

التمرين الأول : (06 نقاط)

- أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير :

(1)- مجموعة حلول المعادلة : $\text{Ln}(4x + 5) - \text{Ln}(x - 1) = 5\text{Ln}2 + \text{Ln}x$ هي $S = \left\{ \frac{-1}{8}, \frac{5}{4} \right\}$

(2)- لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = \text{Ln}(2e^{3x} + e^x + 5)$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد

و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) . (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) معادلته : $y = 3x + \text{Ln}2$ بجوار $+\infty$.

(3)- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\text{Ln}(x^{4046} + 1) - \text{Ln}2}{x - 1} \right) = 2023$ (يمكن حساب هذه النهاية باستعمال تعريف العدد المشتق)

(4)- مجموعة حلول المتراجحة : $3^{x+1} + \frac{2}{3^x} - 7 \leq 0$ هي $S = \left[-1, \text{Ln}\left(\frac{2}{3}\right) \right]$

(5)- حل المعادلة التفاضلية : $y' + 3y - 2 = 0$ التي تحقق الشرط : $f(0) = \frac{-1}{3}$ هو :

$$f(x) = \frac{-1}{e^{3x}} + \frac{2}{3}$$

التمرين الثاني : (06 نقاط)

(I)- لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = (ax + b)e^{\frac{-x}{2}}$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان . (C) تمثيلها البياني في

معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) . (T) هو المماس للمنحنى (C) عند النقطة $A(0, -4)$. كما هو موضح في الشكل المقابل



(1) - **بقراءة بيانية حدد مايلي :**

(أ) - $g(-1)$ ، $g(0)$ ، $g'(0)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. (ب) - معادلة المماس (T) .

(ج) - جدول إشارة $g(x)$ ، ثم جدول إشارة $g'(x)$.

(د) - قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m التي من أجلها المعادلة : $g(x) = \ln(m)$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

(2) - أثبت أن : $a = -4$ ، $b = -4$.

(3) - لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = -8(x + 3)e^{\frac{-x}{2}}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد

و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) . (أ) - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) - أثبت أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = -g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} .

شكل جدول تغيرات الدالة f .

(ج) - بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف W يطلب تعيين إحداثياتها ثم أكتب معادلة المماس (D) عند هذه النقطة .

التمرين الثالث : (08 نقاط)

(I) - لتكن الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = -x + 3 - \ln x$.

(1) - أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. (2) - أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3)- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2 < \alpha < 3$. استنتج إشارة $g(x)$ على D .

(II)- لتكن الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = -\text{Ln}x + \frac{\text{Ln}x - 2}{x}$.

. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1)- أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا ، ثم أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2)- أثبت أنه من أجل كل x من D : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة على D .

- شكل جدول تغيرات الدالة f على D .

(3)- أثبت أن : $f(\alpha) = \alpha - 4 + \frac{1}{\alpha}$.

(4)- (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h المعرفة على D بـ : $h(x) = -\text{Ln}x$ في المعلم المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(أ)- أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ، ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

(ب)- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) . (ج)- أنشئ (C_h) و (C_f) . (نأخذ : $f(\alpha) \approx -1.4$)

(III)- لتكن الدالة k المعرفة على \mathbb{R}^* بـ : $k(x) = -\text{Ln}|x| + \frac{\text{Ln}|x| - 2}{|x|}$. (C_k) هو التمثيل البياني في المعلم

المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(أ)- أثبت أن الدالة k دالة زوجية .

(ب)- اشرح كيفية إنشاء (C_k) انطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه .

الإجابة النموذجية + سلم التقييم :

التمرين الأول (06 نقاط)

(01.25 ن)..... : الإجابة خاطئة لأن :

$$Ln(4x + 5) - Ln(x - 1) = 5Ln 2 + Lnx$$

$$D =]1, +\infty[\text{ : ومنه}$$

$$. x \in D \text{ و } Ln(4x + 5) = Ln(x - 1) + 5Ln 2 + Lnx$$

$$. x \in D \text{ و } Ln(4x + 5) = Ln(x - 1)x + Ln 2^5 = Ln 32x (x - 1)$$

$$. x \in D \text{ و } 32x^2 - 36x - 5 = 0 \text{ ، } x \in D \text{ و } 4x + 5 = 32x^2 - 32x$$

$$S = \left\{ \frac{5}{4} \right\} \text{ : ومنه . } x_2 = \frac{5}{4} \text{ ، } x_1 = \frac{-1}{8} \notin D \text{ ، } \Delta = 1936$$

