathbb{N} ب: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

(1) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول.

(2) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة ب: $u_0 = 1$ ، و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

(1) برهن بالتراجع انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$.

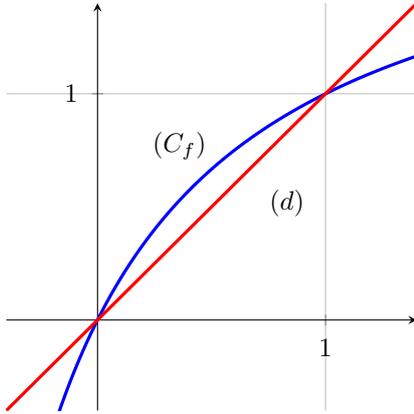
(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) (ا) برهن انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

(ب) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ ، استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين رقم 42:

🏠 علوم تجريبية - 2013 - الموضوع الثاني (04 نقاط)



في الشكل المقابل ، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0; 1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

(1) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بحددها الاول، $u_0 = \frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(ا) اعد رسم هذا الشكل في ورقة الاجابة، ثم مثل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزاً خطوط التمثيل.

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) (ا) اثبت ان الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; 1]$.

(ب) برهن بالتراجع انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) (ا) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كمايلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

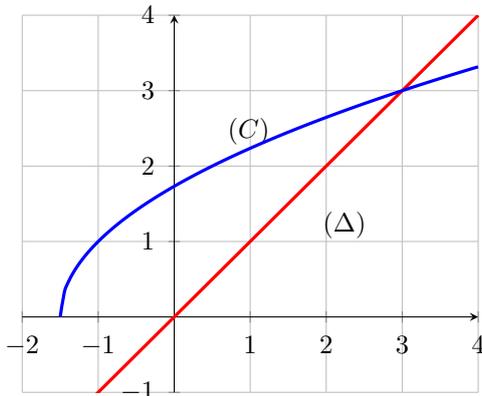
(ب) برهن ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الاول v_0 .

(ب) احسب نهاية (u_n) .

تمرين رقم 43:

🏠 علوم تجريبية - 2012 - الموضوع الأول (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.



(1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كمايلي :

$h(x) = \sqrt{2x + 3}$ ، (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس. (انظر الشكل المقابل).

(ا) اعد رسم الشكل المقابل على ورقة الاجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها و موضحاً خطوط الانشاء)

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها.

(2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

(3) (ا) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ب) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين رقم 44:

🏠 علوم تجريبية - 2012 - الموضوع الثاني (04.5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بعدها الاول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n : 3 < u_n < 4$

(2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$ استنتج ان (u_n) متزايدة تماما.

(3) بر لماذا (u_n) متقاربة.

(4) (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} ب: $v_n = \ln(u_n - 3)$

(ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الاول.

(ب) اكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n : P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$

اكتب P_n بدلالة n ، ثم بين ان $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$

تمرين رقم 45:

🏠 علوم تجريبية - 2011 - الموضوع الأول (03 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = -1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 3u_n + 1$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الاتية اقترحت ثلاث اجابات، اجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدها مع التعليل.

(1) المتتالية (v_n) :

(أ) حسابية (ب) هندسية (ج) لا حسابية ولا هندسية

(2) نهاية المتتالية (u_n) هي :

(أ) $+\infty$ (ب) $-\frac{1}{2}$ (ج) $-\infty$

(3) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n : S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2 \ln 3} + e^{3 \ln 3} + \dots + e^{n \ln 3}]$

(أ) $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ (ب) $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$ (ج) $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

تمرين رقم 46:

🏠 علوم تجريبية - 2011 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} ب: $u_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

$$v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1} \text{ : } n \text{ عدد طبيعي}$$

(1) ا بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها α

(ب) اكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n .

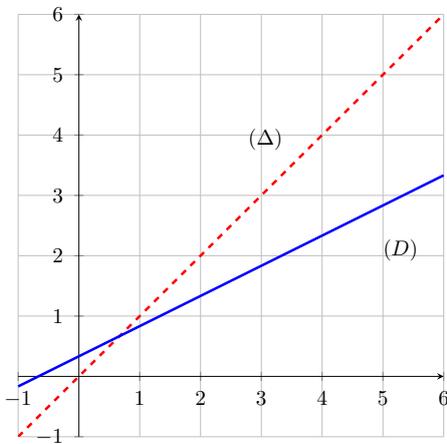
(ج) عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من اجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

$$(2) \text{ نضع } \alpha = \frac{3}{2}$$

- احسب بدلالة n ، المجموعين T_n و S_n : حيث $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

تمرين رقم 47:

🏠 علوم تجريبية - 2010 - الموضوع الثاني (05 نقاط)



في المستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

(1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} ب: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n: u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

(ا) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية

u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

(ب) عين إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .

(ج) أعط تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) (ا) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n \geq \frac{2}{3}$

(ب) إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

(ا) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

(ب) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، وإستنتج عبارة u_n بدلالة n .

(ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، ثم إستنتج المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

تمرين رقم 48:

🏠 علوم تجريبية - 2009 - الموضوع الاول (03.5 نقطة)

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} كمايلي: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

المتتالية (v_n) معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) أحسب v_0 و v_1

(2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

- (3) (أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.
- (ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] + 1$.
- (ج) بين أن (u_n) متقاربة.

تمرين رقم 49:

🏠 علوم تجريبية - 2009 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

(1) (أ) أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و إستنتج الحد الأول u_1 .

(ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(ج) أحسب S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

(2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$.

(أ) أحسب v_2 و v_3 .

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

(ج) أكتب w_n بدلالة n ثم إستنتج v_n بدلالة n .

تمرين رقم 50:

🏠 علوم تجريبية - 2008 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1; 2]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$.

(أ) بين أن الدالة f متزايدة على I .

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

(2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$.

(ب) عين النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين رقم 51:

🏠 علوم تجريبية - 2008 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة كما يلي: } u_0 = \frac{5}{2} \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$$

(1) (ا) أرسم في معلم متعامد متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) , المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

(ب) باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود: u_4, u_3, u_2, u_1, u_0 .

(ج) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية u_n و تقارمها.

(2) (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq 6$

(ب) تحقق أن (u_n) متزايدة.

