أفكار فيديوهات الأستاذ نور الدين

الــــدوال

المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس ولتكن الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ عبارتها: $f(x)=\sqrt{x}$ ولتكن الدالة ω المعرفة على $\mathbb{R}$ بحيث: $\omega(x)=x^2-1$ ولتكن الدالة T المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $T(x)=x^3-3x^2$.

• انطلاقا من المنحنى البياني للدالة f استنتج رسم منحنيات للدوال الآتية دون دراستها.

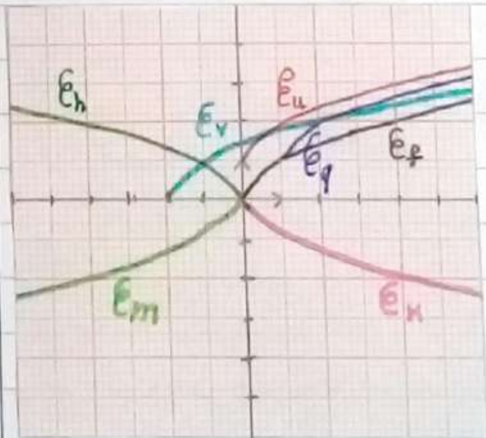
$u(x)=1+\sqrt{x}$	$v(x)=\sqrt{(x+2)}$	$q(x)=1+\sqrt{(x-1)}$
$h(x)=\sqrt{(-x)}$	$K(x)=-\sqrt{x}$	$m(x)=-\sqrt{(-x)}$

• انطلاقا من منحنى الدالة ω: أرسم منحنيات الدوال الآتية دون دراستها.
$L(x)=|\omega(x)|$

• انطلاقا من منحنى الدالة T: أرسم منحنيات الدوال الآتية دون دراستها.

$L(x)=\|T(x)\|$	$g(x)=T(\|x\|)$
$N(x)=\|T(\|x\|)\|$	$u(x)=T(-\|x\|)$

•



الحالة 01: $u(x)=f(x)+1$
نستنتج (E_u) من (E_f) بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{v}\binom{-a}{-b}$ أي $\vec{v}\binom{0}{1}$.

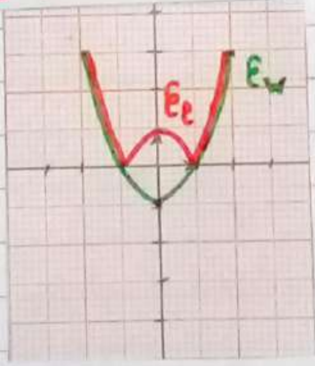
الحالة 02: $v(x)=\sqrt{(x+2)}$
نستنتج (E_v) بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{v}\binom{-2}{0}$

الحالة 03: $q(x)=1+\sqrt{x-1}$
نستنتج (E_q) بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{v}\binom{1}{1}$.

الحالة 04: $h(x)=\sqrt{(-x)}$
$h(x)=f(-x)$
نستنتج أن: (E_h) هو نظير (E_f) بالنسبة لمحور التراتيب

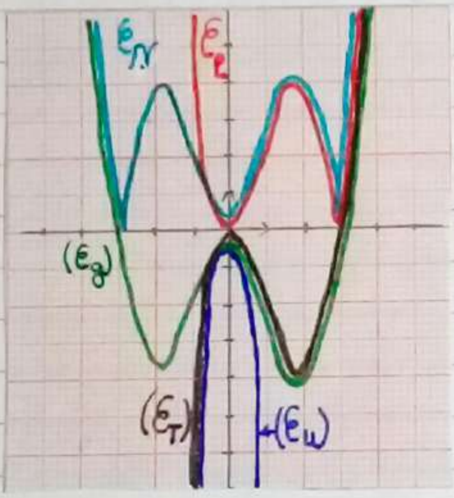
الحالة 05: $K(x)=-\sqrt{(x)}$
نستنتج أن: E_K هو نظير (E_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

الحالة 06: $m(x)=-\sqrt{(-x)}$
نستنتج أن: E_m هو نظير (E_f) بالنسبة لمبدأ المعلم.



حالة: $L(x)=|w(x)|$
1- على المجالات التي يكون فيها $\omega(x)\geq 0$ أي يكون E_w على محور الفواصل أو فوقه.
نحصل على $L(x)=w(x)$ ومنه (E_L) ينطبق على (E_w).
2- على المجالات التي يكون فيها $\omega(x)<0$ أي يكون (E_w) تحت محور الفواصل $L(x)=|w(x)|$
3- الدالة $L(x)$ لا تقبل الاشتقاق عند $x=-1$ و $x=1$ لأن الدالة تقبل نصف مماس.

•



الحالة 1: $g(x)=T(|x|)$

ملاحظة: غالبا يطلب إثبات أن الدالة زوجية أي: $f(-x)=f(x)$

1- إذا كان $x>0$ و $x\in D_T$ (الجزء الموجب من D_T) نحصل على: $g(x)=T(x)$ ومنه (E_g) ينطبق على (E_T)
2- نكمل الجزء المتبقي من (E_g) بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن g زوجية.

الحالة 2: $u(x)=T(-|x|)$

1- إذا كان $x\leq 0$ و $x\in D_T$ (الجزء السالب من D_T) نحصل على: $u(x)=T(x)$ ومنه $(\mathcal{C}_u)$ ينطبق على $(\mathcal{C}_T)$.

2- نكمل الجزء المتبقي من $(\mathcal{C}_u)$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن u زوجية.

الحالة 3: $L(x)=|T(x)|$

1- على المجالات التي تكون فيها $T(x)\geq 0$ أي يكون فيها $(\mathcal{C}_T)$ على محور الفواصل أو فوقه. نحصل على: $L(x)=T(x)$

2- على المجالات التي تكون فيها $T(x)<0$ يكون $(\mathcal{C}_L)$ متناظر لـ $(\mathcal{C}_T)$ بالنسبة لمحور الفواصل.

الحالة 4: $N(x)=|T(|x|)|$

1- $(\mathcal{C}_N)$ يقع فوق محور الفواصل لأن الدالة N $|T(x)|$ قيمها كلها موجبة لأن: $N(x)\geq 0$ أي منحناها البياني $(\mathcal{C}_N)$ يقع فوق محور الفواصل إلى الجزء السالب يناظر بالنسبة إلى $(x'x)$.

2- الدالة N زوجية $T(|x|)$ أي يكفي رسم الجزء من $[0,+\infty[$ والجزء الآخر يناظر بالنسبة لمحور التراتيب (yy').

2

طرق إزالة حالة عدم التعيين.
- بالاختزال.
- بالتحليل.
- بالمرافق.
- بالعدد المشتق.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+\sqrt{9x^2-1}$ وتمثيلها البياني $(\mathcal{C}_f)$.

1. حدد نهايات عند $-\infty$ و $+\infty$
2. أحسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+2x]$
3. إستنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ له مستقيمان مقاربان يطلب تعيين معادلتيهما.

ملاحظة:
نكتب الدالة بدون رمز القيمة المطلقة لتسهيل العمل عليها

-1 كتابة دون رمز القيمة المطلقة:

x	$-\infty$		$-1/3$		$1/3$		$+\infty$
$9x^2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

القيمة المطلقة تتيح لنا كتابتين:

$$\begin{cases} f(x)=x+\sqrt{9x^2-1} & \text{لما } x\in]-\infty,-\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3},+\infty[\\ f(x)=x+\sqrt{1-9x^2} & \text{لما } x\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]. \end{cases}$$

النهايات:

▸ $\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{9x^2-1})=$ ح.ع.ت

$\lim_{x\to-\infty}(x+|x|\sqrt{9-\frac{1}{x^2}})$

$$|x|=\begin{cases} x : x\geq 0 \\ -x : x\leq 0 \end{cases}$$

عند $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x-x.\sqrt{9-\frac{1}{x^2}})$

$\lim_{x\to-\infty}x(1-\sqrt{9-\frac{1}{x^2}})$

$\lim_{x\to-\infty}(-\infty).(-2)=+\infty$

أي

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$$

▸ $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{9x^2-1})=$ ح.ع.ت

$\lim_{x\to+\infty}x(1+\sqrt{9-\frac{1}{x^2}})$

$\lim_{x\to+\infty}(+\infty)(4)=+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$

-2 حساب:

▸ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]$

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2-1}+x-4x)=$ ح.ع.ت

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2-1}-3x)$

ملاحظة:
لما نجد $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+\dots}\pm\alpha x+\beta)$ تحل بالمرافق.
إذا كان $|\alpha|=\sqrt{|a|}$
وإلا تحل بالتحليل.