(01.25 ن)..... : الإجابة صحيحة لأن :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [Ln(2e^{3x} + e^x + 5) - 3x - Ln 2] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [Lne^{3x} (2 + e^{-2x} + 5e^{-3x}) - 3x - Ln 2] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [Lne^{3x} + Ln(2 + e^{-2x} + 5e^{-3x}) - 3x - Ln 2] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [3x + Ln(2 + e^{-2x} + 5e^{-3x}) - 3x - Ln 2] \end{aligned}$$

ومنه :

$$\text{ : لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [Ln(2 + e^{-2x} + 5e^{-3x}) - Ln 2] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Ln(2 + e^{-2x} + 5e^{-3x}) = Ln 2$$

(01.25 ن)..... : الإجابة صحيحة لأن :

$$. f'(1) = \frac{4046}{2} = 2023 \text{ ، } f'(x) = \frac{4046x^{4045}}{x^{4046} + 1} \text{ ، } f(1) = Ln 2 \text{ ، } f(x) = Ln(x^{4046} + 1) \text{ : نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{Ln(x^{4046} + 1) - Ln 2}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2023 \text{ : ومنه}$$

(01.25 ن)..... : الإجابة خاطئة لأن :

$$3^{x+1} + \frac{2}{3^x} - 7 \leq 0 \text{ يكافئ: } 3^{2x+1} + 2 - 7 \times 3^x \leq 0 \text{ (بضرب أطراف المتراجحة في } 3^x \text{) ومنه:}$$

$$3 \times 3^{2x} - 7 \times 3^x + 2 \leq 0 : \text{ أن } 3 \times 3^{2x} + 2 - 7 \times 3^x \leq 0$$

$$\text{نضع: } t = 3^x (t > 0), \quad 3t^2 - 7t + 2 \leq 0, \quad \Delta = 25, \quad t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = 2.$$

$$3^x = \frac{1}{3} \text{ يكافئ: } x = \frac{\ln \frac{1}{3}}{\ln 3} = \frac{-\ln 3}{\ln 3} = -1, \quad 3^x = 2 \text{ يكافئ: } x = \frac{\ln 2}{\ln 3} \neq \ln \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$\text{ومنه: } S = \left[-1, \frac{\ln 2}{\ln 3} \right]$$

(5) - الإجابة صحيحة لأن: (01 ن)

$$y' + 3y - 2 = 0 \text{ يكافئ: } y' = -3y + 2, \quad (c \in \mathbb{R}), \quad y = ce^{-3x} + \frac{2}{3}$$

$$f(0) = \frac{-1}{3} \text{ يكافئ: } c + \frac{2}{3} = \frac{-1}{3} \text{ أي أن } c = -1. \text{ ومنه: } f(x) = -e^{-3x} + \frac{2}{3} = \frac{-1}{e^{3x}} + \frac{2}{3}$$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

(أ) - (1) $g(-1) = 0$ $g(0) = -4$ (0.25 ن) (0.25 ن)

(0.25 ن) $g'(0) = \frac{4-0}{0-2} = -2$, $B(-2, 0) \in (T)$, $A(0, -4) \in (T)$

(0.25 ن) (0.25 ن) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 0$

(ب) - $(T): y = -2x - 4$ (0.5 ن)

(ج) - جدول إشارة $g(x)$: (0.25 ن)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة: $g(x)$	+	○	-

جدول إشارة $g'(x)$: (0.25 ن)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$:	-	○	+

(د) $Ln(m) \in]-4, 0[$ ومنه $m \in]e^{-4}, 1[$ (0.5 ن)

(2) $g(0) = -4$ معناه $b = -4$ (0.25 ن)

(0.25 ن) $g(-1) = 0$ معناه $(-a + b)e^{\frac{1}{2}} = 0$ ومنه $a = b = -4$ (0.25 ن)

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -8(x+3) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{-x}{2}} = +\infty \end{cases}$ (0.5 ن)

