ثانوية أحمد بن بلة –آفلو–

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي

الشعبة : علوم تجريبية

الموسم الدراسي: 2023 – 2024

دورة ماي 2024

أستاذ المادة: أنس مُعطِيات

اختبار في مادة الرياضيات

المدة: 3 ساعات و 30 دقيقة

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{4}{u_n + 3}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 < u_n \leq 0$

2) ادرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = e^{u_0 v_0} \times e^{u_1 v_1} \times e^{u_2 v_2} \times \cdots\cdots \times e^{u_n v_n}$

– بيّن أن $S_n = e^{\frac{-n^2-n}{4}}$ ، هل (S_n) متتالية متقاربة؟

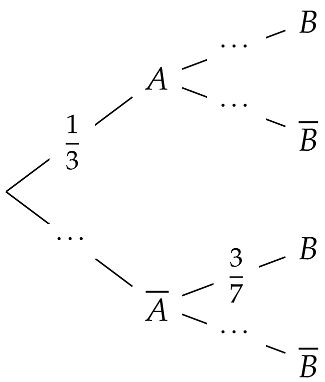
التمرين الثاني (4 نقاط)

يحتوي صندوق U على 3 كريات حمراء و كريتين سوداوين ، و يحتوي صندوق V على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء (كل الكريات متماثلة و لانميّز بينها باللمس).

نرمي زهرة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة ، إذا تحصلنا على رقم مضاعف لـ 3 نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U ، وفي باقي الحالات نسحب كرتين على التوالي و بدون إرجاع من الصندوق V.

نعتبر الحادثتين: A: الحصول على رقم مضاعف لـ 3 و B: الحصول على كرتين من نفس اللون

1) بين أن إحتمال سحب كرتين من نفس اللون من الصندوق V هو $\dfrac{3}{7}$



2) أ) اكمل شجرة الإحتمالات المقابلة ، ثم أحسب $P(B)$.

ب) علماً أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ما إحتمال أن تكونا من الصندوق V؟

3) نعتبر اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha\, DA$ (حيث α عدد حقيقي موجب تماماً) فإذا سحب اللاعب كرتين من نفس اللون يربح $100\, DA$ و إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يخسر ما دفعه.

و ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يمثل قيمة ربح أو خسارة اللاعب.

– عيّن قيم المتغيّر العشوائي X ، ثم بيّن أن أمله الرياضياتي $E(X) = \dfrac{880}{21} - \alpha$

التمرين الثالث (4 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 1+i$ و $z_B = \sqrt{3}+i$

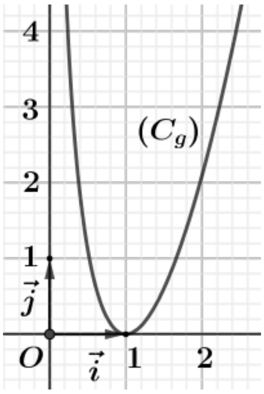
1) اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي. ثم استنتج الشكل الأسي للعدد $\frac{z_A}{z_B}$.

2) اكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3) اكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{\sqrt{2}\,z_A}{z_B}\right)^{2024}$ ، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عدداً حقيقياً موجباً.

4) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث $z = \sqrt{3}+i+e^{i\theta}$ و θ تمسح $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع (8 نقاط)



I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2-1+(\ln x)^2-2\ln x$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ كما هو موضح في الشكل المقابل.

– احسب $g(1)$ ، ثم بقراءة بيانية حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$.

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانياً.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

د) اكتب معادلة المماس (T) عند نقطة الإنعطاف.

3) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بيّن أنه توجد نقطتيين من (C_f) يكون عندهما المماس يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين فاصلتيهما(معدلتا المماسين غير مطلوبتين).

5) بيّن أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,34 < \alpha < 0,35$

6) ارسم كلاً من (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f).

7) أ) بيّن أن الدالة $x \mapsto \ln x - \frac{1}{3}(\ln x)^3$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1-(\ln x)^2}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) احسب بالـ cm^2 مساحة الحيّز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات (Δ) ، $x = e^{-1}$ و $x = e$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة و لا نميّز بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2 و أربع كريات سوداء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 ، 2.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق و نعتبر الحوادث التالية:

A: سحب ثلاث كريات من نفس اللون.

B: سحب ثلاث كريات مختلفة الأرقام مثنى مثنى.

C: سحب كرية حمراء على الأكثر.

1) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$.

2) بيّن أن $P(A \cap B) = \frac{1}{40}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$ و $P_A(B)$. هل A و B حادثتان مستقلتان؟

3) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق.

أ) برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{0;1;2;3\}$.

ب) عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الثاني (4 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $(z-1)(z^2+4z+7)=0$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب:

$z_A = 1$ ، $z_B = -2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ و نضع: $L = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) اكتب العدد L على الشكل المثلثي.

2) أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) استنتج أن C هي صورة B بدوران R يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع ، ثم حدّد بدقة طبيعته.

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|iz - i| = \left|\overline{z} + 2 + i\sqrt{3}\right|$

– عيّن مجموعة النقط (Γ) ، ثم استنتج صورتها بالدوران R.

التمرين الثالث (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > e^2$

2) ادرس إتجاه تغير المتتالية (u_n). هل (u_n) متقاربة ؟

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln(u_n) - 2$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

ب) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) احسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots\cdots \times u_n$

التمرين الرابع (8 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = 2x + \frac{1}{e^x - 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (حيث $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1cm$).

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانياً.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 2x)$ ، ثم فسّر النتيجتين بيانياً.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين $(\Delta_1) : y = 2x$ و $(\Delta_2) : y = 2x - 1$.

3) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{0\}$ ، $f'(x) = \frac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$

ب) استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; -\ln 2]$ و $[\ln 2; +\infty[$ و متناقصة تماماً على كل من المجالين $[-\ln 2; 0[$ و $]0; \ln 2]$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ أحسب $f(-x) + f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.

5) ارسم كلاً من (Δ_1) ، (Δ_2) و المنحنى (C_f). **(يعطى** $f(\ln 2) = \ln 4 + 1$ و $f(-\ln 2) = -\ln 4 - 2$ **)**

6) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = 2x + m$.

7) أ) بيّن أن الدالة $x \mapsto -x + \ln(e^x - 1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب) احسب $\int_{\ln 2}^{1} \frac{dx}{e^x - 1}$ و فسّر النتيجة بيانياً.

8) h دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = \left|f(x)\right|$

– اشرح كيفية رسم منحنى الدالة h إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

انتهى الموضوع الثاني