(ج) هل (u_n) متقاربة؟ برر إجابتك.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = u_n - 6$

(ا) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2

شعبة تقني رياضي

تمرين رقم 52:

🏠 تقني رياضي - 2021 - الموضوع الأول (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الاول $u_0 = 3$ حيث: $u_{n+1} = \frac{7}{9}u_n + 1$ ، n ومن اجل كل عدد طبيعي n ،

$$(1) \quad (a) \quad \text{برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_n < \frac{9}{2}$$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة.

$$(2) \quad \text{المتتالية العددية } (v_n) \text{ معرفة على } \mathbb{N} \text{ ب: } v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$$

(ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{7}{9}$ ثم احسب حدها الاول

(ب) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

$$(ج) \quad \text{استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_n = -\frac{3}{2} \left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2}, \quad \text{ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$(3) \quad \text{احسب بدلالة العدد الطبيعي } n \text{ المجموع } S_n \text{ حيث: } S_n = \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \dots + \frac{1}{3}u_n$$

تمرين رقم 53:

🏠 تقني رياضي - 2021 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة ب: $u_0 = 3 + e^{-2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n^2 - 6u_n + 12$

$$(1) \quad (a) \text{ تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = (u_n - 3)^2 + 3$$

(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n , $3 < u_n < 4$

$$(2) \quad (a) \text{ ادرس اتجاه تغير المتتالية } (u_n)$$

(ب) استنتج ان (u_n) متقاربة

$$(3) \text{ المتتالية العددية } (v_n) \text{ معرفة على } \mathbb{N} \text{ ب: } v_n = \ln(u_n - 3)$$

(a) بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها 2 يطلب حساب حدها الاول

(ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 3 + e^{(-2^{n+1})}$

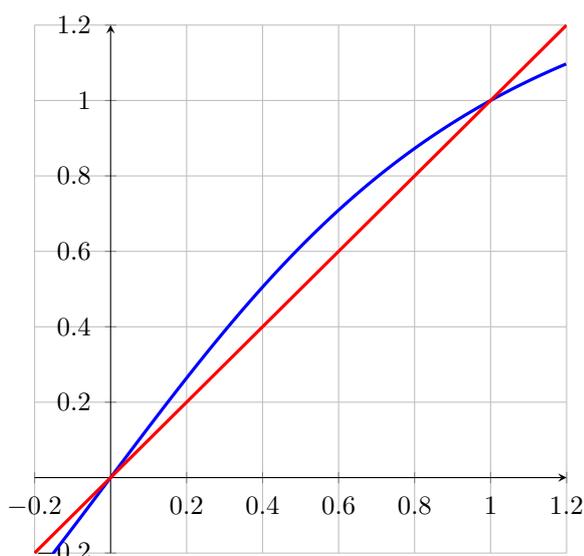
$$(ج) \text{ احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$(4) \text{ نضع من اجل كل عدد طبيعي } n: P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$$

احسب P_n بدلالة n

تمرين رقم 54:

🏠 تقني رياضي - 2020 - الموضوع الأول (04 نقاط)



الدالة العددية f معرفة و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ب:
 $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى
المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة
 $y = x$

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الاول u_0 حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$
ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) (a) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور
الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 مبرزا خطوط
الانشاء

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

$$(2) \quad (a) \text{ برهن انه من اجل كل عدد طبيعي } n: \frac{1}{2} \leq u_n < 1$$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج انها متقاربة

$$(3) \text{ المتتالية العددية } (v_n) \text{ معرفة على } \mathbb{N} \text{ ب: } v_n = \frac{u_n^2}{1 - u_n^2}$$

برهن ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{9}{5}$ يطلب تعيين حدها الاول v_0

$$(4) \quad (a) \text{ اكتب عبارة } v_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم استنتج عبارة } u_n \text{ بدلالة } n$$

(ب) احسب نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 55:

🏠 تقني رياضي - 2020 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الأول u_0 حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 2}$

(1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n < 2$

(2) (ا) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2}$

(ب) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على \mathbb{N} ب: $v_n = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$ ، حيث α عدد حقيقي

(ا) اوجد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{4}$ ، ثم احسب حدها الأول v_0

(ب) بين عندئذ انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2 \times 4^n - 1}{4^n + 1}$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 56:

🏠 تقني رياضي - 2018 - الموضوع الأول (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{2x}{e \cdot x + 1}$ (e اساس اللوغاريتم النيبيري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{5}{4e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) (ا) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$

(ب) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{e \cdot u_n (\frac{1}{e} - u_n)}{e \cdot u_n + 1}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برر انها متقاربة.

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي: $v_n = \frac{e \cdot u_n}{e \cdot u_n - 1}$

اثبت ان (v_n) متتالية هندسية اساسها 2، يطلب تعيين حدها الأول v_0 و عبارة v_n بدلالة n

(3) (ا) تحقق انه من أجل كل n من \mathbb{N} : $v_n = 1 + \frac{1}{e \cdot u_n - 1}$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

تمرين رقم 57:

🏠 تقني رياضي - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب: $u_1 = \frac{1}{a}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{an} u_n$ ، حيث a عدد حقيقي اكبر من او يساوي 2.

(1) (ا) بين ان: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n > 0$.

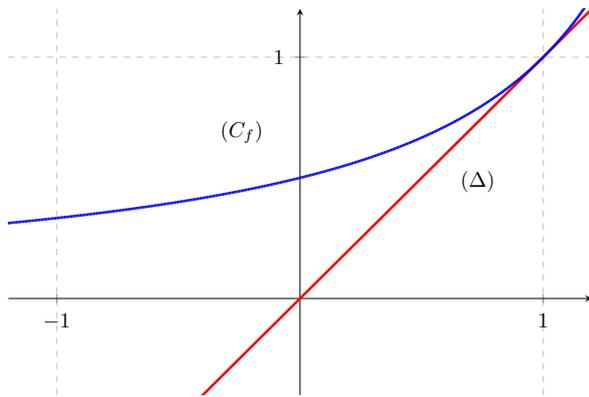
(ب) بين ان المتتالية u_n متناقصة تماما ثم استنتج انها متقاربة.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \frac{1}{an} u_n$

- (ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{a}$ و عين حدها الاول v_1 بدلالة a .
- (ب) جد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (3) احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \dots + \frac{1}{n}u_n$ ثم عين قيمة a حيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2016}$

تمرين رقم 58:

🏠 تقني رياضي - 2017 - الموضوع الأول (04 نقاط)



نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty; 1]$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{2-x}$$

تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$

المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول u_0 حيث $u_0 = -1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 مبرزاً خطوط التمثيل، ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع ان: من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة.