(0.25 ن) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 16 \left(\frac{-x}{2} \right) e^{\frac{-x}{2}} - 24e^{\frac{-x}{2}} = 0$ (0.25 ن)

(ب) f قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} : (0.25 ن)

$$f'(x) = -8e^{\frac{-x}{2}} + 4(x+3)e^{\frac{-x}{2}} = (-8 + 4x + 12)e^{\frac{-x}{2}} = (4x + 4)e^{\frac{-x}{2}}$$

$$f'(x) = -g(x) \text{ إشارة } f'(x) \text{ من إشارة } -g(x)$$

f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, -1[$ ، f متزايدة تماما على المجال $]-1, +\infty[$ (0.5 ن)

جدول تغيرات الدالة f : (0.5 ن)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	$+\infty$	$-16\sqrt{e}$	0

(ج) f' قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} : $f''(x) = -g'(x)$ (0.5 ن)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة $f''(x)$:	+	○	-

- ومنه: (C_f) يقبل نقطة إنعطاف $W(1, f(1))$. $f(1) = -32e^{\frac{-1}{2}}$ (0.5 ن)

(0.25 ن) $(D): y = 8e^{\frac{-1}{2}}(x-1) - 32e^{\frac{-1}{2}} = 8e^{\frac{-1}{2}}x - 40e^{\frac{-1}{2}}$

التمرين الثالث: (08 نقاط)

(0.5 ن) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ (I-1)

(0.5 ن) (2) g قابلة للإشتقاق على $D: g'(x) = -1 - \frac{1}{x} < 0$ ومنه: g متناقصة تماما على D

(3) g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[2, 3]$, $g(2) \times g(3) < 0$ ، ومنه: حسب مبرهنة القيمة المتوسطة للمعادلة:

(0.5 ن) $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]2, 3[$ ($g(3) \approx -1.1$, $g(2) \approx 0.3$)

(0.5 ن) إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
إشارة: $g(x)$	+	○	-

(0.5 ن) (II-1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln x + \ln x - 2}{x} = -\infty$

(0.25 ن) (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته: $x = 0$.

(0.25 ن) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\ln x + \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} \right] = -\infty$

(2) f قابلة للإشتقاق على D :

$$f'(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x} \times x - (\ln x - 2) = \frac{-x + 1 - \ln x + 2}{x^2} = \frac{-x + 3 - \ln x}{x^2}$$

(0.5 ن) ومنه: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

(0.5 ن) f متناقصة تماما على المجال $[\alpha, +\infty[$, f متزايدة تماما على المجال $]0, \alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f : (0.5 ن)

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$		$f(\alpha)$	
			$-\infty$

(3) $g(\alpha) = 0$ يكافئ: $\text{Ln}\alpha = -\alpha + 3$.

(0.5 ن)..... $f(\alpha) = \alpha - 3 + \frac{3 - \alpha - 2}{\alpha} = \alpha - 3 - 1 + \frac{1}{\alpha} = \alpha - 4 + \frac{1}{\alpha}$

(0.25 ن)..... $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\text{Ln}x}{x} - \frac{2}{x} \right] = 0$ - (أ)

(0.25 ن)..... (C_h) منحنى مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

(0.5 ن)..... (ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (C) :

$$f(x) - h(x) = \frac{\text{Ln}x - 2}{x}$$

$f(x) - h(x) = 0$ يكافئ: $x = e^2$. إشارة $f(x) - h(x)$ من إشارة $\text{Ln}x - 2$ على D لأن $x > 0$.

x	0	e^2	$+\infty$
$f(x) - h(x)$		○	
الوضعية :		(C_f) تحت (C_h)	(C_f) فوق (C_h)

$$(C_f) \cap (C_h) = \{A(e^2, -2)\}$$

(III) - (أ) من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، \mathbb{R}^* ، $k(-x) = k(x)$ (لأن $|-x| = |x|$) و منه :

الدالة k دالة زوجية..... (0.25 ن)

(ب) على المجال $]0, +\infty[$: $k(x) = f(x)$ و منه (C_k) يطابق (C_f) .

- على المجال $]-\infty, 0[$: نرسم نظير الجزء السابق بالنسبة لـ $(y' y)$ لأن الدالة k دالة زوجية . (0.5 ن)

ج- إنشاء (C_h) ، (C_f) و (C_k) : (1.25 ن)

