وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تيميمون — ثانويات المقاطعة الأولى

الشعبة : 3 رياضيات — مارس 2024

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : ثلاث ســـاعات

التمرين الأول: (06 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin(x)dx$.

1) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\cos(n\pi) = (-1)^n$

2) ا) باستعمال المكاملة بالتجزئة مرّتين، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = (-1)^n\left(\frac{e^{-\pi}+1}{2}\right)e^{-n\pi}$

ب) بين أنّ المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول u_0 .

3) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نعرف المجموع S_n كما يلي: $S_n = 1 + \frac{u_1}{u_0} + \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)^n$.

– عبر عن S_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

4) نعتبر الجداء P_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

– بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = \left[(-e^{-\pi})^{\frac{n}{2}}.\left(\frac{e^{-\pi}+1}{2}\right)\right]^{n+1}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I) m و n عددان صحيحان غير معدومين و a عدد صحيح.

–أثبت أنه إذا كان العددان m و n قاسمين للعدد a ، وكان m و n أوليين فيما بينهما ،فإن العدد mn قاسم للعدد a .

II) نعتبر في $\mathbb{Z}$ الجملة (S) التالية: $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ حيث $\begin{cases} a,b,p,q \in \mathbb{Z} \\ p\gcd(p,q) = 1 \end{cases}$

1) برر أنه توجد ثنائية (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $pu_0 + qv_0 = 1$.

2) بين أنّ: $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للجملة (S) .

3) ا) ليكن x حلّا للجملة (S) ، بين أن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$.

ب) ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث: pq يقسم العدد $x - x_0$ ، بيّن أن x حل للجملة (S) .

1. استنتج مجموعة حلول الجملة (S) .

2. حل في $\mathbb{Z}$ الجملة التالية: $\begin{cases} x \equiv 1[5] \\ x \equiv 3[7] \end{cases}$.

التمرين الثالث: (09 نقاط)

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم.

I) نعتبر الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g_n(x) = n(x+1) + e^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g_n ، وشكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α_n ينتمي إلى المجال $]-2;-1[$.

3) استنتج، تبعا لقيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g_n(x)$.

II) نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_n(x) = \frac{xe^x}{n+e^x}$ ، وليكن (C_n) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) ا) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} [f_n(x) - x]$ ، ثم فسّر النتائج بيانيا. .

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_n{}'(x) = \frac{e^x . g_n(x)}{(n+e^x)^2}$.

جـ) بين أن: $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$ و استنتج حصرا لـ $f_n(\alpha)$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f_n .

2) ا) ادرس وضعية المنحني (C_n) بالنسبة للمستقيم (d) الذي معادلته: $y = x$.

ب) ادرس وضعية المنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) ، ثم أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) و المستقيم (d)

III) نعتبر التكاملين: $I_0 = \int_{-1}^{0} xe^x dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n = \int_{-1}^{0} f_n(x) dx$.

1) ا) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $I_0 = 2e^{-1} - 1$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1;0]$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n $\frac{xe^x}{n} \leq \frac{xe^x}{n+e^x} \leq \frac{xe^x}{n+1}$.

جـ) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{I_0}{n} \leq I_n \leq \frac{I_0}{n+1}$.........(1)

ثم استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$.

ا) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1}$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} \geq \ln(n+2) - \ln(2) \text{..............} (2)$$

جـ) باستعمال النتيجتين (1) و (2) برهن أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$.