الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2023

شعبة: العلوم التجريبية — ثانوية عياش مقلاتي الحاسي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــــــــوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\left(\dfrac{1+\sqrt{u_n}}{2}\right)^2$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$.
2. بين أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{4}\left(1-\sqrt{u_n}\right)\left(1+3\sqrt{u_n}\right)$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برر تقاربها.

II. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\sqrt{u_n}-1$.

1. أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)^2$ واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

2. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n=u_0+u_1+......+u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة منها 6 كريات بيضاء مرقمة بـ: $0,2,2,2,2,4$ و كريتين سوداوين مرقمتين بـ: $0,1$.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس و نعتبر الحدثين A و B بحيث: الحدث A : الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون و الحدث B : الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 4.

1. احسب كلا من $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب
2. بين أن $P(A\cap B)=\dfrac{1}{8}$، ثم استنتج كلا من $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب أصغر الأرقام المحصل عليها أو يساويها.
   - ✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.
4. نسحب الآن عشوائيا n كرية على التوالي بالإرجاع بحيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ ونسمي C الحدث الحصول على n كرية سوداء.
   - ✓ بين أن $P(C)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$، ثم أوجد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $P(\overline{C})\ge 0,99$.

التمرين الثالث: 05 نقاط

I. جد العددين المركبين α و β بحيث: $\begin{cases}2\overline{\alpha}-\sqrt{3}\,\overline{\beta}=3\sqrt{3}+i\\ \overline{\alpha i-\beta}=0\end{cases}$.

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$ و $z_C=-1+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

1. اكتب z_B على الشكلين المثلثي و الجبري، ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

2. أ) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}z_A}\right)^n$ تخيليا بحتا سالبا تماما.

ب) تحقق أن B صورة A بتحويل نقطي S يطلب تعيين طبيعته و تحديد عناصره المميزة.

3. أ) بين أن $\frac{z_C}{z_A}=i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث AOC.

ب) تحقق أن $z_B-z_A=z_C$ ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $AOCB$.

ج) عين طبيعة المجموعة (E) مجموعة النقط $M(Z)$ بحيث $\left|\frac{\overline{z}-\sqrt{3}+i}{\frac{\sqrt{2}}{2}iz}\right|=\left|\frac{z_B}{z_A}\right|$ ، ثم عين صورتها بالتحويل النقطي S.

<u>**التمرين الرابع: 07 نقاط**</u>

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\left(x^2-3x+1\right)e^{2x}+1$

و الجدول المقابل يمثل جدول تغيراتها.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$		$1-e$		$1+5e(-2)$		1

1. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما العدد 2 و الآخر α بحيث $0{,}4<\alpha<0{,}5$.
2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\left(-x^2+x\right)e^{2-x}+x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

2. بين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثيتيهما.
3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

ب) بين أن (C_f) يقبل مماسين موازيين لـ (Δ).

4. احسب $f(0)$، ثم أنشئ (Δ) و مثل (C_f) على المجال $[0;+\infty[$. يعطى $f(\alpha)\approx 1{,}65$.
5. أ) بين أن الدالة H المعرفة بـ: $H(x)=\left(x^2+x+1\right)e^{2-x}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\left(-x^2+x\right)e^{2-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب المساحة A للحيز المحدد بـ: (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

انتهـــــــــــى الموضوع الأول

الموضـــــوع الثانـــــــي

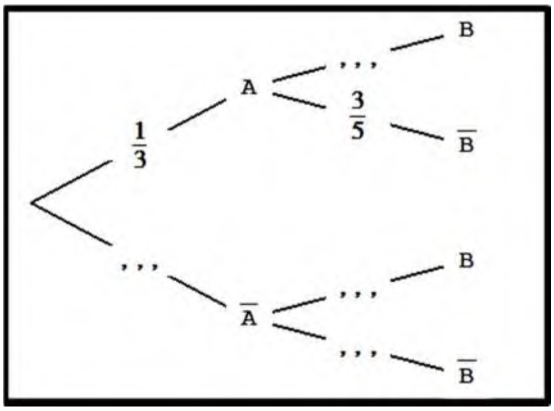
التمرين الأول: 04.5 نقطة

يحتوي وعاء U على ثلاث كريات متماثلة مرقمة بـ: $-1,0,1$، و يحتوي و عاء V على خمس كريات لا نفرق بينها باللمس منها ثلاث كريات حمراء و كريتين بيضاوين.