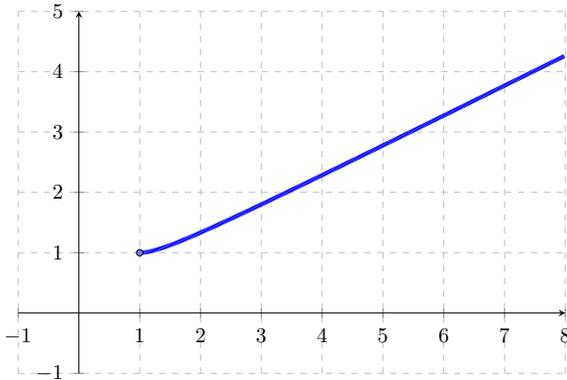
(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{2}{1-u_n}$

(ا) برهن ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها 2 ثم عين عبارة حدها العام v_n بدلالة n

(ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 59:

🏠 تقيي رياضي - 2016 - الموضوع الثاني (05 نقاط)



نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ:
 $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى
 المعمل المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، الشكل المقابل

(1) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $u_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(ا) انقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الاربعة الاولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضخا خطوط الانشاء.

(ب) اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(ج) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$

(د) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(هـ) برر تقارب المتتالية (u_n)

(3) نعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على \mathbb{N} على \mathbb{N} بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

(ا) برهن ان (w_n) متتالية هندسية اساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الاول.

(ب) اكتب w_n بدلالة n ثم v_n بدلالة n

(ج) بين ان: $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

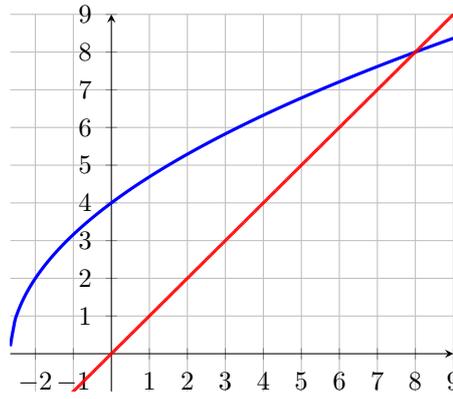
(4) احسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \dots + \frac{1}{w_n}$

تمرين رقم 60:

📐 تقيي رياضي - 2015 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحده الاول: $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

(1) h الدالة المعرفة على $\left[-\frac{8}{3}; +\infty\right[$ بمايلي: $h(x) = \sqrt{6x + 16}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (انظر الشكل)



- (ا) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء)
 (ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها

(1) (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n: 0 \leq u_n \leq 8$

(ب) بين انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(8 - u_n)(u_n + 2)}{\sqrt{6u_n + 16} + u_n}$

(ج) استنتج اتجاه تغير (u_n)

(2) (ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n: 0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n: 0 < 8 - u_n \leq 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 61:

🏠 تقني رياضي - 2014 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(I) f هي الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ ب: $f(x) = x - \ln(x - 1)$

(1) حدد حسب قيم x ، اشارة $f(x) - x$

(2) (ا) عين اتجاه تغير f

(ب) بين انه اذا كان $x \in [2; e + 1]$ فان $f(x) \in [2; e + 1]$

(II) (u_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} كمايلي: $u_0 = e + 1$ و من اجل كل n من \mathbb{N} ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل n من \mathbb{N} ، $u_n \in [2; e + 1]$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم احسب نهايتها.

تمرين رقم 62:

🏠 تقني رياضي - 2014 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

f هي دالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$

ادرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج اشارة $f(x)$.

(u_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} كمايلي : $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n من \mathbb{N} : $u_{n+1} = 5^4 \left(u_n + \frac{9}{16} \right) - \frac{9}{16}$

$$(1) \text{ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي } n, u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$$

(2) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، فان u_n عدد طبيعي.

(3) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

تمرين رقم 63:

🏠 تقني رياضي - 2013 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي :

$$u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}} : n \text{ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n, u_0 = e^2$$

$$v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2} : n \text{ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n, v_0 = \frac{1}{2}$$

(1) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الاول.

(2) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n ، حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(4) احسب بدلالة n الجداء P_n ، حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

تمرين رقم 64:

🏠 تقني رياضي - 2011 - الموضوع الأول (05 نقاط)

$$u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} : n \text{ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n, u_0 = 1$$

(1) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثم استنتج ان : $u_n > 1$

(2) ادرس اتجاه تغير (u_n) ثم بين انها متقاربة ، احسب نهاية (u_n)

(3) ليكن الجداء p_n المعرف كمايلي : $p_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ ، اثبت بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان : $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$

(4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كمايلي : $v_n = \ln u_n$ حيث دالة اللوغاريتمية النيبيري عبر بدلالة p_n عن S_n حيث : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ثم احسب نهاية S_n لما يتلتهي الى $+\infty$

تمرين رقم 65:

🏠 تقني رياضي - 2008 - الموضوع الأول (07 نقاط)

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2} \text{ نعتبر الدالة العددية } f \text{ المعرفة على المجال } [0; 2] \text{ بالعبارة}$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2]$

(ب) انشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة على المحورين $4cm$)

(ج) برهن انه اذا كان $x \in [0; 2]$ فان $f(x) \in [0; 2]$

(2) نعرف المتتالية العددية (u_n) على \mathbb{N} كالآتي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(ا) برر وجود المتتالية (u_n) . احسب الحدين u_1 و u_2

(ب) مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$

(ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها انطلاقا من التمثيل السابق.