$\sqrt{9}=|3|=-3$

تحل بالمرافق:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{9x^2-1}-3x)(\sqrt{9x^2-1}+3x)}{(\sqrt{9x^2-1}+3x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{+x\left(\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}+3\right)}=\frac{-1}{x.6}=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]=0}$$

▸ $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]$

ح.ع.ت $=\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{9x^2-1}+3x]$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x(\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}+3)}=\frac{1}{x.6}=0$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=0}$

3- إستنتاج أن لـ C_f مستقيمان مقاربان مائلان:

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

1. بما أن: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]=0$
أي: $(\Delta): y=4x$ م.م. مائل بجوار $+\infty$.

2. بما أن: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+2x]=0$
أي: $(\Delta'): y=-2x$ م.م. مائل بجوار $-\infty$.

③

1- بين أنه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى C_f يعامد المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$.

نحل المعادلة: $a.f'(x_0)=-1$

④

2- بين أنه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى C_f يشمل النقطة ذات الإحداثيين (α,β).

نحل المعادلة $\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$ لنعين قيمة أو قيم x_0.

⑤

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وإشارتها:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

لتكن الدالة g المعرفة في كل حالة بـ D_g وعبارة مشتقتها

$D_g=\mathbb{R}$: $g'(x)=f(x^2)$ ✓

$D_g=]0,+\infty[$: $g'(x)=f(\ln x)$ ✓

$D_g=\mathbb{R}^*$: $g'(x)=f(\frac{1}{x})$ ✓

عين إشارة $g'(x)$ ثم اعط تغيرات g في كل حالة.

الخطوات

1- جدول تغيرات البنت $u(x)=x$

2- إستنتاج السوابق بالدالة البنت

الحالة 1: $g'(x)=f(x^2)$

$g=f\circ u$ / $u(x)=x^2$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2 ①	$+\infty$	↘	1	↘	0	↗	1	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	②	+	0	−	0	+	③

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0		−		0	+	

الدالة g:
متزايدة تماما على $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$
متناقصة تماما على $]-1,1[$

الحالة 2: $g'(x)=f(\ln x)$

$g=f\circ u$ / $u(x)=\ln x$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	②	+	0	−	0	+	

x	0		e^{-1}		e^{1}		$+\infty$
$\ln(x)$ ①	$-\infty$	↗	-1	↗	1	↗	$+\infty$

x	0		e^{-1}		e^{1}		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	

الدالة g:
متزايدة تماما على: $]0,e^{-1}]\cup[e,+\infty[$
و متناقصة تماما على: $[e^{-1},e^{1}]$

الحالة 3: $g'(x)=f(\frac{1}{x})$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	↘	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↘	0

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	

الدالة g:
متناقصة تماما على $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$
ومتزايدة تماما على $]-1,0[\cup]0,1[$

ملاحظة:

• معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay$ حلها $f(x)=Ce^{ax}$ حيث $C\in\mathbb{R}$ ثابت حقيقي.

• معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay+b$ حلها $f(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$

⑥ -

أ) حل المعادلة التفاضلية:

$2y' + y = 0$

ب) عين الحل الخاص f الذي يحقق

$f(\ln 4) = 1$

-2

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$f(x) = 3.e^{-2x} - 4$

جد معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث تكون الدالة f حلا لهذه المعادلة.

-1

أ) حل المعادلة التفاضلية:

$f(x) = C.e^{-\frac{1}{2}x}$

ب) الحل الخاص:

لدينا $f(\ln 4) = 1$

أي

$C.e^{-\frac{1}{2}\ln 4} = 1$

$C.e^{\ln(4)^{-1/2}} = 1$

$C.\frac{1}{\sqrt{4}} = 1$

$\boxed{C = 2}$

أي $\boxed{f(x) = 2.e^{-\frac{1}{2}x}}$

-2

إيجاد معادلة تفاضلية:

$f(x) = C.e^{ax} - \frac{b}{a}$

$f(x) = 3.e^{-2x} - \left(\frac{-8}{-2}\right)$

بالمطابقة:

$C = 3 ; a = -2 ; b = -8$

$\boxed{y' = -2y - 8}$

التحقيق:

$f(x) = 3.e^{-2x} - 4$

$f'(x) = -6.e^{-2x}$

~ o ~ o ~

$-6.e^{-2x} = -2(3.e^{-2x} - 4) - 8$

$= -6.e^{-2x} + 8 - 8$

$= -6.e^{-2x}$

العبارة:

$f(x) = 3.e^{-2x} - 4.$

حل للمعادلة

$y' = -2y - 8.$

⑦

إستنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول E_f إلى E_g.

حيث $g(x) = f(-x)$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

(E_g) يناظر (E_g) بالنسبة إلى محور التراتيب.

⑧

M و N نقطتان من (E_f) ذواتا الفاصلتين x و $-x$ على الترتيب مع $x \in \mathbb{R}^*$

بين أن المستقيمين (MN) و (T) متوازيان.

$(T): y = -\frac{1}{6}x + \ln 2$

ولدينا:

$M(x ; \ln(1+e^x) - \frac{2}{3}x)$

$N(-x ; \ln(1+e^x) - \frac{1}{3}x)$

$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{-1/3\,x}{2x} = \frac{-1}{6} = f'(0)$

⑨

بين أن $f(x) = 3$ تقبل حل وحيد α حيث $1,1 < \alpha < 1,2$

نحسب $f(1,1)$ و $f(1,2)$

نجد النتائج محصورة في 3.

المتتاليات

ضع تخمين حول إتجاه تغير U_n وتقاربها.

المتتالية (متناقصة/متزايدة) و تتقارب نحو فاصلة تقاطع (   ) حيث $x = $.

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$U_{n+1} = \frac{2}{3} . U_n + 1$

U_n معرفة بحدها الأول $U_0 = 2$

① أحسب U_1, U_2, U_3.

② (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ:

$V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

.برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة.

البرهان بالتراجع:

تكون V_n ثابتة إذا كانت جميع حدودها متساوية أي: $U_{n+1} = U_n$

معناه نفس القيمة $V_{n+1} = V_0 = V_n$

$V_0 = U_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 3$

$\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_1 = 3 \end{cases}$

✓ من أجل $n=0$

$P(0)$ محققة

$V_1 = V_0$

✓ نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل n:

$V_n = 3$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$V_{n+1} = 3$

✓ لدينا $V_n = 3$

الفكرة تبدأ ب:

$V_{n+1} = U_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$V_{n+1} = \frac{2}{3} U_n + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)\left[U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + 1$

الهدف

$= \left(\frac{2}{3}\right) . V_n + 1$

$= \frac{2}{3} \times 3 + 1$

أي

$\boxed{V_{n+1} = 3}$

ومنه:

$P(n+1)$ محققة أي:

V_n متتالية ثابتة.

الدالة f معرفة على $[0,+\infty[$ ب

$f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$

و متزايدة تماما على مجال $[0,+\infty[$.

(U_n) متتالية عددية معرفة ب $U_0 = 3$ ومن أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا

$U_{n+1} = f(U_n)$

.برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq 3$

✓ من اجل $n=0$

$0 \leq 3 \leq 3$

محققة.

✓ نفرض أن $P(n)$ محققة من اجل n: $0 \leq U_n \leq 3$

ونبرهن صحة $P(n+1)$

العبارة صعبة إذن:

الخطة البديلة

✓ بما أن الدالة المرفقة f متزايدة تماما على $[0,3]$

$f(0) \leq f(U_n) \leq f(3)$

و

الهدف

$0 \leq U_{n+1} < \frac{18}{7} \leq 3$

ومنه

$\boxed{0 \leq U_{n+1} \leq 3}$

أي:

$P(n+1)$ محققة و

$0 \leq U_n \leq 3$

أثبت أنه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3.

✓ من أجل $n=0$

$4^0 + 2 = 3$

$P(0)$ محققة.

✓ نفرض أن $P(n)$ محققة من اجل n:

$4^n + 2 = 3K \Rightarrow 4^n = 3K - 2$

و نبرهن صحة: $P(n+1)$

أي $4^{n+1} + 2 = 3K$

الفكرة تبدأ ب:

$4^{n+1} + 2 = 4^n . 4 + 2$

$= 4(3K-2) + 2$

$= 12K - 8 + 2$

$= 12K - 6$

$= 3(4K - 2)$

$\boxed{4^{n+1} + 2 = 3K' \mid K' = 4K - 2}$

الهدف.

ومنه $P(n+1)$ محققة

أي $4^n + 2 = 3K$

لدراسة إتجاه تغير المتتالية(U_n):

① ندرس إشارة $U_{n+1}-U_n$.

② نقارن بين $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1.

