وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية البرج
ثانوية 18 فيفري الحمادية

السنـة الدراسيـة : 2023/2024
الدورة : 13ماي 2024
الشعبة : علوم تجريبية
الأستاذ: الحسين رميلي

الإمتحان التجريبي في مادة الرياضيات — **المدة : 3ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار موضوعا واحدا

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مع التبرير في كل حالة :

1)مجموعة حلول المتراجحة : $\ln(x^2 - 2x) \le \ln(12 - x)$ في المجموعة الأعداد الحقيقية هي :

أ) $S = [12;+\infty[$ ب) $S = [-3;0[\cup]2;4]$ ج) $S =]0;2[$

2)المتتالية I_n المعرفة على IN بـــ: $I_n = \int_n^{n+1} 3e^{1-x}dx$ هي متتالية هندسية أساسها يساوي :

أ) $\frac{1}{e}$ ب) $3e^2$ ج) $3\sqrt{e}$

3) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $-y' + 2y = 2$ هو الدالة h التي تحقق : $h(0) = 2024$ والمعرفة بالعبارة:

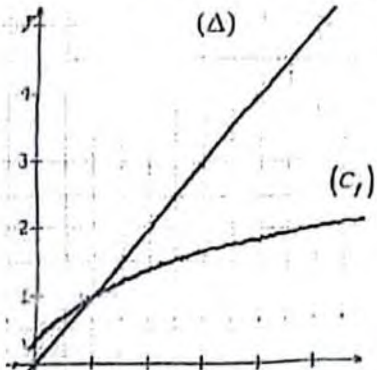
أ) $h(x) = 2023\,e^{2x} + 1$ ب) $h(x) = 2022\,e^{2x} + 2$ ج) $h(x) = 2024\,e^{2x} - 1$

4)حل المعادلة التفاضلية $y'' - e^{-x} - 2 = 0$ والتي تحقق $y(0) = 1$ و $y'(0) = 1$ هي الدوال:

أ) $y = -e^{-x} + 2x$ ب) $y = x^2 + e^{-x} + 2x - 1$ ج) $y = x^2 + e^{-x} + 2x$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

f دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني و (Δ) مستقيم معادلته $y = x$ انظر الشـ



نعتبر متتالية عددية (u_n) المعرفة بحدها $u_0 = 5$ ومن أجل كل $n \in IN$: $u_{n+1} = f(u_n)$

1)أ)أعد الرسم ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل مبرزا خطوط الرسم .

ب)أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

1) بين أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول،ثم برر تقاربها ؟

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فأن: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

ب) تحقق أن : $1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$ ، ثم أكتب u_n بدلالة n ، و أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

3)من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = \frac{4}{(u_0+1)^2} + \frac{4}{(u_1+1)^2} + ... + \frac{4}{(u_n+1)^2}$.

أ)أحسب المجموعين S_1 و S_2 حيث: $S_1 = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و، $S_2 = (v_0)^2 + (v_1)^2 + ... + (v_n)^2$.

ب)استنتج حساب المجموع S_n .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

يحتوي صندوق u_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات خضراء وصندوق أخر u_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 2 كرية خضراء،لا يمكن التمييز بينها عند اللمس.

نقوم بسحب كرية واحدة من الصندوق u_1 ونضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كريتين في أن واحد من الصندوق u_2

نرمز للحدث A :سحب كرية حمراء من الصندوق u_1 ، و للحدث B :سحب كريتين حمراوين من الصندوق u_2

1) أحسب احتمال $p(A)$ و $p(A \cap B)$. (1)

2) تحقق أن : $p(B) = \frac{11}{35}$ ، هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل.

3) علما أن الكريتين المسحوبتين من u_2 حمراوين ، ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من u_1 حمراء (0,5)

4) نفرغ محتوى الصندوق u_1 والصندوق u_2 في صندوق أخر u_1 ثم نسحب عشوائيا 3 كريات في أن واحد من الصندوق u_1 بحيث يربح اللاعب $10\,DA$ عند كل سحبة لكرية خضراء ، ويخسر $5\,DA$ لكل سحبة لكرية حمراء

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع أرباح اللاعب .

أ) بين أن قيم المتغير العشوائي X هي : $\{-15;0;15;30\}$ (1)

ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X . هل هذه اللعبة مربحة ؟ علل . (1)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على IR^* بـ: $g(x) = x^2 - \ln x^2$

1) بين أن الدالة g زوجية . (0,5)

2) أ) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ،ثم استنتج اتجاه تغيرها على IR^* . (1)

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g على IR^* . (0,5)

3) إستنتج أنه من أجل كل x من IR^* فان $g(x) \geq 1$. (0,5)

لتكن الدالة f على المجال IR^* بـ: $f(x) = 1 + x + \frac{-1 + \ln x^2}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في م م متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ وفسر النتيجتين بيانيا ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. (1)

2) أ) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من IR^* فان : $f'(x) = \frac{g(x) + 3}{x^2}$. (0,5)

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها . (0,75)

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1 + x$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) . (1)

4) أحسب $f(x) + f(-x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا . (0,5)

5) بين أن (C_f) يقبل مماس (T) يمر بالنقطة $A(0;1)$ ويمسه في نقطتين معادلته: $y = ax + 1$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه. (0,5)

6) أرسم كل من (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) (1)

7) أ) m وسيط حقيقي ،بين أن المستقيمات (Δ_m) ذو المعادلة $y = mx + 1$ تمر من النقطة A ،

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون للمعادلة $f(x) = mx + 1$ أربع حلول متمايزة .

