الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية عين الدفلى

امتحان البكالوريا التجريبي — ثانوية غالمي عبد القادر

الشعبة : رياضيات — دورة ماي 2024

اختبار في مادة الرياضيات — المدة:04 سا و30 د

أجب على أحد الموضوعين التاليين على الخيار

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام 0 ، 1 و 3 ويحتوي صندوق U_2 على أربع كريات تحمل الأرقام 4 ، 5 ، 8 و 8 ، نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق U_1.

فإذا كانت تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من U_2 وإذا كانت لا تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من U_2.

ليكن A " الكرية المسحوبة من U_1 تحمل الرقم 0 " و B " مجموع أرقام الكريات المسحوبة من U_2 عدد زوجي " .

1) أحسب الاحتمالين : $P_A(B)$ و $P(A\cap B)$ ثم بين أن $P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{6}$ ثم أحسب $P(B)$.

2) علما أن مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 زوجي ، ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 لا تحمل الرقم 0.

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من U_1و U_2 .

أ) عين قانون إحتمال المتغير العشوائي X ، ثم استنتج قيمة $P(X\le 160)$.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني :(05 نقاط)

1) جد العددين المركبين Z_1و Z_2 حيث : $\begin{cases} 2Z_1+iZ_2=1+i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}+2i)Z_1-Z_2=(1-\sqrt{3})i \end{cases}$

2) في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$نعتبر النقطتين Aو B ذات اللاحقتين $Z_A=1-i$ و $Z_B=2+\sqrt{3}+i$.

أ) أكتب z_A على الشكل الأسي . ب) بين أن $\frac{Z_B}{Z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج الشكل الأسي للعدد Z_B .

ج) هل توجد قيم لعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول ؟

3) أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{-\pi}{6}$.

4) نضع $Z_D=(1+\sqrt{3})-i$

أ) أحسب مساحة الدائرة (δ) التي قطرها $[BD]$. (مقدرة بوحدة المساحة)

ب) عين مجموعة النقط $M(Z)$ من المستوي حيث : $\arg\left[(Z-Z_B)^2\right]=\arg(Z_B)-\arg(Z_D)$.

ج) عين Z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $ADBC$ مستطيلا ، ثم أوجد Z_I لاحقة مركز ثقله I .

5) نعتبر المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقات Z من المستوي بحيث : $Z-\sqrt{3}=\lambda e^{\frac{-2\pi}{3}i}$ و λ عدد حقيقي موجب تماما .
تحقق من أن النقطة E ذات اللاحقة $Z_E=-3i$ تنتمي إلى (Δ) .ثم عين المجموعة (Δ).

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي بـ : $\begin{cases} u_0=7 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}(2u_n+v_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+2v_n) \end{cases}$

من أجل كل عدد طبيعي نعرف المتتالية (w_n) بـ n : $w_n=u_n-v_n$

1) أ)- بين أن المتتالية (w_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب)- أكتب عبارة w_n بدلالة n هل المتتالية (w_n) متقاربة؟

2)- أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

ب) استنتج أن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

3)- لتكن l النهاية المشتركة لهما ونعرف المتتالية (t_n) على $\mathbb{N}$ بـ $t_n=u_n+v_n$.

بين أن (t_n) ثابتة ثم استنتج قيمة l.

4)- أحسب المجموع $T=S_n+S'_n$ بدلالة n حيث : $S_n=v_0u_0-v_0^2+v_1u_1-v_1^2........+v_nu_n-v_n^2$

و $S_n=u_0^2-u_0v_0+u_1^2-u_1v_1-........+u_n^2-u_nv_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , نعرّف الدالة f_n على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f_n(x)=x(1-\ln x)^n & ; \ x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

(C_n) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

I) 1) أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_1 عند 0 من اليمين ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ب) جد كل من: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$.

2) أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f_1 ثمّ شكّل جدول تغيّراتها . ب) استنتج دالة أصلية للدالة $x\mapsto x\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

3) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x: $f_2'(x)=(1+\ln x)(-1+\ln x)$.

ب) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f_2 ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن المنحنى (C_2) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

5) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) ثمّ أرسم كلا منهما في المعلم السابق.

II) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف العدد الحقيقي I_n كما يلي: $I_n=\int_1^e f_n(x)\,dx$

1) أحسب I_1 ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

2) بيّن أن المتتالية (I_n) متناقصة ثمّ استنتج تقاربها .

3) باستعمال التكامل بالتجزئة, بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_{n+1}=\frac{n+1}{2}I_n-\frac{1}{2}$

أحسب بـ cm^2 مساحة حيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_1) , (C_2) و المستقيمين اللذين معادلتين لهما: $x=1$, $x=e$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

تعطى المعادلة: (E). . . $2024x-1444y=24$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) أحسب $PGCD(2024;1444)$ ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

2) جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) علما أن : $y_0-x_0=4$ ثم حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) .

3) جد القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$ حيث $(x;y)$ حل المعادلة (E) ثم جد الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) بحيث $PGCD(x;y)=6$.