التقارب:

تقبل دون برهان

إذا كانت U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

إذا كان U_n متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

لدينا: $U_0=1$ / $0<U_n<3$

ومن اجل كل $n\in\mathbb{N}$:

$U_{n+1}=\sqrt{2U_n+3}$

1. أدرس إتجاه تغير المتتالية.
2. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

---

1. إتجاه التغير:

$U_{n+1}-U_n$

$\sqrt{2U_n+3}-U_n$

الفكرة: نضرب في المرافق.

$$\frac{(\sqrt{2U_n+3}-U_n)(\sqrt{2U_n+3}+U_n)}{(\sqrt{2U_n+3}+U_n)}$$

$$\frac{(\sqrt{2U_n+3})^2-U_n^2}{\sqrt{2U_n+3}+U_n}$$

جذر موجب $\quad$ $0<U_n<3$

معناه

$\sqrt{2U_n+3}+U_n>0$

ومنه

إشارة الفرق من إشارة البسط.

$-U_n^2+2U_n+3=0$

نضع $x=U_n$ (للتسهيل).

$-x^2+2x+3=0$

$$\begin{cases}x_1=3\\x_2=-1\end{cases}$$

	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
	$-$	0 $+$	0	$-$

$0<U_n<3$

من الجدول

U_n متزايدة تماما على مجال $]0,3[$.

2- حساب

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell$

$\lim \sqrt{2U_n+3}=\lim U_n=\ell$

متقاربة نحو نهاية ℓ.

$\sqrt{2\ell+3}=\ell \rightarrow \ell\geq 0$

$2\ell+3=\ell^2$

$-\ell^2+2\ell+3=0$

حلين مع U_n متزايدة

$$\begin{cases}\ell_1=3 \checkmark\\ \ell_2=-1 \times\end{cases}$$

لدينا: $U_{n+1}=3+\sqrt{U_n-3}$

برهن من أجل $n\in\mathbb{N}$:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+7U_n-12}{\sqrt{U_n-3}+U_n-3}$$

البرهان:

$U_{n+1}-U_n=3+\sqrt{U_n-3}-U_n$

$=\sqrt{U_n-3}-(U_n-3)$

الفكرة: نضرب في المرافق.

$$\frac{(\sqrt{U_n-3}-(U_n-3))(\sqrt{U_n-3}+(U_n-3))}{(\sqrt{U_n-3}+(U_n-3))}$$

$$\frac{-U_n^2+7U_n-12}{\sqrt{U_n-3}+(U_n-3)}$$

أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

مع العلم $3<U_n<4$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell.$

$3+\sqrt{\ell-3}=\ell$

$\sqrt{\ell-3}=\ell-3$

شرط ضروري: $\ell-3>0$

$\ell-3=(\ell-3)^2$

$-\ell^2+7\ell-12=0$

$$\begin{cases}\ell=3 \times \text{ مرفوض}\\ \ell=4 \checkmark \text{ مقبول}\end{cases}$$

لدينا $f(U_n)=\frac{2U_n^2}{U_n+4}=U_{n+1}$

و $0\leq U_n\leq 3$

أ- أدرس إشارة العدد $7U_{n+1}-6U_n$

واستنتج أنه من اجل $n\in\mathbb{N}$

$0\leq U_{n+1}\leq \frac{6}{7}U_n$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

$0\leq U_n\leq 3.\left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج- أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

أ- دراسة الإشارة:

$$7U_{n+1}-6U_n=7\left(\frac{2U_n^2}{U_n+4}\right)-6U_n$$

$$=\frac{8U_n^2-24U_n}{U_n+4}$$

المقام:

$0\leq U_n<3$

$4<U_n+4<7$

موجب على مجال $[0,3]$

البسط:

$U_n(8U_n-24)$

U_n	$-\infty$	0	3	$+\infty$
	$+$	0 $-$	0	$+$

[redacted] Bac Rymo

www.facebook.com/bac.rymo

$U_n(8U_n - 24) \leq 0$

ومنه

$7U_{n+1} - 6U_n \leq 0$

الإستنتاج:

لدينا:

$7U_{n+1} - 6U_n \leq 0$

$7U_{n+1} \leq 6U_n$

$U_{n+1} \leq \frac{6}{7} U_n$

وأثبتنا سابقًا أن

$0 \leq U_{n+1} \leq 3$

ومنه،

$0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7} U_n$

ب- **البرهان بالتراجع:**

✓ $P(0)$ محققة

$0 \leq 3 \leq 3$

✓ نفرض $P(n)$ محققة

$0 \leq U_n \leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي:

$0 \leq U_{n+1} \leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

لدينا: $0 \leq U_n \leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n$

$0 \leq \frac{6}{7} U_n \leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^1$

من سؤال السابق: $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}\cdot U_n$

ومنه:

$$\boxed{0 \leq U_{n+1} \leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}}$$

معناه

$P(n+1)$ محققة

إذن

$0 \leq U_n \leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

ج- حساب نهاية U_n:

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$

قيمة البرهان 1: (حه) ↑، قيمة أصغر من 1 (0)

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq 0$

و منه

حسب نظرية الحصر

نجد

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 0}$$

لدينا: $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$

ولدينا:

$0 \leq U_n \leq 2$

متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى $U_n \leq 2$.

• بين أن: $2 - U_{n+1} \leq \frac{2-U_n}{2}$

• بين أن: $0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ثم إستنتج: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = ..$

1- البرهان : مهم.

$2 - U_{n+1} \leq \frac{2-U_n}{2}$

•لدينا:

$2 - U_{n+1} = 2 - \sqrt{U_n+2} = \frac{(2-\sqrt{U_n+2})(2+\sqrt{U_n+2})}{2+\sqrt{U_n+2}}$

إذن

$$\boxed{2 - U_{n+1} = \frac{2-U_n}{2+\sqrt{U_n+2}}} \quad ...(A)$$

•لدينا:

$0 \leq \sqrt{U_n+2} \leq 2$

$2 \leq 2 + \sqrt{U_n+2} \leq 4$

$$\boxed{\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2+\sqrt{U_n+2}} \leq \frac{1}{2}} \quad ...①$$

ولدينا من جهة أخرى

$0 \leq U_n \leq 2$

$$\boxed{0 \leq 2 - U_n \leq 2} \quad ...②$$

الفكـرة: نضرب ② في ①

$0 \times \frac{1}{4} \leq \frac{2-U_n}{2+\sqrt{U_n+2}} \leq \frac{2-U_n}{2}$

من (A):

$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \frac{2-U_n}{2}$

أي

$$\boxed{2 - U_{n+1} \leq \frac{2-U_n}{2}}$$

2- البرهان:

$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

الفكرة: البرهان بالتراجع:

• التحقق $P(1)$

$0 \leq 1 \leq 1$

محققة.

• نفرض أن $P(n)$ محققة:

$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ونبرهن صحة $P(n+1)$

$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا $0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

نضرب في $\left(\frac{1}{2}\right)$:

$0 \leq \frac{2-U_n}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولدينا:

من الجواب السابق: الفكرة.

$2 - U_{n+1} \leq \frac{2-U_n}{2}$

ومنه

$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \frac{2-U_n}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

إذن

$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

معناه

$P(n+1)$ محققة

ومنه

$$\boxed{0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

• إستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

لدينا:

$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty}(2-U_n)=0$

أي

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 2}$$

لتكن (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$U_{n+1}=\frac{4}{4-U_n}$ و $U_0=-1$

وتعتبر المتتالية (v_n) حسابية.

• عين حدها الأول وأساسها $v_n=\frac{1}{U_n-2}$

• البرهان أن (v_n) متتالية حسابية:

الهدف: $v_{n+1}=v_n+r$

لدينا

$$v_n=\frac{1}{U_n-2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{U_{n+1}-2}-\frac{1}{U_n-2}$$

$$=\frac{4-U_n}{2(U_n-2)}-\frac{1}{U_n-2}$$

$$=\frac{2-U_n}{2(U_n-2)}$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{U_n-2}{U_n-2}\right)$$

ومنه

$$\boxed{v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1}=v_n-\frac{1}{2}$$

حدها الأول:

$$v_0=-\frac{1}{3}$$

ومنه

$$\boxed{v_{n+1}=-\frac{1}{3}-\frac{n}{2}}$$

احسب نهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty}\left(e^{\ln3-n\ln3}+3\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty} e^{\ln3-n\ln3}+3$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\ln3}}{e^{n\ln3}}+3$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^1}{e^n}\right)^{\ln3}+3$$

ومنه

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n=3}$$

المتتالية الهندسية

المجاميع: $S=U_0+U_1+U_2+\dots+U_n$

$q\neq1:\ S=U_0\cdot\frac{q^{n-0+1}-1}{q-1}$

$q=1:\ S=(n-1).U_n$

أحسب نهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim\frac{(\frac{3}{8})(\frac{2}{7})^n-6}{(\frac{3}{8})(\frac{2}{7})^n-1}$$

إستنتج أن (U_n) متقاربة.

1. حساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim\frac{(3/8)(2/7)^n-6}{(3/8)(2/7)^n-1}$$

بما أن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n=0$

فإن

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n=6}$$

2. إستنتاج أن U_n متقاربة

لأن نهايتها منتهية.

(U_n) متتالية هندسية غير منتهية حدودها الموجبة تماما حيث:

$U_3=9U_1$ و $U_0=2$

① عين اساس المتتالية U_n.

② أحسب U_n بدلالة n.

③ احسب بدلالة n المجموع (S_n) حيث: $S=U_0+U_1+\dots+U_n$

① تعيين أساس U_n: (هندسية)

$$U_n=U_p\cdot q^{n-p}$$

$$\begin{cases}U_1=U_0\cdot q^1\\U_3=U_0\cdot q^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U_1=2.q\ \dots(1)\\U_3=2.q^3\ \dots(2)\end{cases}$$

الفكرة

$$\begin{cases}U_1=2.q\\9U_1=2.q^3\end{cases}$$

ومنه

$$9(2q)=2q^3$$

أي

$$q^3=9$$

لها حلين

$$\begin{cases}q=3\ ✓\\q=-3\ ✗\ \text{مرفوض}\end{cases}$$

الحدود موجبة إذن الأساس موجب.

أي $\boxed{q=3}$

② حساب U_n: $U_n=2.3^n$

③ المجموع:

الحالة 01:

$$S=U_0+U_1+\dots+U_n$$

$$S=U_0\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$=2\cdot\frac{3^{n+1}-1}{3-1}$$

أي

$$\boxed{S=3^{n+1}-1}$$

الحالة 02:

$$S'=U_0^2+U_1^2+U_2^2+\dots+U_n^2$$

الفكرة: ثابت.

$$(U_1)^2=(U_0\cdot q^1)^2$$
$$(U_2)^2=(U_0\cdot q^2)^2$$
$$(U_3)^2=(U_0\cdot q^3)^2$$
$$(U_4)^2=(U_0\cdot q^4)^2$$

$$S'=U_0^2+(U_0 q)^2+(U_0 q^2)^2+\dots+(U_0 q^n)^2$$

$$=U_0^2+U_0^2q^2+U_0^2q^4+\dots+U_0^2q^{2n}$$

$$=U_0^2[1+q^2+q^4+\dots+q^{2n}]$$

متتالية حسابية جديدة.

$$S'=U_0^2\cdot\left[1\cdot\frac{(q^2)^{n-0+1}-1}{q^2-1}\right]$$

$$\boxed{S'=\frac{9^{n+1}-1}{2}}$$

الحالة 03:

$T_n = U_0 \cdot U_1 \cdot U_2 \cdots\cdots U_n$

$U_1 = U_0 \cdot q$

$U_2 = U_0 \cdot q^2$

$U_3 = U_0 \cdot q^3$

أي

$T_n = U_0 \cdot (U_0 \cdot q)(U_0 \cdot q^2) \cdots\cdots (U_0 \cdot q^n)$

$T_n = (U_0 \cdot U_0 \cdot U_0 \cdots U_0)(q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot q^4 \cdots q^n)$

فكرة: الفصل

$T_n = U_0^{\,n+1}\left(q^{1+2+3+\cdots+n}\right)$

متتالية حسابية.

$T_n = 2^{n+1}\left(3^{\frac{n-1+1}{2}\cdot(1+n)}\right)$

$\boxed{T_n = 2^{n+1}\left(3^{\frac{n}{2}\cdot(n+1)}\right)}$

الحالة 04:

$S'' = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \cdots + \frac{1}{U_n}$

$(U_1) = U_0 \cdot q^1$

$(U_2) = U_0 \cdot q^2$

$(U_3) = U_0 \cdot q^3$

أي

$S'' = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_0 \cdot q} + \cdots\cdots + \frac{1}{U_0 \cdot q^n}$

فكرة: $\frac{1}{U_0}$ عامل مشترك

$S'' = \frac{1}{U_0}\left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots \frac{1}{q^n}\right]$

$S'' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \cdots\cdots + \frac{1}{3^n}\right)$

$S'' = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdots\cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

متتالية هندسية.

$S'' = \frac{1}{2}\left(\frac{(1/3)^{n+1} - 1}{(1/3) - 1}\right)$

$S'' = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right)$

لدينا: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{2} \end{cases}$

a عدد حقيقي غير معدوم.

من اجل $n \in \mathbb{N}$ نضع:

$V_n = U_n + a$

عين قيمة العدد a التي يكون من اجلها (V_n) متتالية هندسية

لدينا: $v_n = U_n + a$

ومنه: $\boxed{U_n = v_n - a}$

ولدينا $v_{n+1} = v_n \cdot q$

اذن:

$v_{n+1} = U_{n+1} + a$

$= \frac{U_n - 1}{2} + a$

$= \frac{v_n - a - 1}{2} + a$

$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - \frac{a}{2} - \frac{1}{2} + a}$

الهدف (متتالية)

$-\frac{a}{2} - \frac{1}{2} + a = 0$

ومنه

$\boxed{a = 1}$

المتتاليتان (U_n) و(v_n) معرفتان من اجل $n \in \mathbb{N}^*$ ب:

$U_n = \frac{n-1}{n}$; $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

أثبت أن المتتاليتان (U_n) و(v_n) متجاورتان ثم جد نهايتهما المشتركة.

اشارة U_n:

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$

اشارة v_n:

$v_{n+1} - v_n = \frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2} < 0$

وبما أن:

$\lim_{n \to +\infty}(U_n - v_n) = 0$

والمتتاليتان إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة فهما متجاورتان.

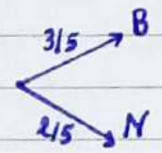
أفكار فيديوهات الأستاذ نور الدين

الإحتمالات

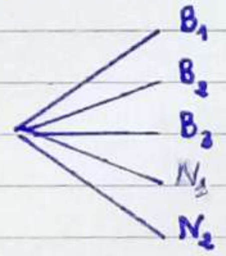
يحتوي كيس على 5 كريات (3 بيضاء و سوداوين) [لا نفرق بينها باللمس] نسحب كرية عشوائيا ونسجل لونها [B أبيض، N أسود].

$\Omega = \{B, N\}$

$P(B) = \frac{3}{5}$; $P(N) = \frac{2}{5}$



أو $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2\}$



صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5.
نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع.
① ما هو عدد الحالات الممكنة؟
نعيد التجربة دون إرجاع.
① ما هو عدد الحالات الممكنة؟
② ما هو إحتمال الحادثة "A".
"الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4".

عدد القوائم الممكنة دون إرجاع:
$5 \times 4 \times 3 = 60$

عدد القوائم الممكنة بالإرجاع:
$5 \times 5 \times 5 = 125$

إحتمال:

$P(A) = \frac{4 \times 3}{60} = \frac{1}{5}$

قاعدة:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

كيس A به أقلام: 6 زرقاء و 4 حمراء.
كيس B به أقلام: 9 زرقاء و 5 حمراء.
نسحب بطريقة عشوائية قلما من كل كيس
① عدد الحالات الممكنة Ω
② أحسب إحتمال كل حادثة من الحوادث التالية:
E: "الحصول على قلمين حمراوين"
F: "الحصول على قلم واحد أحمر"
G: "الحصول على الأقل على قلم أحمر".

عدد العناصر الممكنة:
$10 \times 14 = 140$

الإحتمالات:
إحتمال E:
$P(E) = \frac{4 \times 5}{140} = 0,14$

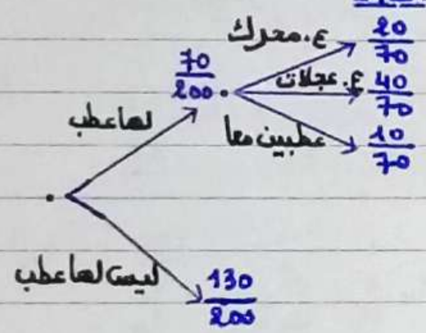
إحتمال F:
$P(F) = \frac{4 \times 9 + 5 \times 6}{140} = 0,47$

إحتمال G:
$P(G) = P(E) + P(F)$
$= 0,14 + 0,47$
$P(G) = 0,61$

في حظيرة للسيارات توجد 200 سيارة. 20 منها لها عطب في المحرك و 40 منها لها عطب في العجلات. و 10 منها فيها العطبين نختار عشوائيا سيارة من الحظيرة

A: هي الحادثة "سيارة فيها في محرك"
B: هي الحادثة "سيارة فيها عطب في العجلات"
① ما هو إحتمال أن السيارة يوجد فيها على الأقل واحد من العطبين.
② ما هو إحتمال أن السيارة لا يوجد فيها أي عطب.