(3) (ا) برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n ان : $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

(ب) برهن انه مهما يكن العدد الطبيعي n فان : $u_{n+1} > u_n$

ماذا تستنتج بالنسبة الى تقارب (u_n) ؟

(ج) تحقق ان : $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2}(u_n - \sqrt{3})$ من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

عين عددا حقيقيا k من $]0; 1[$ بحيث : $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k|u_n - \sqrt{3}|$

بين انه من اجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}|$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 66:

🏠 تقني رياضي - 2008 - الموضوع الثاني (08 نقاط)

(1) الدالة العددية المعرفة على $]-2; +\infty[$ كماياتي : $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$

(C_f) منحنى f في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الاطوال $2cm$)

(ا) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف.

(ب) ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) بين ان المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب للمنحنى (C_f) ثم ارسم (C_f) و (D)

(د) بين ان صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الاول $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = f(u_n)$

(ا) باستخدام (C_f) و المستقيم ذي المعادلة $y = x$ ، مثل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل (ox) .

(ب) خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)

(ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ و ان المتتالية (u_n) متزايدة.

(د) استنتج ان (u_n) متقاربة و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3

شعبة رياضيات

تمرين رقم 67:

رياضيات - 2021 - الموضوع الاول (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = -\frac{3}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{11u_n + 4}{-4u_n + 1}$

$$(1) \quad (a) \text{ تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي } n: u_{n+1} = -\frac{11}{4} + \frac{27}{4(-4u_n + 1)}$$

(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < -1$

(ج) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج انها متقاربة.

(2) المتتالية العددية (v_n) معرفة من اجل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

(ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها 3 ثم احسب حدها الاول.

(ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2 + 4 \times 3^n} - 2$

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{u_n + 2} - 2 = -v_n$

(4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \ln\left(\frac{3}{u_0 + 2} - 2\right) + \ln\left(\frac{3}{u_1 + 2} - 2\right) + \dots + \ln\left(\frac{3}{u_n + 2} - 2\right)$

احسب S_n بدلالة n .

تمرين رقم 68:

رياضيات - 2021 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2}$

(1) (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة.

(2) المتتالية العددية (v_n) معرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = u_n^2 - 4$

(ا) بين المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الاول

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$

(ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{n \times 2^{n+2} + 3}{2^n} - 2$

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(2^n; 3 + n \times 2^{n+2})$

(ج) استنتج ان: $PGCD(2^n; 3 + n \times 2^{n+2})$

(د) جد قيمة العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون: $S_n = \frac{83}{8}$

تمرين رقم 69:

رياضيات - 2020 - الموضوع الاول (04 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على المجال $[1; 4]$ بـ: $f(x) = \frac{4x + 4}{9 - x}$

(1) (ا) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1; 4]$

(ب) اثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; 4]$ فان: $f(x) \in [1; 4]$

(2) المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الاول $u_0 = 2$ حيث: $u_0 = 2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 4$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج انها متقاربة

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ، كمايلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 4}$

(ا) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

(ب) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) المجموع S_n معرف بـ: $S_n = v_0 + 8v_1 + 8^2v_2 + \dots + 8^n v_n$. احسب S_n بدلالة n

تمرين رقم 70:

رياضيات - 2020 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على \mathbb{N} بـ:

$$(\alpha \text{ عدد حقيقي }) \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1 - 3\alpha)u_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1 - 3\alpha)v_n \end{cases}$$

المتتالية العددية (w_n) معرفة على \mathbb{N} بـ: $w_n = v_n - u_n$ (1) ا) احسب w_0 ثم احسب w_1 بدلالة α ب) بين ان (w_n) متتالية هندسية اساسها $(6\alpha - 1)$ ج) اكتب عبارة w_n بدلالة n و α ، ثم عين قيم α حتى تكون: $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ نفرض في كل ما يلي: $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$ (2) ا) اثبت ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما و ان (v_n) متناقصة تماماب) استنتج ان (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l .(3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n: u_n + v_n = 2$ ، و استنتج قيمة l .(4) احسب بدلالة α المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2020}$

تمرين رقم 71:

رياضيات - 2019 - الموضوع الاول (04 نقاط)

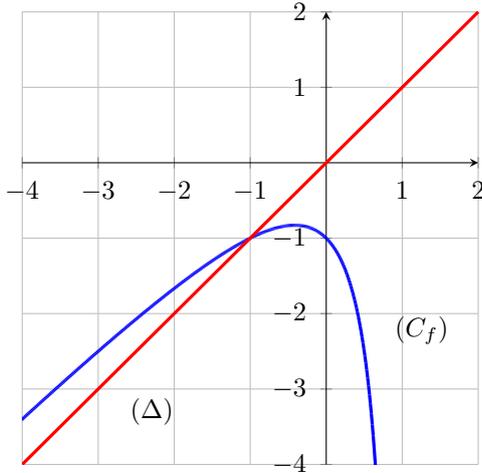
(1) حل المعادلة $(E) \quad 505x - 673y = 1 \dots$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عددان صحيحان.(لاحظ أن: $2019 = 3 \times 673$ و $2020 = 4 \times 505$.)(2) بين أنه من أجل كل ثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x و y من نفس الإشارة.(3) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على \mathbb{N} بـ:

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$$

- اكتب u_α بدلالة α ثم اكتب v_β بدلالة β حيث α و β عددان طبيعيان.(4) ا) عين الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم بين ان هذه الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n: X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$ أحسب بدلالة n الجداء $X_1 \cdot X_2 \dots X_n = p$

تمرين رقم 72:

رياضيات - 2018 - الموضوع الاول (04 نقاط)



الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ ب: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بحددها الاول $u_0 = -3$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$ ، ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (انظر الشكل المقابل).

$$(1) \quad (a) \quad \text{بين انه من اجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$$

$$(b) \quad \text{استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي } n : u_n + 1 \geq -2 \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{ثم } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

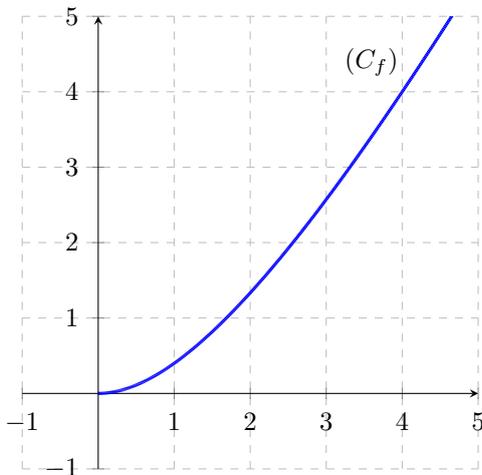
$$(2) \quad \text{نضع } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$- \text{بين انه من اجل كل عدد طبيعي } n : (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) < 8 \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$\text{واستنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

تمرين رقم 73:

رياضيات - 2014 - الموضوع الثاني (04.5 نقاط)



الدالة العددية f المعرفة على $[0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل ادناه.

