**/الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**مديرية التربية لولاية قسنطينة** — **الثانوية : الحرية**

**المادة : رياضيات** — **المستوى : ثالثة ثانوي**

**الشعبة : تسيير وَ إقتصاد** — **المعامل : 5**

**الإختبار الثاني** — **اللقب وَ الإسم:** — **المدة: 2 سا**

**التمرين الأول (5ن):**

1) ليكن كثير الحدود $P(x)$ حيث : $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$.

- حلّي في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x) = 0$. **(0.5ن).**

2) إستنتجي حلول المعادلات التالية :

أ- $(\ln x)^4 - 8(\ln x)^2 - 9 = 0$. **(0.75ن).**

ب- $[\ln(\ln x)]^4 - 8[\ln(\ln x)]^2 - 9 = 0$. **(0.75ن).**

جـ- $(\log x)^4 - 8(\log x)^2 - 9 = 0$. **(0.75ن).**

د- $e^{4x} - 8e^{2x} - 9 = 0$. **(0.5ن).**

3) حلّي في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $9e^{-4x} + 8e^{-2x} - 1 \leq 0$. **(1.75ن).**

**التمرين الثاني (4ن):**

نعتبر المتتالية الهندسية $(v_n)$ ذات الأساس $e^3$ وَ الحدّ الأول $v_0 = 2$ . ( $e$ أساس اللوغاريتم النيبيري ).

1) أحسبي بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. **(1ن).**

2) نعتبر المتتاليتين $(u_n)$ وَ $(w_n)$ المعرّفتين من أجل كل عدد طبيعي $n$ كما يلي :

$w_n = 6 - 4n + 2e^{3n}$ وَ $u_n = w_n - v_n$ .

- بيّني أنّ : المتتالية $(u_n)$ حسابية ، حدّدي أساسها $r$ وَ حدّها الأول $u_0$ . **(1ن).**

3) أثبتي أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $6 + 2 - 2 + \cdots + 6 - 4n = (n+1)(6-2n)$. **(1ن).**

4) إستنتجي المجموع $T_n$ بدلالة $n$ حيث : $T_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$. **(1ن).**

**التمرين الثالث (4ن):** نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 6$.

$(C_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد وَ المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.( $\ln$ رمز اللوغاريتم النيبيري ).

1) أ- حلّي في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $g(x) = 0$ ثُمّ فسّري النتيجة هندسيًا. **(0.75ن+0.25ن).**

ب-حلّلي $g(x)$ إلى جداء عاملين. **(0.5ن).**

جـ- حلّي في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $2\ln x + 1 \geq 0$ . **(0.5ن).**

2) أحسبي $g'(x)$ وَ إستنتجي إتجاه تغيّر الدالة $g$ . **(0.25ن+0.75ن).**

3) بيّني أنّ المنحنى $(C_g)$ يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها. **(0.25ن+0.25ن+0.25ن+0.25ن).**

**التمرين الرابع (7ن):** نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x) = e^x(e^x - 2)$.

1)أحسبي نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ وَ عند $+\infty$.**(0.5ن+0.5ن).**

2) أدرسي إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثُمّ شكّلي جدول تغيّراتها. **(0.5ن+0.75ن+0.75ن).**

3) أكتبي معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ الممثّل للدالة $f$ عند النقطة التي فاصلتها $\ln 2$. **(1ن).**

4) أرسمي $(T)$ وَ $(C_f)$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد وَ متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. **(0.5ن+1ن).**

5) أ- جِدي دوال أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ . **(1ن).**

ب- أحسبي مساحة الحيّز المحدّد بـ $(C_f)$ وَ $(xx')$ وَ المستقيمان ذو المعادلتين : $x = -2$ وَ $x = -1$ . **(0.5ن).**

**ملاحظات هامة جداً:**

1) يُمنع منعاً باتاً التشطيب وَ الكتابة تكون إما بالأزرق أَوْ الأسود .

2) لا تكتبي وَ لا تُلطخي هذه الورقة لأنّكِ ستُرجعيها مع ورقة الإجابة .

3) يُمنع إستعمال الآلة الحاسبة ذات الشاشة التي يزيد عرضها عن $2cm$.