الرسم:



1. ما هو إحتمال أن السيارة يوجد فيها على الأقل واحد من العطبين.

✓ من الرسم:

$= \frac{7}{20} \times \frac{2}{7} + \frac{7}{20} \times \frac{4}{7} + \frac{7}{20} \times \frac{1}{7} = 0,35$

✓ من الحساب:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A) = \frac{20}{200} = 0,1$

$P(B) = \frac{40}{200} = 0,2$

$P(A \cap B) = \frac{10}{200} = 0,05$

$P(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,05$

2. ما هو إحتمال أن السيارة لا يوجد فيها أي عطب

✓ من الرسم: $= \frac{130}{200} = 0,65$

✓ من الحساب:

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

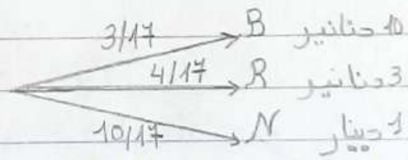
يحتوي كيس على 3 كريات بيضاء، 4 كريات حمراء، و 10 كريات سوداء، لا نميز بينها باللمس.

- نسحب عشوائيا كرية من الصندوق فيربح الساحب:
  - دينارا واحدا إذا كانت كرية سوداء.
  - ثلاثة دنانير إذا كانت كرية حمراء.
  - 10 دنانير إذا كانت كرية بيضاء.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يأخذ قيمة الربح المحتمل في اللعبة.

1- عين القيم الممكنة للمتغير X.
2- عين قانون الاحتمال للمتغير X.
3. أحسب الأمل الرياضياتي.
4- أحسب التباين ثم الانحراف المعياري للمتغير العشوائي.

الأمل الرياضياتي:
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P_i$$
التبايـن:
$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 . P_i$$
الانحراف المعياري:
$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$



① قيم المتغير العشوائي x:

$\{1, 3, 10\}$

$1\ DA \rightarrow N$

$3\ DA \rightarrow R$

$10\ DA \rightarrow B$

② قانون الاحتمال للمتغير x:

$x = 1 \quad P(X=1) = \frac{10}{17}$

$x = 3 \quad P(X=3) = \frac{4}{17}$

$x = 10 \quad P(X=10) = \frac{3}{17}$

x_i	1	3	10
$P(x = x_i)$	$\frac{10}{17}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{3}{17}$

③ حساب الأمل الرياضياتي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i . P_i$$
$$= 1\left(\frac{10}{17}\right) + 3\left(\frac{4}{17}\right) + 10\left(\frac{3}{17}\right)$$
$$\boxed{E(x) = 3,06}$$

④ حساب التباين:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + E(x))^2 . P_i$$
$$= \sum_{i=1}^{3} (x_i - E(x))^2 . P_i$$
$$= (1-3,06)^2 . \frac{10}{17} + (3-3,06)^2 . \frac{4}{17} + (10-3,06)^2 . \frac{3}{17}$$
$$\boxed{V(x) = \frac{3178}{289}}$$

⑤ حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$
$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{3178}{289}} = 3,32$$

يرمي لاعب زهري نرد رباعي الوجه $\{4, 3, 2, 1\}$

نعرف المتغير العشوائي X.

- مجموع الرقمين زوجيا ← يربح نفس مجموع الرقمين بالدينار.
- مجموع الرقمين فرديا ← يخسر نفس مجموع الرقمين بالدينار.

① عين قيم المتغير العشوائي X.
② عين قانون الاحتمال للمتغير.

① تعيين قيم المتغير X

الفكرة:

إنشاء جدول.

نرد1 / نرد2	1	2	3	4
1	+2	-3	+4	-5
2	-3	+4	-5	+6
3	+4	-5	+6	-7
4	-5	+6	-7	+8

عدد الحالات الممكنة: 16 حالة.

قيم المتغير العشوائي.

$I = \{-7, -5, -3, +2, +4, +6, +8\}$

② تعيين قانون الاحتمال:

x_i	-7	-5	-3	+2	+4	+6	+8
$P(x = x_i)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

زهرة نرد ذات أربعة أوجه $\{4, 3, 2, 1\}$ نرمز بالرمز P_i لاحتمال ظهور الوجه ذي الرقم $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

- نعلم أن $P_2 = \frac{1}{5}$.
- الحدود P_4، P_3، P_2، P_1 تشكل حدود متتالية حسابية بهذا الترتيب.

① أحسب P_1، P_3، P_4.
② أحسب إحتمال ظهور رقم فردي.

① حساب الحدود: (متتالية حسابية)

$U_2 = U_1 + r$

$P_2 = P_1 + r \Rightarrow P_1 = P_2 - r$

$P_3 = P_2 + r$

$P_4 = P_3 + r \Rightarrow P_4 = P_2 + 2r$

الفكرة:

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$

$\frac{1}{5} - r + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + r + \frac{1}{5} + 2r = 1$

$r = \frac{1}{10}$

ومنه:

$P_1 = \frac{1}{10}$.

$P_2 = \frac{1}{5}$.

$P_3 = \frac{3}{10}$.

$P_4 = \frac{4}{10}$.

2- حساب إحتمال ظهور رقم فردي
لتكن A الحادثة.
"ظهور رقم فردي"

$P(A) = P_1 + P_3$

$= \frac{1}{10} + \frac{3}{10}$

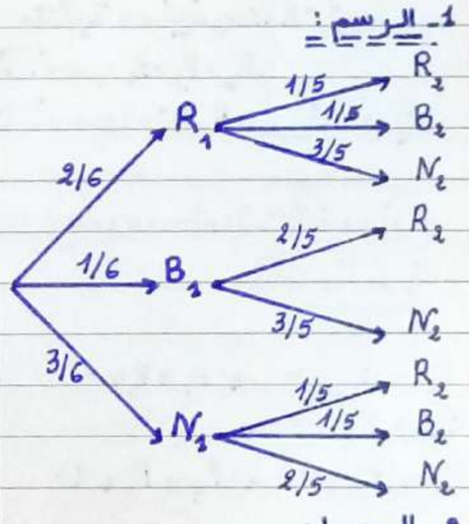
$\boxed{P(A) = \frac{4}{10}}$

كيس يحتوي على كرتين حمراوتين و ثلاث كرات سوداء وكرة بيضاء نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات السوداء المسحوبة.

1 مثل النتائج باستعمال
أ- شجرة الاحتمالات.
ب- جدول.

2 عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

1- الرسم:



2- الجدول:

	R_1	R_2	B_1	N_1	N_2	N_3
R_1	X	0	0	1	1	1
R_2	0	X	0	1	1	1
B_1	0	0	X	1	1	1
N_1	1	1	1	X	2	2
N_2	1	1	1	2	X	2
N_3	1	1	1	2	2	X

$x = \{0, 1, 2\}$

2 تعيين قانون الاحتمال:

$x = \{0, 1, 2\}$

$P(x=0) = \frac{6}{30}$

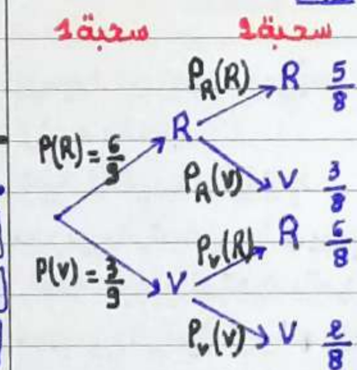
$P(x=1) = \frac{18}{30}$

$P(x=2) = \frac{6}{30}$

x_i	0	1	2
$P(x=x_i)$	6/30	18/30	6/30

يحتوي صندوق على 5 كريات حمراء و 3 كريات خضراء. لا نميز بينها عند اللمس. نسحب كرتين على التوالي ودون إرجاع.
لتكن الحادثة A: "الكرة المسحوبة الأولى حمراء".
و الحادثة B: "الكرة المسحوبة الثانية خضراء".
أحسب $P(A)$، $P_A(B)$ ثم إستنتج $P(A \cap B)$

الرسم:



حساب:

$P(A) = P(R) = \frac{2}{3}$

حساب:

$P_A(B) = P_R(V) = \frac{3}{8}$

إستنتاج:

$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A)$

$P(R \cap V) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$

الإحتمالات الشرطية

القانون:

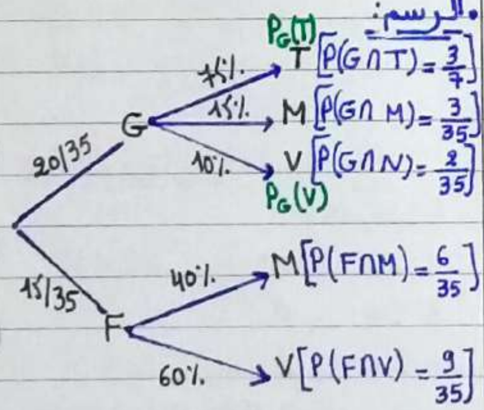
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

إحتمال B علما أن A محققة:

$P_A(B) = P(A|B)$

قسم فيه 35 تلميذ. منهم 15 بنت، يختار كل تلميذ نوع الرياضة.
الأولاد: 75% كرة قدم، 15% كرة يد، 10% كرة طائرة
البنات: 60% كرة يد، 40% كرة طائرة
الرموز:
G: "التلميذ المختار ولد".
F: "التلميذة المختارة بنت".
T: "تلميذ يمارس كرة القدم".
M: "تلميذ يمارس كرة اليد".
V: "تلميذ يمارس كرة الطائرة".
المطلوب:
• رسم الشجرة.
• أحسب احتمال $P(V)$ إحتمال أن تتحقق الحادثة V.
• أحسب الإحتمال الشرطي $P_V(G)$.
• أحسب إحتمال أن يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم.