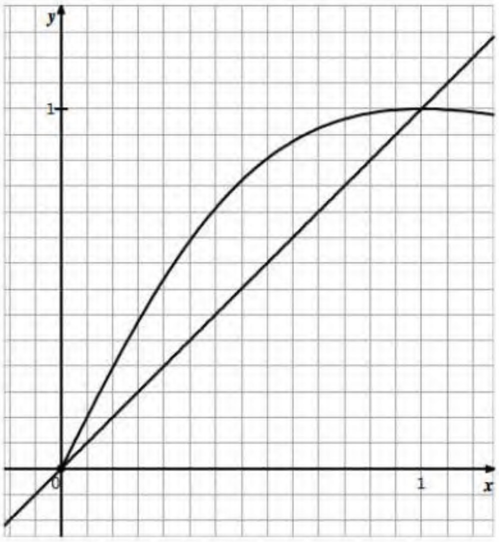
4) نضع : $u_n=361n+16$ و $v_n=506n+10$ حيث $n\in\mathbb{N}$ ، عين الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

5) أ) حلل العدد 2025 الى جداء عوامل أولية و استنتج قواسم 2025 التي مربعاتها قواسم لـ 2025.

ب) جد العددين الطبيعيين a و b حيث $4m^2-171d^2=2025$ حيث $d=PGCD(a;b)$ و $m=PGCD(a;b)$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{1+u_n^2}$.



1) في مايلي المنحنى البياني الممثل لدالتها المرفقة f حيث $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

مثل الحدود الأرعة الأولى على حامل محور الفواصل أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{2}\le u_n<1$.

ب) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n). بين أن (u_n) متقاربة، أحسب نهايتها.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<1-u_{n+1}\le\frac{2}{5}(1-u_n)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<1-u_n\le\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n) مرة أخرى.

4) نعرف المتتالية (v_n) على كمايلي: $v_n=1-u_n$.ونضع $S_n=v_0+v_1+v_2+...v_n$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<S_n\le\frac{5}{6}\times\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S_n}{n}$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2-2z+4)=0$.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها

z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث $z_A = 2$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$

أ) أكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم أنشئ النقط A ، B و C (يطلب ترك أثر الإنشاء) .

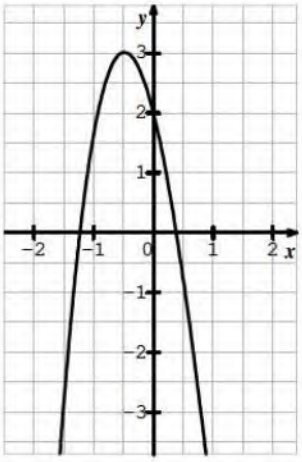
3) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\left(\frac{2}{z_C}\right)^{2024}$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث تكون النقطة H صورة العدد $\left(z_B\right)^n$ تنتمي الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x\sqrt{3}$.

4) (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقات z حيث $\arg\left(\overline{z} - 2\right) = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$ و k عدد صحيح.

أ) تحقق أن $B \in (\Gamma)$ ثم عين طبيعة (Γ) .

ب) بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

التمرين الرابع :(07 نقاط)



I) m عدد طبيعي معطى نعتبر الدالة f_m و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_m(x) = (x^3 - mx)e^{-x} + x + 1$.

(C_m) هو المنحنى الممثل لها في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x)$ ، و $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$.

ب) بين أن للمنحنيات (C_m) مستقيما مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ يطلب كتابة معادلته.

2) بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعينها .

II) نضع $m = 3$ ونعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = f_3(x)$.

1) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 3 - e^x$.(فيما يلي المنحنى الممثل لها في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$) .

أ) برر وجود حلين α و β للمعادلة $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حيث $-1.23 < \alpha < -1.22$ ، $0.38 < \beta < 0.39$.

ب) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) أ)بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -e^{-x}g(x)$.

ب) حدد إشارة $f'(x)$ ثم أدرس اتجاهات تغير الدالة f و أنجز جدول تغيراتها .

3) حدد الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)الذي معادلته $y = x + 1$.

4) أكتب معادلة المماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0 ثم المماس (T') في النقطة ذات الفاصلة 3 .

تحقق من أن (T) و (T') يشملان النقطة $A(0;1)$.

5) أرسم كلا من (T) ، (T') و (Δ) و المنحنى (C_3).

6) أ) نبين أن جميع المستقيمات (Δ_p) التي معادلاتها $y = px + 1$ تشمل النقطة $A(0;1)$. (حيث عدد حقيقي) .

ب) ناقش بيانيا حسب قيم p عدد اشارة حلول المعادلة $f(x) = px + 1$.

7) نعتبر الدالة h المعرفة بـ $h(x) = (x^3 - 3x)e^{-x}$.

أ) جد الأعداد الحقيقية a ، b ، c ، d بحيث تكون الدالة H المعرفة بـ $H(x) = (-x^3 + ax^2 + bx + c)e^{-x}$ دالة أصلية لـ h.

ب) أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد من المستوى (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \sqrt{2}$.