**بالتوفيق ـــــــــــــــــ الإثنين 6 مارس 2023 ـــــــــــــــــ الأستاذة زعتر آمال**

| الإجابة النموذجية | تنقيط |
|---|---|

(05) * التمرين الأول: $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x)=0$:

نضع $x^2 = X$ فإن: $P(X)=0 \Rightarrow X^2 - 8X - 9 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(-9) = 64 + 36 = 10^2 > 0$

يوجد حلان متمايزان:

* $X_1 = x_1^2 = \frac{8-10}{2} = -1 < 0$ ; مستحيل لأن $x^2 \geq 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ 0,25

* $X_2 = x_2^2 = \frac{8+10}{2} = 9 > 0 \Rightarrow |x_2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_2' = -3 \\ x_2'' = +3 \end{cases}$ 0,25

ومنه: $S = \{-3 ; 3\}$

2) إستنتاج حلول المعادلات:

ⓐ $(\ln x)^4 - 8(\ln x)^2 - 9 = P(\ln x) = 0$

ⓐ معرفة حيث أن $x > 0$ أي $x \in ]0, +\infty[$ 0,25

$P(x)=0$ و $P(\ln x)=0$ متكافئتان:

وحسب سابقا فإن: $\begin{cases} \ln x_1 = -3 \Rightarrow x_1 = e^{-3} \\ \ln x_2 = +3 \Rightarrow x_2 = e^{3} \end{cases}$ 0,25 / 0,25

$\Rightarrow S = \{e^{-3} ; e^{3}\}$

ⓑ $[\ln(\ln x)]^4 - 8[\ln(\ln x)]^2 - 9 = 0 = P[\ln(\ln x)]$

ⓑ معرفة حيث أن $\ln x > 0$ أي $x > e^0 = 1$ ومنه $x \in ]1, +\infty[$ 0,25

$P(x=0)$ و $P(\ln(\ln x))$ متكافئتان حسب 1:

$\Rightarrow \begin{cases} \ln(\ln x_1) = -3 \Rightarrow \ln x_1 = e^{-3} \Rightarrow x_1 = e^{e^{-3}} \\ \ln(\ln x_2) = 3 \Rightarrow \ln x_2 = e^{3} \Rightarrow x_2 = e^{e^{3}} \end{cases}$ 0,25 / 0,25

ومنه: $S = \{e^{e^{-3}} ; e^{e^{3}}\}$

ⓒ $(\log x)^4 - 8(\log x)^2 - 9 = 0 = P(\log x)$

ⓒ معرفة حيث أن $x > 0$ أي $x \in ]0, +\infty[$ 0,25

$P(x)=0$ و $P(\log x)=0$ متكافئتان،

حسب 1: $\log x_1 = \frac{\ln x_1}{\ln 10} = -3 \Rightarrow \ln x_1 = -3\ln 10 \Rightarrow \ln x_1 = \ln 10^{-3}$

ومنه: $x_1 = 10^{-3}$ 0,25

* $\log x_2 = \frac{\ln x_2}{\ln 10} = 3 \Rightarrow \ln x_2 = 3\ln 10 = \ln 10^3 \Rightarrow x_2 = 10^3$ 0,25

ومنه: $S = \{10^{-3} ; 10^{3}\}$

ⓓ $e^{4x} - 8e^{2x} - 9 = 0 = P(e^x)$

$P(x)=0$ و $P(e^x)=0$ متكافئتان، حسب 1:

مستحيل لأن $e^x > 0$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $e^{x_1} = -3 < 0$ 0,25

* $e^{x_2} = 3 > 0 \Rightarrow x_2 = \ln 3$. 0,25

$\Rightarrow S = \{\ln 3\}$

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $9e^{-4x} + 8e^{-2x} - 1 \leq 0$:

$\frac{9}{e^{4x}} + \frac{8}{e^{2x}} \times \frac{e^{2x}}{e^{2x}} - 1 \times \frac{e^{4x}}{e^{4x}} \leq 0$

تكافئ: $\frac{-e^{4x} + 8e^{2x} + 9}{e^{4x}} \leq 0$

$\xrightarrow[(-1)\times]{\text{نضرب}} \frac{e^{4x} - 8e^{2x} - 9}{e^{4x}} = \frac{P(e^x)}{e^{4x}} \geq 0$ 0,25

$P(X) = a(X - X_1)(X - X_2) = (X+1)(X-9)$

$\xrightarrow{X = e^{2x}} P(e^{2x}) = (e^{2x}+1)(e^{2x}-9)$ 0,25
$= (e^{2x}+1)(e^x+3)(e^x-3)$

ندرس إشارة كل عامل:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{2x}+1$ | | $+$ | | $+$ | |
| $e^x+3$ | | $+$ | | $+$ | |
| $e^x-3$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $e^{4x}$ | | $+$ | | $+$ | |
| $P(e^x)/e^{4x}$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

