الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مؤسسة التربية والتعليم الزهور الخاصة

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي

دورة: 2024

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

I) يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 3. ويحتوي صندوق U_2 على أربع كريات تحمل الأرقام 4، 5 ، 8 ، 8. جميع الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللّمس.

نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق U_1.

- إذا كانت الكرية المسحوبة من U_1 تحمل الرّقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الصندوق U_2
- إذا كانت الكرية المسحوبة من U_1 لا تحمل الرّقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق U_2

نعتبر الحادثتين التّاليتين: A : " الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 تحمل الرقم 0 "

S : " مجموع أرقام الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 عدد زوجي"

1) أ) أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التّجربة.

ب) احسب $P_A(S)$ و $P(A\cap S)$.

جـ) تحقّق أنّ: $P(\overline{A}\cap S)=\dfrac{1}{6}$ ثمّ استنتج $P(S)$.

2) عِلْماً أنّ مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 زوجي ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من U_1 لا تحمل الرقم 0.

II) نضع محتوى الصندوقين في صندوق جديد U_3 ثمّ نسحب عشوائيا على التّوالي بدون إرجاع 3 كريات.

1) احسب احتمال الحادثة C: " الحصول على كرية واحدة فقط تحمل رقما أوّليا ".

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات من U_3 عدد الكريات التي تحمل رقما زوجيا.

أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، ثمّ استنتج $P(|X-1|<1)$.

ب) احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة $4x-5y=33\cdots(E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ) عيّن الأعداد الصّحيحة x بحيث: $4x\equiv 33[5]$

ب) استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث: $2<x_0<10$ ثمّ حل المعادلة (E).

جـ) عيّن الثّنائية الوحيدة $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ حلا للمعادلة (E) بحيث: $PGCD(a;b)=3$ و $PPCM(a;b)=135$.

2) عيّن الأعداد الصّحيحة α حلول الجملة $\begin{cases}\alpha\equiv 55[5]\\ \alpha\equiv 22[4]\end{cases}$.

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $10^{10n}+16^{5n+4}+38^{20n+1}$ على 11.

ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث : $\begin{cases} n-5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$

4) N العدد الطبيعي الذي يكتب في نظام التّعداد ذي الأساس أربعة كما يلي: $\overline{abbaba}^{4}$.

– عيّن a و b حتى يقبل العدد N القسمة على 33 ثمّ اكتب N في النّظام العشري,

التمرين الثالث: (05 نقاط)

α عدد حقيقي يختلف عن -2.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0=\alpha+2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{(\alpha+2)u_n}{u_n+2-\alpha}$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بِـ: $v_n=\dfrac{u_n}{u_n-2\alpha}$,

I) نضع $\alpha=1$:

1) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3-\dfrac{3}{u_n+1}$.

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2<u_n<4$.

ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ برّر إجابتك.

2) أ) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\dfrac{6}{3-3^{-n}}$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثمّ عيّن أصغر عدد طبيعي n يحقّق : $v_n \geq e^{66}$.

3) احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\cdots+\dfrac{1}{u_n}$.

II) نفرض أنّ: $-2<\alpha<0$

1) أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{2+\alpha}{2-\alpha}$ يطلب تعيين حدّها الأوّل.

ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة α و n . هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدّالتين العدديتين g و h المعرفتين على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1-\ln x$ و $h(x)=x+(x-2)\ln x$

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $(x-1)\ln x \geq 0$ ، ثمّ استنتج أنّ: $h(x)>0$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول $2cm$).

1) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f(x)=1+x\ln x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النّتيجة الثّانية هندسيا.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{h(x)}{x}$.

3) استنتج ممّا سبق اتجاه تغيّر الدالة f على $]0,+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

4) أ) اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النّقطة التي فاصلتها 1.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f(x)-x=(-1+\ln x)g(x)$.

ج) ادرس إشارة $[f(x)-x]$ على المجال $]0,+\infty[$ ثمّ استنتج الوضع النّسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .

5) عيّن العدد الحقيقي β من المجال $]1,+\infty[$ والذي يحقّق $h(\beta)=\beta$ ، ثمّ استنتج أنّ (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) يطلب تعيين معادلة له.

6) برهن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,4<\alpha<0,5$.

7) أنشئ في المعلم السّابق المماسين (T) و (T') والمنحنى (C_f) .

8) باستعمال المنحنى (C_f)،عيّن قيّم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ ثلاثة حلول مختلفة.

الموضوع الثاني (شعبة رياضيات)

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأوّل u_1.