• الرسم:



• إيجاد $P(V)$:

$P(V) = \frac{2}{35} + \frac{9}{35} = \frac{11}{35}$

• الاحتمال الشرطي:

$$P_V(G) = \frac{P(G \cap V)}{P(V)} = \frac{2/35}{11/35}$$

$$\boxed{P_V(G) = \frac{2}{11}}$$

• $\overline{T}$ تلميذ لا يمارس كرة القدم:

$$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{4}{7}$$

ملاحظة:

ما إحتمال أن يكون التلميذ ضعيف في الفيزيا ، أو في الرياضيات

$$P(\underbrace{M \cup F}_{\text{أو}}) = P(M) + P(F) - P(\underbrace{M \cap F}_{\text{و}})$$

أفكار فيديوهات الأستاذ نور الدين

الأعداد المركبة

ليكن z و z' عددان مركبان حيث:

$$z' = \frac{2-i}{1+i} \quad \text{و} \quad z = \frac{2+i}{1-i}$$

بين بدون حساب أن $\overline{z+z'}$ حقيقي و $\overline{z-z'}$ تخيلي صرف.

لدينا $\bar{z} = \frac{2-i}{1+i} = z'$

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' = z' + \bar{z}' = 2\,Re(z')$$

$$\overline{z-z'} = \bar{z} - \bar{z}' = z' - \bar{z}' = 2i\,Im(z')$$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z\bar{z} + z - \bar{z} - 5 - 2i = 0$$

الفكرة:

نضع $\begin{cases} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{cases}$

$$(x+iy)(x-iy) + x + iy - x + iy - 5 - 2i = 0$$

$$\underbrace{x^2+y^2-5}_{Re} \underbrace{-2yi - 2i}_{Im} = 0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ -2y-2=0 \end{cases}$$

$$S = \{2+i \,;\, -2+i\}$$

نضع: $z' = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}\,i$

• عين مجموعة النقط M حيث يكون z' حقيقي.

• عين مجموعة النقط M حيث يكون z' تخيلي صرف.

1. مجموعة النقط حتى يكون z' حقيقي

يجب: $\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} = 0$

ومنه $\begin{cases} -2y = 0 \\ (x-1)^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} y = 0 \\ (1,0) \neq 0 \end{cases}$

مجموعة النقط هي المستقيم ذو المعادلة $y=0$ أي موازٍ لـ $(x'x)$ ماعدا $A(1,0)$

2. مجموعة النقط حتى يكون z' تخيلي

يجب: $\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} = 0$

ومنه $\begin{cases} x^2-y^2-1=0 \\ (x-1)^2+y \neq 0 \end{cases}$

الفكرة:

$$x^2-y^2=1$$

$$(x-0)^2-(y-0)^2=1^2$$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$ بإستثناء $A(1,0)$

لدينا: $z_A = \sqrt{3}+i \,;\, z_B = -\sqrt{3}-i$

$z_C = 2i \,;\, z_D = \sqrt{3}+3i$

• أحسب $|z_A|$، $|z_B|$، $|z_C|$

ماذا تستنتج ؟

الحساب:

$$|z_A| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2} = 2$$

$$|z_B| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2$$

$$|z_C| = \sqrt{(0)^2+(2)^2} = 2$$

ومنه:

$$|z_A| = |z_B| = |z_C|$$

القاعدة

نستنتج أن النقط تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r=2$.

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z

أ- $|z+1+2i| = |z+4|$

ب- $|2z-i| = 2$

ج- $|\bar{z}+i| = 2$

أ- $|z-(-1-2i)| = |z-4|$

$$|z-z_A| = |z-z_B|$$

حيث: $\begin{cases} z_A = -1-2i \\ z_B = 4 \end{cases}$

أي: $AM = BM$

مجموعة النقط M هي محور القطعة $[AB]$.

ب- $|2z-i| = 2$

$$\left|2\left(z-\tfrac{1}{2}i\right)\right| = 2$$

$$|2|\left|z-\tfrac{1}{2}i\right| = 2$$

ومنه

$$\left|z-\tfrac{1}{2}i\right| = 1$$

$$|z-z_A| = 1$$

حيث $z_A = \frac{1}{2}i$

أي:

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r=1$ مع $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$

ج- $|\bar{z}+i| = 2$

$$|\overline{\bar{z}+i}| = \bar{2}$$

$$|\bar{\bar{z}}-\bar{i}| = 2$$

حيث: $z_B = i$

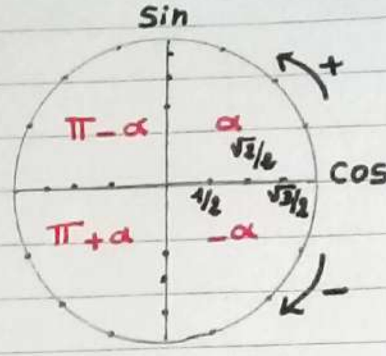
أي:

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها B ونصف قطرها $r=2$ مع $B(0,1)$

[redacted] Bac Rymo

www.facebook.com/bac.rymo

سعيدة بانضمامكم لي



مثل على الدائرة المثلثية النقط: $\frac{1111\pi}{3}$; $\frac{-1111\pi}{2}$

① $\frac{1111\pi}{3}$

لدينا: $1111 = 370(3)+1$

معناه: $(3(370)+1)\pi \div 3$

أي: $\frac{3(370)\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$

$\cancel{370}^{0}\pi+\frac{\pi}{3}$ الفكرة: لأنه زوجي.

$\frac{180°}{3}=60°$

$$\begin{cases}\cos\frac{1111\pi}{3}=\frac{1}{2}\\ \sin\frac{1111\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

② $\frac{-1111\pi}{2}$

لدينا: $-1111=-555(2)-1$

معناه: $-(-2(555)-1)\pi \div 2$

أي: $\frac{-2(555)\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$

$-555\pi-\frac{\pi}{2}$ الفكرة: نفككه

$(-556+1)\pi-\frac{\pi}{2}$

$\cancel{-556\pi}^{0}+\pi-\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}=\frac{180°}{2}=90°$

$$\begin{cases}\cos\frac{-1111\pi}{2}=0\\ \sin\frac{-1111\pi}{2}=1\end{cases}$$

$-1\leq\cos x\leq 1$

$-1\leq\sin x\leq 1$

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$-x$
$$\begin{cases}\cos(-x)=\cos x\\ \sin(-x)=-\sin x\end{cases}$$
$\pi+x$
$$\begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=-\sin x\end{cases}$$
$\pi-x$
$$\begin{cases}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=\sin x\end{cases}$$

في مستوى $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$ لدينا النقط:
$z_A=-i\sqrt{3}$; $z_B=3+2i\sqrt{3}$; $z_C=-3+2i\sqrt{3}$

1. أعط تفسيرا هندسيا للطويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.
2. ما طبيعة المثلث ABC.

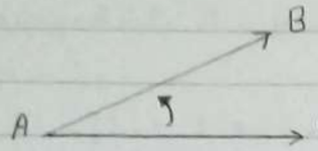
1. التفسير الهندسي للطويلة

$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=\frac{|z_B-z_A|}{|z_C-z_A|}=\frac{AB}{AC}$

التفسير الهندسي للعمدة:

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\arg(z_B-z_A)-\arg(z_C-z_A)$

معناه: $(\vec{AC},\vec{AB})$ الفكرة: الزاوية الموجهة (المقام ثم البسط)



$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=(\vec{OI},\vec{AB})-(\vec{OI},\vec{AC})=(\vec{AC},\vec{AB})$

2- طبيعة المثلث ABC:

حساب الطاويلة:

$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1=\frac{AB}{AC}$

حساب العمدة:

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{-\pi}{3}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}$

ومنه:

المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ما هي مجموعة النقط لعمدة:

$\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

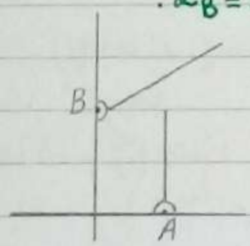
$\arg(z-2i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}$

1. $\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$

مجموعة النقط M هي نصف مستقيم $[AM)-\{A\}$ ويميل بدرجة 90°.
و $z_A=1$.