(1) بين ان الدالة f متزايدة تماما.

(2) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 3$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$ ، المستقيم الذي معادلته $y = x$

(a) باستعمال المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) مثل ، على حامل محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها

(b) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(3) (a) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 3$

(b) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة

(ج) استنتج ان (u_n) متقاربة.

(4) (ا) ادرس اشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ و استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$ ،

(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 3 \left(\frac{6}{7}\right)^n$ ،

(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n الى $+\infty$

تمرين رقم 74:

🏠 رياضيات - 2009 - الموضوع الأول (06 نقاط)

(1) نعرف الدالة العددية f على المجال $[1; 5]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{5}{x}\right)$

ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة على المحورين $3cm$

(ا) ادرس تغيرات الدالة f

(ب) انشئ المنحنى البياني (C) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في نفس المعلم.

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بعدها الاول $u_0 = 5$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$

(ا) احسب u_1 و u_2

(ب) استعمل المنحنى (C) و المستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 على محور الفواصل.

(3) (ا) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \sqrt{5}$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة الى تقارب (u_n) ؟

(4) (ا) برهن انه مهما يكن العدد الطبيعي n فان: $(u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$

(ب) استنتج ان: $(u_0 - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_n - \sqrt{5})$. ما هي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 75:

🏠 رياضيات - 2008 - الموضوع الاول (06 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ الى منحني f في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة على المحورين $2cm$)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ وفسر النتيجة هندسيا.

(ا) ادرس تغيرات الدالة f

(ب) باستعمال منحني دالة "الجذر التربيعي" ، انشئ المنحنى (C)

(ج) ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$

(2) نعرف المتتالية (u_n) على المجموعة \mathbb{N} كالآتي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(ا) باستعمال (D) و (C) ، مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 على محور الفواصل

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

(3) (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2 \leq u_n \leq 5$ و $u_{n+1} > u_n$

(ب) استنتج ان (u_n) متقاربة. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 76:

🏠 رياضيات - 2008 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بعدها الاول $u_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

(1) احسب u_1 و u_2 و u_3

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع ان (v_n) متتالية ثابتة

- استنتج عبارة u_n بدلالة n

- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) (w_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع S حيث : $S = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$

القسم IV

مواضيع بكالوريات أجنبية

تمرين رقم 77:

بكالوريا المغرب 2020 🏠

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$ لكل n من \mathbb{N}

(1) احسب u_1

(2) بين بالتراجع ان لكل n من \mathbb{N} ، $u_n > 0$

(3) (ا) بين ان $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ لكل n من \mathbb{N} ، ثم استنتج ان $0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N}

(ب) احسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ لكل n من \mathbb{N}

(ا) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{5}$

(ب) حدد v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n لكل n من \mathbb{N}

تمرين رقم 78:

بكالوريا المغرب 2016 🏠

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n}$ لكل n من \mathbb{N}

(1) (ا) تحقق من ان $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ لكل n من \mathbb{N}

(ب) بين بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي n ان $u_n < 3$

(2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ لكل n من \mathbb{N}

(ا) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

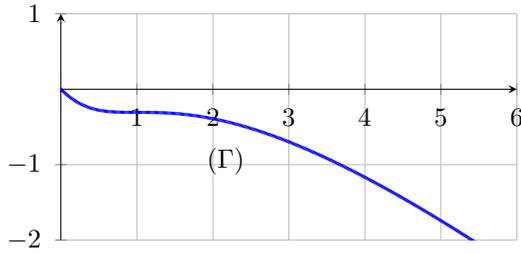
(ب) استنتج ان $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N}

(ج) بين ان $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ ، لكل n من \mathbb{N} ثم اكتب u_n بدلالة n

(د) حدد نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 79:

🏠 بكالوريا تونس 2016



المنحنى (Γ) المقابل هو التمثيل البياني ، في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ للدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x + \ln(1+x^2)$ فقط عند المبدأ O (Γ) يقطع محور الفواصل، فقط عند المبدأ O

(1) بقراءة بيانية، برر انه من اجل كل x من $[0; +\infty[$ $\ln(1+x^2) \leq x$

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1+u_n^2) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(ا) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

(ب) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

(ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة، واعط نهايتها.

(3) لتكن المتتالية S_n المعرفة على بـ: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(ا) بين ان المتتالية (S_n) متزايدة تماما.

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n \leq 3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(ج) استنتج ان المتتالية (S_n) متقاربة.

تمرين رقم 80:

🏠 بكالوريا تونس 2015

(1) لتكن المتتالية الهندسية (u_n) التي حدها الاول $u_0 = \frac{1}{3}$ و اساسها $q = \frac{1}{3}$

(ا) احسب u_1

(ب) عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) من اجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بين ان $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

(2) بدراسة تغيرات الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = e^x - 1 - x$ بين انه مهما يكن $x \in \mathbb{R}$: $1 + x \leq e^x$

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة، من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = (1+u_0)(1+u_1) \times \dots \times (1+u_n)$

(ا) احسب v_0 و v_1

(ب) بين ان المتتالية v_n متزايدة

- (ج) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n \leq e^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)}$
- (د) بين ان المتتالية (v_n) متقاربة.
- (هـ) لتكن l نهاية المتتالية (v_n) . بين ان $1 < l < \sqrt{e}$

تمرين رقم 81:

🏠 بكالوريا تونس 2010

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان كمايلي : $u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \alpha u_n + (1 - \alpha)v_n$ و $v_{n+1} = (1 - \alpha)u_n + \alpha v_n$ حيث α عدد حقيقي مع $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

(1) لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} ب: $w_n = v_n - u_n$

(ا) احسب w_0 و w_1

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = (2\alpha - 1)^n$

(ج) استنتج نهاية المتتالية (w_n)

(2) (ا) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq v_n$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة و ان المتتالية (v_n) متناقصة

(ج) استنتج ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية

(د) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n + v_n = 3$ و استنتج قيمة النهاية

تمرين رقم 82:

🏠 بكالوريا فرنسا 2018

(Nouvelle-Calédonie)

اجب بصح او خطأ مع التبرير

(1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب: $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ و لتكن المتتالية (t_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب: $t_n = u_n - 5$

كل عدد طبيعي n ب: $t_n = u_n - 5$

• المتتالية (t_n) متتالية هندسية؟

• من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n = 9 \times 2n + 5$

(2) لتكن المتتالية (v_n)

• اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من 1

فان المتتالية (v_n) متقاربة. $-1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1 + \frac{1}{n}$

(3) من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \dots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7)$

(4) لتكن (w_n) متتالية متقاربة

• اذا كان انطلاقا من رتبة معينة كل حدود المتتالية (w_n) موجبة تماما فان نهاية المتتالية (w_n) موجبة تماما.

