الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

ثانوية فارس الطاهر - بئر العاتر -
امتحان الفصل الثاني
الشعبة: ثالثة رياضيات

السنة الدراسيّة:
2022 – 2023

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 02 ساعة

التمرين الأوّل: (10 نقاط)

لتكن (X_n) و (Y_n) متتاليتين معرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} X_0 = 5 \\ X_{n+1} = 3X_n - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_0 = 1 \\ Y_{n+1} = 3Y_n + 8 \end{cases}$$

1) نعرّف من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (u_n) بالعبارة: $u_n = X_n - 1$

أ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسيّة يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

بـ) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $X_n = 4 \times 3^n + 1$

2) بيّن أنّ: $PGCD\left(X_{n+1}; X_n\right)$ يقسم 2 ثمّ استنتج أنّ: $PGCD\left(X_{n+1}; X_n\right) = 1$

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $5X_n - 4Y_n = 21$.

بـ) استنتج عبارة Y_n بدلالة n، ثمّ جد القيم الممكنة لـ: $PGCD\left(X_n; Y_n\right)$

4) أ) ادرس حسب يم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليديّة للعدد 3^n على 7.

بـ) بيّن أنه إذا كان $n \equiv 5\,[6]$ فإنّ: $PGCD\left(X_n; Y_n\right) = 7$

جـ) استنتج قيمة $PGCD\left(X_{2021}; Y_{2021}\right)$

التمرين الثاني: (12 نقطة)

I) n عدد طبيعي غير معدوم، f_n دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$$

(C_n) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1) أ) احسب نهايات الدالة f_n عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب) احسب $f_n'(x)$ ثمّ ادرس إشارتها.

ج) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f_n ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_n) تمرّ من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

3) أ) من أجل كل عدد الحقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2)

ب) أنشئ بدقّة المنحنيين (C_1) و (C_2).

II) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n\in N^*}$ المعرّفة بـ: $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

1) اكتب $f_n'(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.

2) أ) بيّن أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in N^*}$ متناقصة.

ب) استنتج أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in N^*}$ متقاربة.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و $0 \le x \le 1$ لدينا:

$$\frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{(1+x)^n}$$

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$\left(\frac{e^{-1}}{n-1}\right)\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right] \leqslant I_n \leqslant \left(\frac{1}{n-1}\right)\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

ج) احسب $\lim_{n\to+\infty} I_n$

4) أ) اعتمادا على السؤال II) 1) بيّن أنّ:

$$I_n + nI_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$$

ب) استنتج $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

ج) احسب بـ cm^2 مساحة الحيّز المستوي A المحدّد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.