8) أ) بين أن: $x \mapsto (\ln x)^2$ دالة أصلية لدالة $x \mapsto \frac{\ln x^2}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$. (0,25)

ب) أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = e$ و $x = e^2$ و $y = 1 + x$ (0,5)

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

التحق أحد الطلبة بثانوية خاصة فأراد مدرسوه للمواد المتميزة لختبار مستواه الدراسي فقاموا بوضع 9 أسئلة في أظرفة متماثلة بصندوق غير شفاف ، 3 منها خاصة بمادة الرياضيات ،و 2 منها خاصة بمادة الفيزياء و 4 خاصة بمادة العلوم الطبيعية ، وعلى هذا الطالب أن يسحب عشوائيا ثلاثة أظرفه على التوالي دون إرجاع للإجابة على الأسئلة الموجودة داخلها ، نعتبر الحوادث الآتية:

A : الأظرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لنفس المادة ، C : الأظرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لمادتين فقط

B : الأظرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لمواد مختلفة ،

1) أحسب : $p(A)$ ، $p(B)$ ثم بين أن : $p(C) = \dfrac{55}{84}$.

2) أحسب احتمال الحدث D الظرف المسحوب الأول يحتوي على لسئلة لمادة الرياضيات .

3) علما أن الأظرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لمواد مختلفة ،ماحتمال ان يكون الظرف المسحوب الأول لمادة للرياضيات

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد مواد الاختبار .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) عرف قانون لحتمال المتغير العشوائي X .

ج) أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X ، ثم استنتج قيمة $E(2024X + 1962)$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = \dfrac{7}{4}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{3}{8}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n > \dfrac{3}{4}$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و برر أنها متقاربة ، ثم استنتج أن: $u_n \leq \dfrac{7}{4}$.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة على IN كمايلي : $v_n = \alpha\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left(u_n - \dfrac{\alpha}{4}\right)$

- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{3}$.

فيما يلي نأخذ $\alpha = 3$

1) أ) عبر عن v_n بدلالة n .

ب) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{3}{4}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2) أ) عبر عن P_n بدلالة n حيث : $P_n = \ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \ldots \times v_n)$

ب) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث : $P_n = 4949 \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

3) أحسب S_n بدلالة n :حيث : $S_n = \dfrac{v_0}{u_0 - \dfrac{3}{4}} + \dfrac{v_1}{u_1 - \dfrac{3}{4}} + \ldots + \dfrac{v_n}{u_n - \dfrac{3}{4}}$.ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z+1-i)(z^2+2z+4)=0$.

نعتبر المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$، ولتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=-1+i$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$.

2) أكتب العدد $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{2z_A}{\sqrt{2}z_B}\right)^n$ حقيقي سالب، وبين أن: $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2024}+\left(\frac{z_C}{2}\right)^{1441}=-1$.

4) أ) عين وأنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z+1-i|=|z+\sqrt{3}+i|$.

ب) عين وأنشئ (δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث العدد: $\frac{z-z_B}{z-z_C}$ تخيلي صرف.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على IR بـ: $g(x)=2+(2-x)e^x$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث: $\alpha\in]2,21;2,23[$

ب) حدد من اجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج اشارة $g(-x)$ على IR

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x)=\frac{x^2}{1+e^{-x}}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وفسر النهاية الأخيرة بيانيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل x من IR فإن: $f'(x)=\frac{xg(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.

ب) بين أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\alpha;0[$ ومتزايدة على المجالين $]-\infty;-\alpha[$ و $]0;+\infty[$ وشكل جدول تغيراتها

3) بين أن: $f(-\alpha)=\alpha(\alpha-2)$ ، ثم جد حصر للعدد $f(-\alpha)$.

4) بين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حل وحيد β حيث: $\beta\in]1,1.2[$.

5) ليكن (Γ) المنحني الممثل للدالة المعرفة على IR بـ: $x\mapsto x^2$

- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)=0$ ثم فسر النتيجة بيانيا ،ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (Γ) و (C_f)

6) أ) عين نقاط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات ثم أرسم كل من (Γ) و (C_f) .(نأخذ $f(-\alpha)\approx0,48$)

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة $f(x)=x^2+\ln(m)$

7) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من IR فإن: $0\le f(x)\le x^2$.

ب) استنتج حصر للعدد A الذي يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات $y=0$ ، $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الثاني

* الأستاذ:الحسين رميلي" " بالتوفيق في شهادة البكالوريا *