0,25 / 0,25 / 0,25 / 0,25

$\Rightarrow S = [\ln 3 ; +\infty[$ 0,25

(04) * التمرين الثاني: $(V_n)$ متتالية هندسية حيث: $\begin{cases} V_0 = 2 \\ q = e^3 \end{cases}$

1) حساب $S_n$ بدلالة $n$:

$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = \text{الحد الأول} \times \frac{\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}} - 1}{\text{الأساس} - 1}$ 0,25

$\Rightarrow S_n = V_0 \times \frac{q^{n-0+1} - 1}{q - 1} = 2 \times \frac{(e^3)^{n+1} - 1}{e^3 - 1}$ 0,25

ومنه: $S_n = 2\left(\frac{e^{3n+3} - 1}{e^3 - 1}\right)$ 0,5

2) $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : $W_n = 6 - 4n + 2e^{3n}$ ; $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : $W_n - V_n = U_n$

* إثبات أن $(U_n)$ حسابية، $r = ?$ ، $U_0 = ?$

حسب المعطيات فإن $V_n$ عبارة الحد العام لـ $V_n$: $V_n = V_0 \times q^n = 2 \times (e^3)^n = 2e^{3n}$

ومنه: $W_n = 6 - 4n + 2e^{3n}$
$= 6 - 4n + V_n$.

$\Rightarrow U_n = W_n - V_n = 6 - 4n$. 0,25

($(U_n)$ حسابية إذا $U_{n+1} = U_n + r$) 0,25

$U_n = 6 - 4n \Rightarrow U_{n+1} = 6 - 4(n+1) = 6 - 4n - 4$
$= U_n - 4$

ومنه $(U_n)$ حسابية أساسها $r = -4$ 0,25

وحدها الأول $U_0$ حيث: $U_0 = 6 - 4\times 0$ أي $U_0 = 6$ 0,25

3) إثبات أن: $S'_n = 6 + 2 - 2 + \dots + 6 - 4n = (n+1)(6-2n)$

حسب عبارة $U_n = 6 - 4n$ ومنه: $n=0 \Rightarrow U_0 = 6$
$n=1 \Rightarrow U_1 = 6 - 4 = 2$
$n=2 \Rightarrow U_2 = 6 - 8 = -2$

أي: $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$ 0,25 / 0,25

$\Rightarrow S'_n = \frac{n-0+1}{2}(U_0 + U_n) = \frac{n+1}{2}(6 + 6 - 4n)$ 0,25
$= \frac{n+1}{2}(12 - 4n) = \frac{(n+1) \times 2(6-2n)}{2}$

$S'_n = (n+1)(6 - 2n)$ 0,25

4) إستنتاج $T_n$ بدلالة $n$ حيث: $T_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$:

لدينا: $U_n = W_n - V_n$ ومنه: $W_n = U_n + V_n$ أي: 0,25

$T_n = U_0 + V_0 + U_1 + V_1 + \dots + U_n + V_n$
$= (U_0 + U_1 + \dots + U_n) + (V_0 + V_1 + \dots + V_n)$
$= S_n + S'_n = 2\left(\frac{e^{3n+3} - 1}{e^3 - 1}\right) + (n+1)(6-2n)$ 0,25+0,5

| تنقيط | الإجابة النموذجية | الإجابة النموذجية | تنقيط |
|---|---|---|---|

* التمرين الثالث: $g(x)=(\ln x)^2+\ln x-6$ (07ن)
$D_g=]0,+\infty[$

1- أ- حل المعادلة: $g(x)=0$

نضع: $X=\ln x$ فإن: $g(X)=X^2+X-6=0$

$\Delta=1-4(-6)=5^2 \to X_1=\ln x_1=\frac{-1-5}{2}=-3$

$\to x_1=e^{-3}$ 0,25

$X_2=\ln x_2=\frac{-1+5}{2}=2 \to x_2=e^{2}$ 0,25

$S=\{e^{-3};e^{2}\}$ 0,25

تفسير الهندسي: $(C_g)\cap(xx')=\{e^{-3};e^{2}\}$ 0,25

ب- تحليل $g(x)$ إلى جداء عاملين:

نعلم أن: $aX^2+bX+c=a(X-X_1)(X-X_2)$

$\to g(x)=(\ln x+3)(\ln x-2)$ 0,5

جـ- حل المتراجحة: $2\ln x+1\geq 0$ في $\mathbb{R}_+^*$

$2\ln x+1\geq 0 \to \ln x\geq -\frac{1}{2} \to x\geq e^{-1/2}$ 0,25

(S): $S=[e^{-1/2},+\infty[$ 0,25

2) حساب $g'(x)$: g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ كمجموع وتركيب حيث:

$g'(x)=2(\ln x)'(\ln x)^{2-1}+(\ln x)'=\frac{2}{x}\ln x+\frac{1}{x}$

$g'(x)=\frac{2\ln x+1}{x}$ 0,25

* استنتاج اتجاه تغير g:

حسب ما سبق نستنتج أن إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2\ln x+1)$، لأن: $x>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$0$ $-$ $e^{-1/2}$ $+$ $+\infty$ 0,25

$g'(x)<0 \to x\in]0;e^{-1/2}[$

لـ g متناقصة تماما على $]0;e^{-1/2}]$ 0,25

$g'(x)>0 \to x\in]e^{-1/2},+\infty[$

لـ g متزايدة تماما على $[e^{-1/2},+\infty[$ 0,25

3) إثبات أن $(C_g)$ يقبل نقطة انعطاف:

$g'$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لدينا حيث:

$g''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln x-1}{x^2}$

$=\frac{1-2\ln x}{x^2}$ ; $g''(x)=0 \to 1-2\ln x=0 \to \ln x=1/2 \to x=\sqrt{e}$ 0,5

$-\infty$ $-$ $\sqrt{e}$ $+$ $+\infty$ 0,25

إذن $g''(x)$ انعدمت من أجل $x=\sqrt{e}$ وغيرت إشارتها، إذن $(C_g)$ يقبل نقطة انعطاف عند $\sqrt{e}$ 0,25

وعنه $g(\sqrt{e})=(\ln\sqrt{e})^2+\ln\sqrt{e}-6=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-6$

هي نقطة انعطاف $A(\sqrt{e};-\frac{21}{4})$ 0,25

* التمرين الرابع: $f(x)=e^x(e^x-2)=e^{2x}-2e^x$ (07ن)
$D_f=\mathbb{R}$

1) حساب نهايات f عند حدود مجالات:

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^x(e^x-2)=0$ 0,25

لـ $y=0$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $(-\infty)$ 0,25

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x(e^x-2)=+\infty$ 0,25

لـ احتمال وجود مستقيم مائل بجوار $(+\infty)$ 0,25

2) دراسة اتجاه تغير f: f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لدينا حيث:

0,25 $f'(x)=e^x(e^x-2)+e^x\times e^x=e^{2x}-2e^x+e^{2x}$

0,25 $\to f'(x)=2e^{2x}-2e^x=2e^x(e^x-1)$

$*f'(x)=0 \to e^x=1 \to x=\ln 1=0;\ e^x>0$

0,25 $-\infty$ $-$ $0$ $+$ $+\infty$

0,25 $x\in]-\infty,0[ \to f'(x)<0 \to$ f متناقصة تماما على $]-\infty,0[$

0,25 $x\in]0,+\infty[ \to f'(x)>0 \to$ f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

* جدول تغيرات f:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | ↘ | $f(0)$ | ↗ | $+\infty$ |

0,5 +0,25 $f(0)=1(-1)=-1$.

3) كتابة معادلة المماس (T) عند $x_0=\ln 2$:

0,25 $(T): y=f'(\ln 2)(x-\ln 2)+f(\ln 2)$

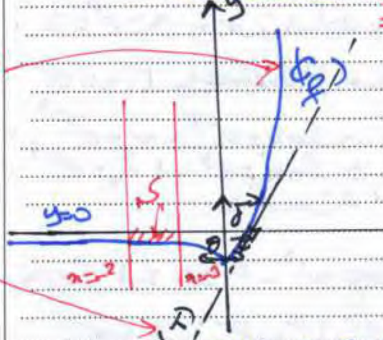
0,25 $f'(\ln 2)=2\times 2(2-1)=4$

0,25 $f(\ln 2)=2\times(2-2)=0$

0,25 $\to (T): y=4x-4\ln 2$

4) رسم (T) و $(C_f)$:

1




0,5

5) أ. إيجاد دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$: لدينا

0,5 $f(x)=e^x(e^x-2)=e^{2x}-2e^x$

0,5 $\to F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+C$ ; $C\in\mathbb{R}$

ب- حساب المساحة S: بما أن $(C_f)$ يقع تحت $(xx')$ في المجال $[-2;-1]$ فإن:

0,25 $S=-\int_{-2}^{-1}(f(x)-0)\,dx=-[F(x)]_{-2}^{-1}=F(-2)-F(-1)$

$=\frac{1}{2}e^{-4}-2e^{-2}-\frac{1}{2}e^{-2}+2e^{-1}$

0,25 $S=(\frac{1}{2}e^{-4}-\frac{5}{2}e^{-2}+2e^{-1})$; (u.a)

$\to S\approx 0,4$; (u.a)

انتهى