2. $\arg(z-2i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

مجموعة النقط M هي نصف مستقيم $[BM)-\{B\}$ و يميل بدرجة 45°.
و $z_B=2i$.



[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي

عين مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$|Z-1+i| = |Z-1-i|$

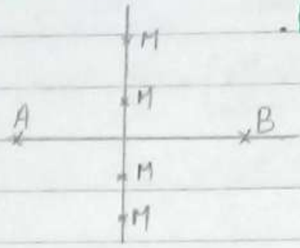
.3 $|Z-1+i| = |Z-1-i|$

$|Z-(1-i)| = |Z-(1+i)|$

$|Z - Z_A| = |Z - Z_B|$

$AM = BM$

مجموعة النقط M هو محور القطعة [AB].



عين طويلة وعمدة العدد المركب Z:

$Z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$Z = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$Z = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$

.1 $Z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

الفكرة:

$-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$

ومنه

$Z = 3(\cos\pi + i\sin\pi)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$Z = 3\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$Z = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

.2 $Z = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

فكرة 1: $1 = -i^2$

نعوضها أمام $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$:

$Z = \sqrt{5}\left(-i^2\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

ومنه

$Z = i\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

فكرة 2: $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

ومنه:

$Z = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$Z = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right)$

ومنه

$Z = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

.3 $Z = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$

$Z = -i^2\sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$

$Z = (-i)\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$

$-i = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

$Z = \cos\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

ومنه

$Z = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$

أعط الشكل الجبري:

$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{1111\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{1111\pi}{4}\right)\right)$

الفكرة: هي التبسيط.

$\frac{1111\pi}{4} = 277\pi + \frac{3\pi}{4}$

$= \cancel{276}\pi + \pi + \frac{3\pi}{4}$

$= \frac{7\pi}{4} = 315°$ (4 منتصف)

$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه

$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

إذن

$Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

عين شكلا أسيا لكل من الأعداد المركبة التالية:

$Z_1 = -\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$Z_1 = -\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

الفكرة هي: $e^{i\pi}$

$Z_1 = \sqrt{2}\cdot e^{i\pi}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$= \sqrt{2}\cdot e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)}$

$= \sqrt{2}\cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

[redacted] Bac Rymo

www.facebook.com/bac.rymo

سعيدة بانضمامكم لي

لدينا: $Z = Z_0 + Ke^{i\theta}$

حالة: لما يكون θ متغير

يمسح $\theta = [0, 2\pi]$

$Z = 1 + i + 5.e^{i\theta}$

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A، نصف قطرها $r = 5$

حالة: لما يكون K متغير

يمسح $K \in \mathbb{R}_+^*$

$Z = 1 + i + K.e^{i.\frac{\pi}{4}}$

مجموعة النقط M هو نصف مستقيم مبدؤه A ويميل بـ $\frac{\pi}{4}$

دستور موافر

من أجل $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

$(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

من أجل $n \in \mathbb{Z}$ و $\theta \in \mathbb{R}$

$(e^{i\theta})^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

لدينا: $Z = \sqrt{2}.\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

• عين قيم n الصحيحة في كل حالة:

أ- Z^n حقيقيا.

ب- Z^n تخيليا صرفا

أ- Z^n حقيقي:

لدينا: $Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$Z^n = (\sqrt{2})^n.\left(\cos n.\frac{\pi}{4} + i.\sin n.\frac{\pi}{4}\right)$

حتى يكون Z^n حقيقيا يجب أن تكون

$\sin\frac{n\pi}{4} = 0$

الفكرة:

$\frac{n\pi}{4} = K\pi \ / \ K \in \mathbb{Z}$

ب- Z^n تخيلي صرف:

$\cos\frac{n\pi}{4} = 0$

الفكرة:

$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + K\pi$

$\frac{n}{4} = \frac{1}{2} + K$

$n = 4K + 2 \ / \ K \in \mathbb{Z}$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي

لدينا: $\begin{cases} Z=(3+\sqrt{3})+i(-3+\sqrt{3}) \\ Z = 2\sqrt{6} . e^{-i\frac{\pi}{12}} \end{cases}$

$\begin{cases} U = 3+i\sqrt{3} \\ U = 2\sqrt{3} . e^{i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$

$\begin{cases} v = 1-i \\ v = \sqrt{2} . e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$

- إستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الإستنتاج

$Z = 2\sqrt{6} . e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$= 2\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$

الفكرة: المطابقة بين

$\begin{cases} Z = 2\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right) \\ Z = (3+\sqrt{3}) + i(-3+\sqrt{3}) \end{cases}$

نجد:

$\begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \\ \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \end{cases}$

ومنه:

$\begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$

حل المعادلة:

$Z^2 - 2(\cos\theta)Z + 1 = 0$

المعادلة

$\Delta = [-2.\cos(\theta)]^2 - 4(1)(1)$

$= 4.\cos^2\theta - 4$

$= 4(\cos^2\theta - 1)$

الفكرة: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$= -4.\sin^2\theta$

$= 4i^2.\sin^2\theta$

الحلول:

$Z_1 = \cos\theta - i\sin\theta$

$Z_2 = \cos\theta + i\sin\theta$

لدينا: $P(Z) = Z^3 - 2Z^2 - iZ + 3 - i$

بين أن المعادلة $P(Z)=0$ لها حل حقيقي.

الفكرة نضع α ثم نعزل Re و Im:

$\alpha^3 - 2\alpha^2 - i\alpha + 3 - i = 0$

$\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3 + (-\alpha - 1)i = 0$

$\begin{cases} \alpha^3 - 2\alpha^2 + 3 = 0 \\ -\alpha - 1 = 0 \end{cases}$ و

ومنه: $\alpha = -1$

أي أن الحل حقيقي.

وهو جذر للمعادلة:

$P(Z) = (Z+1)(aZ^2 + bZ + c)$

لدينا: $P(Z) = Z^3 - iZ^2 + 3Z - 3i$

بين أن المعادلة $P(Z)=0$ لها حل تخيلي صرف.

الفكرة نضع αi (حل تخيلي صرف)

$(\alpha i)^3 - i(\alpha i)^2 + 3(\alpha i) - 3i = 0$

$-\alpha^3 i + \alpha^2 i + 3\alpha i - 3i = 0$

$i(-\alpha^3 + \alpha^2 + 3\alpha - 3) = 0$

مع $i \neq 0$

الفكرة: مجموع المعاملات $=0$.

$-1 + 1 + 3 - 3 = 0$

إذن للمعادلة جذر وهو: "1".

ومنه نجد.

$\alpha i = 1.i$

$\alpha i = i$

إذن i عدد تخيلي وهو جذر للمعادلة:

$P(Z) = (Z-i)(aZ^2 + bZ + c)$

عين الجذرين التربيعين للأعداد المركبة التالية: $Z = -8 + 6i$

الفكرة: نضع $\begin{cases} Z = \omega^2. \\ \omega = x + iy. \end{cases}$

$-8 + 6i = \omega^2$

$= (x+iy)^2$

$-8 + 6i = \underbrace{x^2 - y^2}_{Re} + \underbrace{2xyi}_{Im}$

الفكرة: الطويلة. $\begin{cases} |-8+6i| = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ 2x.y = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \; .....(1) \\ x^2 - y^2 = -8 \; .....(2) \\ 2x.y = 6 \; .....(3) \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -3 \end{cases}$

ومنه

كل عدد مركب يقبل جذرين تربيعين متناظرين

$\begin{cases} \omega_1 = 1 + 3i \; (x_1 + iy_1) \\ \omega_2 = -1 - 3i \end{cases}$

ليكن لدينا

$P(Z) = Z^4 - 2\sqrt{3}Z^3 + 8.Z^2 - 8\sqrt{2}Z + 16$

مع $\overline{P(Z)} = P(\overline{Z})$

وتقبل الحلين: $P(\sqrt{3}+i) = P(-2i) = 0$

. إستنتج الحلين الآخرين.

لدينا: $\overline{P(Z)} = P(\overline{Z})$

أي: $\overline{P(-2i)} = P(2i)$

$2i$ جذر لـ $P(Z)$.