1) أ) تحقّق أنّ: $u_1^2+u_2^2+u_3^2=(u_1-u_2+u_3)(u_1+u_2+u_3)$

ب) عيّن الحدود u_1 ، u_2 و u_3 عِلْماً أنّ: $\begin{cases} u_1^2+u_2^2+u_3^2=2275 \\ u_1+u_2+u_3=65 \end{cases}$

جـ) استنتج أساس المتتالية (u_n) ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n=5\times 3^{n-1}$.

2) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 8 .

ب) بيّن أنّ العدد $u_{2024}-u_{1445}-2$ يقبل القسمة على 8

3) x و y عددان صحيحان، نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التّالية: $(E)\cdots 7u_1x-u_3y=u_2$

أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ب) عيّن الثّنائية $(x;y)$ حلا المعادلة (E) بحيث: $y<x<10$

4) نفرض أنّ x و y عددان طبيعيان. نضع: $d=PGCD(x;y)$ بحيث، $(x;y)$ حلا لِ (E)

أ) عيّن القيم الممكنة لِ d .

ب) عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلا لِ (E) بحيث: $d=3$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 12 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللّمس، منها α كرية بيضاء و β كرية سوداء، حيث α و β عددان طبيعيان غير معدومان.

1) نسحب من الصندوق وبصفة عشوائية كريتين على التّوالي دون إرجاع .

نعتبر الحادثة E : " الحصول على كريتين من لونين مختلفين " .

– عيّن الثّنائيتين $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الطبيعية إذا علمنا أنّ: $P(E)=\dfrac{16}{33}$.

2) نضع: $\alpha=8$ و $\beta=4$

نسحب الآن من الصندوق ثلاث كريات على التّوالي مع إرجاع الكرية المسحوبة إلى الصندوق قبل السّحب الموالي.

احسب احتمال الحوادث التالية: A : " من بين الكريات المسحوبة، الأولى فقط بيضاء "

B : '' من بين الكريات الثلاث المسحوبة، واحدة بالضّبط بيضاء "

C : " من بين الكريات الثلاث المسحوبة توجد واحدة على الأقل بيضاء وواحدة على الأقل سوداء "

3) نقترح اللّعبة التّالية للمشاركة يدفع اللاعب $200DA$ ثمّ يسحب في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق.
يربح اللاعب $100DA$ عن كلّ كرية بيضاء تحصل عليها خلال السّحب.
نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات الرّبح الصافي أو خسارة اللاعب.
أ) عيّن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.
ب) عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$. هل اللّعبة عادلة ؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-6z+10=0$.

ب) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z التّالية: $\left(\overline{z}+2\right)^2-6\left(\overline{z}+2\right)+10=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النّقط A ، B ، C ، D

التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=3-i$ ، $z_B=3+i$ ، $z_C=1+i$ و $z_D=1-i$

أ) أكتب على الشّكل الأسي العدد المركب $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}$.

ب) بيّن أنّ النّقطة D هي صورة النّقطة B بدوران R يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) E النّقطة التي لاحقتها $z_E=7-3i$ و F صورتها بالدوران R.

أ) تحقّق أنّ لاحقة F هي: $z_F=5+3i$

ب) عيّن لاحقة النّقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$

ج) استنتج بدقّة طبيعة الرباعي $AEHF$

4) عيّن المجموعة (Γ) للنّقط M ذات اللاحقة z حيث: $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يمسح $\mathbb{R}_+$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2(x^2-x)e^{2x}$

1) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب) بيّن أنّ: $g'(x)=2(1-2x^2)e^{2x}$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1{,}05<\alpha<1{,}06$

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x، إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-1+(x+1)^2e^{-2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) أدرس الوضع النّسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(-x)$ ثمّ استنتج إشارة $f'(x)$.

ب) حدّد اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها

3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النّقطة التي فاصلتها 0.

4) نضع: $f(-\alpha)\approx -2{,}1$ ، أحسب $f(-2)$ ثمّ أرسم (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)

5) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $(x+1)^2e^{-2x}-e^m=0$ ذات المجهول الحقيقي x ثلاثة حلول.

6) الدالة h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(x+1)e^{-2x}$

أ) بيّن أنّ: $2h(x)+h'(x)-e^{-2x}=0$ ثمّ أحسب $\int_{-1}^{\lambda}h(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي أكبر تماما من -1

ب) باستعمال المكاملة بالتّجزئة ونتيجة السّؤال 6. أ)، أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-1$ و $x=\lambda$.