تمرين رقم 83:

🏠 بكالوريا فرنسا 2017

(Amérique du Nord)

الهدف من هذا التمرين هو دراسة المتتاليات التي حدودها موجبة حيث حدها الاول u_0 اكبر تماما من 1 وتمتلك الخاصية الاتية: من اجل كل عدد طبيعي $n > 0$ مجموع n حد متتابعة الاولى تساوي جداء n حد متتابعة الاولى. نقبل ان هذه المتتالية موجودة ولتكن (u_n) و التي تحقق:

$$u_0 > 1 \cdot$$

$$\cdot \text{ من اجل كل عدد طبيعي } n \geq 0, u_n \geq 0$$

$$\cdot \text{ من اجل كل عدد طبيعي } n > 0, u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$$

$$(1) \text{ ليكن } u_0 = 3. \text{ احسب } u_1 \text{ و } u_2$$

$$(2) \text{ من اجل كل عدد طبيعي } n > 0, \text{ لتكن } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$$

$$\text{ لدينا على وجه الخصوص } S_1 = u_0$$

$$(a) \text{ تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي } n > 0, S_{n+1} = S_n + u_n \text{ و } S_n > 1$$

$$(b) \text{ استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي } n > 0, u_n = \frac{S_n}{S_n - 1}$$

$$(3) \text{ اثبت انه من اجل كل } n \geq 0 \text{ فان } u_n > 1$$

$$(4) (a) \text{ برر انه من اجل كل عدد طبيعي } n > 0 \text{ فان } S_n > n$$

$$(b) \text{ استنتج نهاية المتتالية } (S_n) \text{ و } (u_n)$$

تمرين رقم 84:

🏠 بكالوريا فرنسا 2017

(Antilles Guyane)

$$(1) \text{ لتكن الدالة } f \text{ المعرفة على المجال }]0; +\infty[\text{ بـ } f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$(a) \text{ ادرس تغيرات الدالة } f \text{ ثم استنتج القيم الحدية للدالة } f ?$$

$$(2) \text{ اثبت انه من اجل كل } n \geq 3, \text{ المعادلة } f(x) = \frac{1}{n} \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha_n \text{ على المجال } [1, e]$$

$$(a) \text{ على البيان لدينا التمثيلات البيانية لكل من المستقيمات } D_3, D_4, \text{ و } D_5 \text{ ذو المعادلات } y = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{4}, \text{ و } y = \frac{1}{5} \text{ على التوالي.}$$

$$(b) \text{ ضع تخميننا لاتجاه تغير المتتالية } (\alpha_n)$$

$$(c) \text{ قارن بين } f(\alpha_n) \text{ و } f(\alpha_{n+1}) \text{ وذلك من اجل كل } n \geq 3$$

$$(d) \text{ حدد اتجاه تغير المتتالية } (\alpha_n)$$

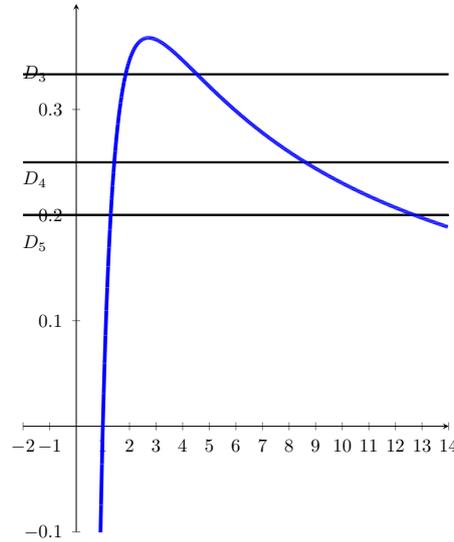
(هـ) استنتج ان المتتالية (α_n) متقاربة

(3) نفرض انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ ، المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلا اخر β_n حيث $1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n$

(ا) نفرض ان المتتالية β_n متزايدة.

اثبت انه من اجل كل $n \geq 3$ فان $\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}$

(ب) استنتج نهاية المتتالية (β_n)



تمرين رقم 85:

🏠 بكالوريا فرنسا 2015

(Polynésie)

(1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $u_n = e^{v_n}$ و المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_1 = \ln(2)$ و من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n})$

(ا) تحقق ان $u_1 = 2$ و ان من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$

(ب) احسب كل من u_2 ، u_3 و u_4 . (تعطى النتائج على شكل كسور)

(ج) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n = \frac{n+1}{n}$

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_1 = \ln(2)$ و من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n})$

(ا) عبر عن v_n بدلالة u_n ثم بدلالة n

(3) (ا) لتكن المتتالية (S_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

(ب) تحقق ان $S_3 = \ln(4)$

(ج) عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتالية (S_n)

تمرين رقم 86:

بكالوريا فرنسا 2015

(Centres étrangers)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = a$ ، و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$. حيث a عدد حقيقي ثابت غير معدوم.

(1) لتكن g الدالة المعرفة، من اجل كل عدد حقيقي x بـ: $g(x) = e^{2x} - e^x - x$

(ا) احسب $g'(x)$ ، وتحقق انه، من اجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$

(ب) حدد تغيرات الدالة g ، واعط قيمتها الحدية الصغرى.

(ج) بملاحظة ان $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ ، ادرس اتجاه تغير المتتالية u_n

(2) في هذا السؤال، نفرض ان $a \leq 0$

(ا) برهن بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي n ، ان $u_n \leq 0$

(ب) استنتج، من الاسئلة السابقة، ان (u_n) متقاربة.