نسحب عشوائيا كريتين على التوالي بالإرجاع من الوعاء U فإذا كان مجموع رقميهما معدوما نسحب عشوائيا كريتين على التوالي بدون إرجاع من الوعاء V و إذا كان مجموع رقميهما غير معدوما نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الوعاء V.

نسمي A الحدث: الحصول على كريتين مجموع رقميهما معدوم من الوعاء U.

نسمي B الحدث: الحصول على كريتين من نفس اللون من الوعاء V.



1. بين أن $P(A)=\dfrac{1}{3}$ و أن $P_A\left(\overline{B}\right)=\dfrac{3}{5}$.
2. انقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة.
3. احسب كلا من $P\left(\overline{B}\right)$ و $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$، ثم استنتج $P_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right)$.
4. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بعملية سحب كريتين من نفس اللون من الوعاء V العدد α^2 و يرفق بسحب كريتين مختلفتين في اللون العدد α بحيث α عدد صحيح غير معدوم.

أ) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، ثم احسب بدلالة α أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب) عين قيمة العدد الصحيح α حتى يكون $E(X)=-\dfrac{1}{5}$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+\dfrac{5}{3} \end{cases}$.

1. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n<\dfrac{5}{2}$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنها متقاربة.

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\dfrac{5}{2}-u_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{2}-u_n\right)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\dfrac{5}{2}-u_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\left(\dfrac{5}{2}-u_0\right)$، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\ln\left(u_{n+1}-u_n\right)$.

أ. بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-\ln 3$ يطلب حساب حدها الأول، ثم اكتب v_n بدلالة n.

ب. احسب بدلالة n الجداء P_n بحيث: $P_n=(u_1-u_0)\times(u_2-u_1)\times\ldots\ldots\times(u_{n+1}-u_n)$.

التمرين الثالث: 04.5 نقطة

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $A\left(z_A=e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$، $B\left(z_B=-\overline{z_A}\right)$، $z_C=-i$.

1. نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة A و زاويته $\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$ و الذي يحول النقطة $M(Z)$ إلى النقطة $M'(z')$.

أ) عين الكتابة المركبة للدوران R، ثم تحقق أنه يحول النقطة C إلى النقطة B.

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC، ثم استنتج العناصر المميزة للدائرة المحيطة به.

ج) عين لاحقة النقطة D التي من أجلها يكون الرباعي $ABCD$ معينا.

2. بين أن $i=\left[\frac{1}{2}\left(z_B-\overline{z_A}\right)\right]^{2973}-\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^{1443}+\left(z_A\times z_B\right)^{2023}$.

3. عين طبيعة المجموعة (E) للنقط $M(z)$ بحيث: $Arg\left(\frac{z_C-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$.

4. ليكن S التحويل النقطي الذي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ بحيث: $z'=\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+z_C$.

أ) عين طبيعة التحويل النقطي S محددا عناصره المميزة.

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي $S\circ R$ محددا عناصره المميزة.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة و المتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ بحيث: $g(x)=x^3+3x-2$.

1. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن $0,5<\alpha<0,7$.
2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. الدالة f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1. تحقق أنه من أجل $x>-1$: $f(x)=\ln(x+1)+\ln\left(1-\frac{x}{x^2+1}\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
2. أ) بين أنه من أجل $x>-1$: $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^3+1)(x^2+1)}$، ثم تحقق أنه من أجل $x>-1$: $x^3+1>0$.

ب) ادرس حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. بين أن $f(\alpha)=\ln\left(\frac{3}{2}\alpha\right)$، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
4. الدالة h معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=\ln(x+1)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المستوي السابق.

أ) استنتج أن (C_h) صورة المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto\ln x$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-h(x)\right]$، ثم فسر النتيجة بيانيا و ادرس الوضع النسبي لـ (C_h) و (C_f).

5. أ) احسب $f(1)$ و مثل (C_h)، ثم مثل (C_f).

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m التي من أجلها المعادلة $f(x)=\ln(m)$ تقبل ثلاث حلول متمايزة.

انتهـــــــى الموضـــــــوع الثـــــانـــــي