اختبار في مادة : الرياضيات **المدة : 3 سا و 30 د**

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

❶ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0=8$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{u_n+4}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .ثم استنتج تقاربها .

❷ لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=1+\dfrac{a}{u_n}$

أ) عين قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{4}{3}$ ، يطلب تعيين حدها الاول.

ب) نضع $a=1$ أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم بين أنه أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\dfrac{1}{\dfrac{9}{8}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n-1}$

جـ) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+....+\dfrac{1}{u_n}$ و المجموع S'_n : $S'_n=v_0+3v_1+...+3^nv_n$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ -1 ، 1 و 2 و خمسة كرات سوداء مرقمة بـ -1 ، 0 ، 1، 2 و 2 وكرتان خضراء مرقمتان بـ -1 ، 0. نسحب عشوائيا ثلاث كرات في ان واحد من الكيس .

❶ أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " الكرات المسحوبة مختلفة الالوان "

B " الكرات المسحوبة لها نفس الرقم "

C " مجموع ارقام الكرات المسحوبة معدوم"

❷ علما أن الكرات المسحوبة مختلفة الالوان ما احتمال أن تكون لها نفس الرقم ؟

❸ هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ برر جوابك

❹ ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بأكبر رقم تحمله الكريات المسحوبة .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضياتي و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

جـ) أحسب احتمال الحادثة : $X^2+2X\leq 0$

اقلب الصفحة

التمرين الثالث: ﴿ 04 نقاط ﴾

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول Z : $\left(\bar{z}-2-2i\right)\left(z^2-2z+2\right)=0$.

II) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B ، C و I و التي لواحقها على الترتيب $Z_A=1+i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ ، $Z_C=2Z_B$ ، $Z_I=3$.

❶ أكتب على الشكل المثلثي العدد Z_A ثم استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين Z_B ، Z_C .

❷ أحسب $\left|z_A-z_I\right|$ ، $\left|z_B-z_I\right|$ ، $\left|z_C-z_I\right|$ ماذا تستنتج ؟.

❸ عن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا .

❸ أكتب العدد $\dfrac{Z_C-3}{Z_A-3}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث IAC .

❹ عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z في كل حالة :

أ) $\left|iz-2-2i\right|=\left|z-1-i\right|$ ب) $Z=3+ke^{\frac{\pi}{3}i}$ مع k يمسح $\Re_+^*$

التمرين الرابع: ﴿ 07 نقاط ﴾

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^2(1-2\ln x)$

❶ أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❷ بين أن المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.89\le\alpha\le1.90$.ثم استنتج إشارة $g(x)+1$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

و ليكن $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$.

❶ أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا .

❷ أ) بين انه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x\left(1+x^2\right)^2}$.

ب) أستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❸ بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

❹ بين أن المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل مماسا T عند نقطة ذات الترتيبة 0، ثم أكتب معادلة المماس T

❺ أحسب f 1 أنشئ كلا من T و المنحنى $\mathcal{C}_f$.

❻ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{2}x+m$.

❼ لتكن h دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $h(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{1+(x+1)^2}+2$ ، $\mathcal{C}_h$ تمثيلها البياني .

بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول المنحنى $\mathcal{C}_f$ إلى المنحنى $\mathcal{C}_h$ ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{-5}{2u_n-7}$

① أ) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n: $1\le u_n\le 2$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

② أ) أثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-1\le\frac{4}{5}(u_n-1)$

ب) تحقق من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n-1\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

③ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n=\frac{2u_n-2}{2u_n-5}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

ب) أكتب عبارة v_n و u_n بدلالة n.

④ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{2u_0-5}+\frac{1}{2u_1-5}+........+\frac{1}{2u_n-5}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على **ثلاث** كريات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 ، و**أربع** كريات سوداء مرقمة من 4 إلى 7 و **ثلاث** كريات مرقمة من 8 الى 10 لانفرق بينها عند اللمس. نسحب ثلاث كرات على التوالي دون إعادة الكرية المسحوبة إلى الصندوق.

نعتبر الحوادث التالية: A " الكريات المسحوبة من الوان مختلفة "

B " الحصول على كريتين بيضاء على الاقل "

C " الكرات المسحوبة تحمل ارقاما فردية "

D " الكرات المسحوبة تحمل ارقاما تشكل حدودا متتابعة لمتتالية هندسية متزايدة تماما "

① بين أن $p(A)=\frac{19}{20}$ ثم أحسب $p(B)$ ، $p(C)$ و $p(D)$.

② بين أن : $p(C\cap D)=\frac{1}{720}$ ، ثم استنتج $p(C\cup D)$

③ علما أن الكرات المسحوبة تحمل أرقاما تشكل حدودا متتابعة لمتتالية هندسية متزايدة تماما ما احتمال أن تكون أرقامها فردية ؟

④ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

أ) ـ عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) ـ أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ، ثم استنتج $E(1444X-2023)$.

اقلب الصفحة

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد فقط صحيح .عين الجواب الصحيح معلّلا اختيارك :

① حل المعادلة (E) ذات المجهول Z حيث (E) : $z=\frac{6-z}{3-z}$ هو:

أ $-2-\sqrt{2}i$ ب $2+\sqrt{2}i$ جـ $1-i$

② العدد المركب L حيث $L=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2022}$ هو عدد :

أ حقيقي موجب   ب حقيقي سالب   جـ تخيلي صرف موجب

③ لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى حيث : $|iz-1-i|=3$ المجموعة (Γ) هي :

أ دائرة نصف قطرها 3 و لاحقة مركزها $1-i$ ب دائرة نصف قطرها $\sqrt{3}$ و لاحقة مركزها $1+i$ جـ دائرة نصف قطرها 3 و لاحقة مركزها $-1+i$

④ الجذران التربيعيان للعدد المركب w حيث $w=-2-2i\sqrt{3}$ هما :

أ $1+\sqrt{3}i$ و $1-\sqrt{3}i$ ب $1+\sqrt{3}i$ و $-1-\sqrt{3}i$ جـ $1-\sqrt{3}i$ و $-1+\sqrt{3}i$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re$ كما يلي $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$ و ليكن $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $O;\vec{i};\vec{j}$. $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

① أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2 e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

② بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.

③ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب لـ $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$ ،ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $\mathcal{C}_f$ و المستقيم (Δ).

④ عين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

⑤ بين أن المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

⑥ أحسب $f(0)$ و $f(3)$ ، ثم أنشئ كل من (Δ)، (T)، $\mathcal{C}_f$.

⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

⑧ أ) بين أن الدالة G المعرفة بـ : $G(x)=-(x^2+2x+3)e^{-x+1}$ دالة أصلية للدالة $g(x)=(x^2+1)e^{-x+1}$ على $\Re$

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $\mathcal{C}_f$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الثاني

(مع تمنياتنا لكم بالتوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا دورة جوان 2023)