(ج) اعط نهاية المتتالية (u_n) ، في حالة $a = 0$

(3) في هذا السؤال، نفرض ان $a > 0$

(ا) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$

(ب) برهن بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq a + n \times g(a)$

(ج) عين نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 87:

بكالوريا فرنسا 2014

(Polynésie)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$

(1) احسب u_1 و u_2

(2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = u_{n+1} - u_n$

(ا) اكتب v_n بدلالة n .

(ب) ماهي طبيعة المتتالية (v_n) ؟

(ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = (n+1)(n+2)$

(د) بين انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $S_n = u_{n+1} - u_0$ ثم استنتج u_n بدلالة n

تمرين رقم 88:

بكالوريا فرنسا 2013

(Métropole)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ ،

(1) ا) احسب u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) (2) ا) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n + 3$ (ب) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ ،(ج) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .(3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = u_n - n$ (1) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{3}$ (ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ ،(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) (4) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع: $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$ (1) عبر عن S_n بدلالة n .(ب) عين نهاية المتتالية (T_n)

تمرين رقم 89:

بكالوريا فرنسا 2012

(Antilles Guyane)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$

(1) احسب u_2 ، u_3 و u_4 (2) ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فان u_n موجب تماما(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج انها متقاربة، ثم احسب نهايتها l (3) من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع: $v_n = \frac{u_n}{n}$ (1) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول v_1 (ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n ، $u_n = \frac{n}{2^n}$ (4) نعتبر الدالة f و المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - x \ln 2$ (1) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$ (ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين رقم 90:

🏠 بكالوريا فرنسا 2010
(Antilles Guyane)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} ب: $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ ، و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

(1) احسب u_2 ثم استنتج ان (u_n) لا هي هندسية ولا هي حسابية.

(2) نعرف المتتالية (v_n) من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

(ا) احسب v_0

(ب) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

(ج) استنتج ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

(د) عبر عن v_n بدلالة n .

(3) نعرف المتتالية (w_n) من اجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

(ا) احسب w_0

(ب) باستعمال العلاقة $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ ، عبر عن w_{n+1} بدلالة w_n و u_n

(ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $w_{n+1} = w_n + 2$

(د) عبر عن w_n بدلالة n

(4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

(5) من اجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

القسم ٧

مواضيع بكالوريات تجريبية لمدارس أشبال الأمة

4

شعبة علوم تجريبية

تمرين رقم 91:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2021 - دورة ماي، الموضوع الأول (05 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = 2 - \frac{4}{u_n + 3} \end{cases}$$

(1) عين قيم u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

(2) فيما يلي نضع : $u_0 = 0$

(أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n < 1$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج انها متقاربة و احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$(3) \quad (أ) \text{ بين انه من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ يكون : } 0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(1 - u_n)$$

(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون : $0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n) من جديد

$$(4) \text{ لتكن } (v_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

(أ) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

(ب) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

(ج) احسب بدلالة n المجموعين T_n و T'_n حيث :

$$\ln(T'_n) = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ و } T_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$$

تمرين رقم 92:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2021 - دورة ماي، الموضوع الثاني (04 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(x + 1)$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $[0; +\infty[$

(2) استنتج انه من اجل x من $[0; +\infty[$ فان: $\ln(x + 1) \leq x$

(II) نضع:
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n) \end{cases}$$
 (من اجل كل عدد طبيعي n)

(1) احسب u_1 ، u_2

(2) اثبت بالتراجع انه من اجل كل n من \mathbb{N} : $u_n \geq 0$

(3) (ا) اثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة و استنتج انه من اجل كل n من \mathbb{N} فان: $u_n \leq 1$

(ب) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة و احسب نهايتها

تمرين رقم 93:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر، الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} كمايلي:
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2} \end{cases}$$

1. برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون: $1 \leq u_n < 2$

2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . هل هي متقاربة؟

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

(I) برهن ان المتتالية (v_n) يطلب تعيين عبارة حدها العام v_n بدلالة n

(ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم جد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) احسب المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

4. (I) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون: $|u_{n+1} - 2| \leq |u_n - 2|$

(ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون: $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 94:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر، الموضوع الثاني (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = e^{-1}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{eu_n - 1}{2}$ ، e هو اساس اللوغاريتم النيبيري

$$1. \text{ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي } n: u_n \leq \frac{1}{e-2}$$

2. عين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$3. (v_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي: } v_n = 2u_n + \frac{2}{2-e}$$

(ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

$$(ب) \text{ اكتب عبارة } v_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم بين انه من اجل كل عدد طبيعي } n: u_n = \frac{1}{e-2} \left[1 - \left(\frac{e}{2}\right)^{n-1} \right]$$

(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) ماذا تستنتج.

$$4. \text{ نضع من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم: } S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

(ا) عبر عن S_n بدلالة n

$$(ب) \text{ احسب المجموع } S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \text{ بدلالة } n$$

تمرين رقم 95:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

$$(1) \text{ (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n: u_n \leq n + 3$$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الاسفل. هل هي متقاربة؟ برر.

$$(2) \text{ نعتبر المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = u_n - n$$

(ا) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

$$(ج) \text{ احسب المجموع: } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (t_n) \text{ المعرفة ب: } t_n = \ln(v_n)$$

(ا) برهن أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

$$(ب) \text{ احسب المجموع: } S_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$$

تمرين رقم 96:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي، الموضوع الثاني (04 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $[-1; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = x - \ln(x+2)$.

(1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) (u_n) متتالية معرفة كمايلي: $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(ا) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$.

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و احسب نهايتها.

(3) (v_n) متتالية معرفة كمايلي: $v_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \ln[(u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times \cdots \times (u_{n-1} + 2)]$$

(ا) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 - u_n$

(ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times \cdots \times (u_{n-1} + 2)]$

تمرين رقم 97:

🏠 | 📌 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2018 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كمايلي: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

(ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq n$

(ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما

(2) (v_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كمايلي: $v_n = u_n - n + 1$

(ا) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية ثم اكتب v_n و u_n بدلالة n

(ب) احسب قيمة المجموع: $S_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{n-1}^2$ بدلالة n .

(ج) احسب قيمة المجموع: $K_n = (u_0)^2 + (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 2)^2 + \cdots + (u_{n-1} - n + 1)^2$ بدلالة n .

تمرين رقم 98:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} ب: $n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_0 = 6 \\ 3u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$

(1) (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{2}$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج انها متقاربة.

(ج) عين نهاية المتتالية (u_n)

$$(2) \text{ لنعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$$

(ا) بين ان (v_n) متتالية حسابية، يطلب تحديد اساسها r وحدها الاول.(ب) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n (ج) عين نهاية ثانية للمتتالية (u_n)

تمرين رقم 99:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1}$

حيث α عدد حقيقي من المجموعة $\{0\} -]-1; 1[$

نضع و من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$

(1) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول بدلالة α .(2) هل المتتالية (v_n) متقاربة؟(3) احسب بدلالة α و n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ (4) عين قيمة العدد الحقيقي α علما ان $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$ - استنتج عندئذ (u_n) بدلالة n ثم بين ان (u_n) متقاربة.(5) في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$$(1) \text{ بين ان: } \pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2 - n - 2}{2}}$$

(ب) عين اصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$

5

شعبة رياضيات

تمرين رقم 100:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2021 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر v_1 و q عدداً طبيعيين، (v_n) هي المتتالية الهندسية التي أساسها q و حدها الأول v_1

$$(I) \text{ عين } v_1 \text{ و } q \text{ علماً أن } v_1 \text{ و } q \text{ أوليان فيما بينهما و } 2v_1^2 = v_4 - v_2$$

$$(II) \text{ نفرض أن : } v_1 = 3 \text{ و } q = 2$$

(1) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم عين كل الحدود المحصورة بين العددين : 2020 و 1441

$$(2) \text{ نضع : } S_n = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \text{ و } P_n = \ln(S_n)$$

- احسب كلا من S_n و P_n بدلالة n ، ثم احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

(3) نعتبر α و β عدداً طبيعيين حيث : $v_\alpha < v_\beta$

(ا) حلل العدد 2304 الى جداء عوامل اولية.

$$(ب) \text{ عين كل الثنائية الطبيعية } (\alpha, \beta) \text{ بحيث يكون : } \begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$$

(ج) نسجل قيم الحدود الستة الأولى للمتتالية (v_n) على 6 بطاقات متماثلة و نخلطها جيداً ثم نسحب منها بصفة عشوائية بطاقتان في ان واحد.

- ماهو احتمال سحب بطاقتين تحملان حدين رقميهما اوليان فيما بينهما؟

تمرين رقم 101:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2021 - دورة ماي، الموضوع الثاني (04 نقاط)

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases} : \text{متتاليتا الاعداد الطبيعية } (x_n) \text{ و } (y_n) \text{ معرفتان على } \mathbb{N} \text{ كما يلي:}$$

$$(1) \text{ اثبت بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي } n : x_n = 2^{n+1} + 1$$

$$(2) \text{ ا) احسب } PGCD(x_8; x_9) \text{ و } PGCD(x_2; x_3)$$

ب) هل x_n و x_{n+1} اوليان فيما بينهما من اجل كل عدد طبيعي n

$$(3) \text{ ا) اثبت ان من اجل كل عدد طبيعي } n : 2x_n - y_n = 5$$

ب) اكتب y_n بدلالة n

ج) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5

$$(4) \text{ نضع } d_n = PGCD(x_n; y_n)$$

ا) ما هي القيم الممكنة لـ d_n

ب) عين مجموعة قيم n التي يكون من اجلها x_n و y_n اوليين فيما بينهما

تمرين رقم 102:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر، الموضوع الأول (04 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases} : \text{لتكن المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ المعرفة كمايلي:}$$

$$(1) \text{ ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي } n : 2 \leq u_n \leq 4$$

$$\text{ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1}^2 - u_n^2 = -(u_n + 1)(u_n - 4)$$

ج) استنتج ان المتتالية (u_n) متزايدة.

$$(2) \text{ ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي } n : 4 - u_{n+1} = \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$$

$$\text{ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي } n : 4 - u_{n+1} = \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

$$\text{ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي } n : 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

د) اوجد عندئذ نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 103:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر، الموضوع الثاني (04 نقاط)

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي: } u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ و } u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$$

(1) نعتبر (v_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بما يلي : $v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$ حيث α و β عدنان حقيقيان غير معدومين

(ا) احسب u_2 و u_3

(ب) احسب v_1 ، v_2 و v_3 بدلالة α و β

(ج) بين انه اذا كانت v_1 و v_2 و v_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فان : $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

(2) نضع $\alpha = \beta$:

(ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(ب) استنتج انه من اجل كل عدد n من \mathbb{N}^* : $u_n + u_{n-1} = 3^n$

تمرين رقم 104:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2018 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

(1) (u_n) متتالية حسابية حدها الاول $u_0 = 5$ واساسها 4

(ا) اكتب الحد العام u_n بدلالة n

(ب) احسب قيمة المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n .

(ج) اذا كان مجموع خمسة حدود متعاقبة من (u_n) هو 2025 فما هو الحد الاول من هذه الحدود

(2) (v_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كمايلي : $v_n = (2n + 1) \times 2^{(4n+5)}$

(ا) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3

(ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \times 3 \times 5 \dots \times (2n + 1) = \frac{(2n + 1)!}{2^n \times n!}$

(د) استنتج قيمة الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ بدلالة n

تمرين رقم 105:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

a و b عدنان حقيقيان حيث $0 < a < b$. (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ $u_0 = a$ و $v_0 = b$ و من اجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ و } v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

(1) اثبت من اجل كل عدد طبيعي n ان $0 \leq u_n \leq v_n$

(2) بين من اجل كل عدد طبيعي n ان $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ (يمكن استعمال النتيجة $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq 1$ حيث $x > 0$ و $y > 0$)

(3) استنتج ان $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$ من اجل كل عدد طبيعي n .

(4) اثبت ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

(5) فيما يلي نضع $a = 2$ و $b = 5$.

بواسطة الة حاسبة احسب u_3 ثم استنتج قيمة مقربة بالنقصان الى 10^{-3} للنهاية المشتركة للمتتاليتين