ولدينا $\overline{P(\sqrt{3}+i)} = P(\sqrt{3}-i)$

$\sqrt{3}-i$ جذر لـ $P(Z)$.

ومنه:

$S = \{2i; -2i; \sqrt{3}+i; \sqrt{3}-i\}$

لدينا: $Z_A = -1+2i ; Z_B = -4+3i$.

$Z_C = 3i \; ; \; Z_D = 4-3i$

مع: $\frac{Z_C - Z_A}{Z_D - Z_B} = \frac{-i}{5} ; \frac{Z_C - Z_B}{Z_D - Z_B} = \frac{-2}{3}i$

المثلثين: ACD قائم في A

BCD قائم في B

- بين أن النقط A، B، C، D تقع على دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

- بما أن ACD قائم في A فإن النقط A، D، C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها I منتصف القطعة $[DC]$.

الفكرة ربط إستنتاج 1 بإستنتاج 2

لكن

لكي تنتمي B إلى الدائرة (C) يكفي ان نبين $(IB = IA)$

$$z_I = \frac{z_C + z_D}{2} = 2$$

ومنه:
$$\begin{cases} IB = \sqrt{13} \\ IA = \sqrt{13} \end{cases}$$

إذن B ينتمي إلى (C).

وعليه: A، B، C، D نقط تنتمي لنفس الدائرة.

A و B نقطتان متمايزتان.

1. لتكن النقطة K حيث أن:
$$\vec{AK} = -\frac{8}{3}\vec{AB}$$

أثبت أن K مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين صحيحين يطلب تعيينهما.

لدينا $3\vec{AK} = -8\vec{KB}$

$$-3\vec{KA} + 8\vec{KB} = \vec{0}$$

$$-3 + 8 \neq 0$$

الجملة تقبل مرجح $\{(A,-3);(B,8)\}$

$$\begin{cases} \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0} \\ \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB} \end{cases}$$

$$\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = (\alpha+\beta)\vec{MG}$$

إحداثيات مرجح:

$$z_G = \frac{\alpha.z_A + \beta.z_B + \gamma.z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$$

المرجح ومجموعة النقط:

حالة 1:

$$\|-2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \sqrt{5}$$

$$-2+1-3 = -4 \neq 0$$

الجملة تقبل مرجح H

$$\|-2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|-4\vec{MH}\|$$

ومنه:

$$\|-4\vec{MH}\| = \sqrt{5}$$

$$MH = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

دائرة مركزها H حيث:

$$z_H = \frac{-2.z_A + z_B - 3z_C}{-2+1-3}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

حالة 2:

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MD} - \vec{ME}\|$$

تقبل مرجح — لا تقبل مرجح

ومنه:

$$\|\vec{MG}\| = \|-\vec{DM} - \vec{ME}\| = \|-(\vec{DM}+\vec{ME})\| = \|-\vec{DE}\|$$

$$MG = DE$$

دائرة مركزها G ونصف قطرها $r = DE$.

حالة 3:

$$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

الفكرة نفكك وندرس كل جزء على حدى.

أول جزء:

$$\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

$$1-2+1 = 0$$

الجملة لا تقبل مرجح.

الفكرة: برهان أن الشعاع $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ مستقل على النقطة M.

$$\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA} + 2\vec{BM} + \vec{MC}$$
$$= \vec{MA} + \vec{BM} + \vec{BM} + \vec{MC}$$
$$= \vec{BC} - \vec{AB}$$
$$= \vec{BC} + \vec{BA}$$

$$1+1 \neq 0$$

الجملة تقبل مرجح.

ومنه $\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{BH}\|$

ثاني جزء:

$$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

$$1-4+1 \neq 0$$

الجملة تقبل مرجح

$$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|-2\vec{MG}\|$$

إذن $\|-2\vec{MG}\| = \|2\vec{BH}\|$

$$MG = BH$$

دائرة مركزها G نصف قطرها BH

حالة 4:

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\|\vec{MA} + \vec{MC}\|$$

$$\|4\vec{MG}\| = 2\|2\vec{MH}\|$$

$$4MG = 4MH$$

$$MG = MH$$

مستقيم محوري للقطعة $[GH]$

حالة 5:

$$(\vec{MD} + \vec{MA} + 3\vec{MC}).(\vec{MD} + \vec{MA} - 3\vec{MC}) = 0$$

$$(5\vec{MG})(-\vec{MH}) = 0$$

$$-5(\vec{MG}.\vec{MH}) = 0$$

$$-5 \neq$$

دائرة قطرها $[GH]$.

المناقشة

ناقش وجود النقطة G مرجح الجملة:

$$\{(A; m^2+2); (B; m^2+m-3)\}$$

$m^2 + 2 + m^2 + m - 3 \neq 0$

$2m^2 + m - 1 \neq 0$

$m_1 \neq -1 \qquad m_2 \neq \frac{1}{2}$

حتى تقبل الجملة مرجح يجب:

$m \neq \frac{1}{2}$ و $m \neq -1$

أي

$$S = \mathbb{R} - \{-1, \tfrac{1}{2}\}$$

حالة 6:

$(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC})(\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$

$(-\vec{MG})(-\vec{BM} - \vec{MC}) = 0$

$(-\vec{MG})(-\vec{BC}) = 0$

$\vec{MG}\cdot\vec{BC} = 0$

مستقيم يشمل G ويعامد الشعاع $\vec{BC}$.

عبارتي لايبنتز

لدينا: $\vec{MO}^2 + \vec{MA}^2 + 3\vec{MC}^2 = 4$

عين مجموعة النقط.

فكرة ①: تفكيك الجزء (1)

$\vec{MO}^2 + \vec{MA}^2 + 3\vec{MC}^2 = 5\vec{MG}^2 + \vec{GO}^2 + \vec{GA}^2 + 3\vec{GC}^2$

فكرة (2):

$5\vec{MG}^2 + \vec{GO}^2 + \vec{GA}^2 + 3\vec{GC}^2 = 4$

$5\vec{MG}^2 = 4 - (\vec{GO}^2 + \vec{GA}^2 + 3\vec{GC}^2)$

$\vec{MG}^2 = \dfrac{4 - (\vec{GO}^2 + \vec{GA}^2 + 3\vec{GC}^2)}{5}$

ندخل الجذر:

$\vec{MG} = \sqrt{\dfrac{4 - (\vec{GO}^2 + \vec{GA}^2 + 3\vec{GC}^2)}{5}} > 0$

$\vec{MG} = K$

دائرة مركزها G و $r = K$.

$\vec{MA}^2 - \vec{MB}^2 = 1$

$1 - 1 = 0$

الجملة 1 تقبل مرجح نستعمل طريقة حساب الأطوال

$\begin{cases} z_1 = i \\ z_2 = -\sqrt{3} - i \\ z_3 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$ ← الفكرة

$\vec{MA}^2 = \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}\right)^2$

$= x^2 + (y-1)^2$

$\vec{MB}^2 = \left(\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y+1)^2}\right)^2$

$= (x-\sqrt{3})^2 + (y+1)^2$

ومنه

$\vec{MA}^2 - \vec{MB}^2 = 1$

$2x\sqrt{3} - 4y - 4 = 0$

مستقيم.

(z_n) متتالية الأعداد المركبة معرفة:

$\begin{cases} z_0 = 4 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)\cdot z_n \end{cases}$

أوجد طويلة وعمدة كل من: z_1, z_2

---

① نحسب $\begin{cases} |z_0| = 4 \\ \arg(z_0) = 0 \end{cases}$

نضع: $\alpha = \frac{1}{2}(1+i)$

$\begin{cases} |\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \arg(\alpha) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$z_1 = \alpha \cdot z_0$

الطاويلة:

$|z_1| = |\alpha|\cdot|z_0|$

$= 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{|z_1| = 2\sqrt{2}}$

العمدة:

$\arg(z_1) = \arg(\alpha\cdot z_0)$

$= \arg(\alpha) + \arg(z_0)$

$= \frac{\pi}{4} + 0$

$\boxed{\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}}$

ومنه:

$\begin{cases} |z_1| = 2\sqrt{2} \\ \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} |z_2| = 2 \\ \arg(z_2) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ نضع:

$\Delta_n = |z_{n+1} - z_n|$

أحسب Δ_{n+1} بدلالة Δ_n.

$\Delta_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}|$

$= \left|\frac{1}{2}(1+i)z_{n+1} - \frac{1}{2}(1+i)z_n\right|$

$= \left|\frac{1}{2}(1+i)\right|\left|z_{n+1} - z_n\right|$

$\boxed{\Delta_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\Delta_n}$

بين أن المتتالية (Δ_n) هندسية يطلب إيجاد حدها الأول وأساسها.

لدينا المساواة:

$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنها نستنتج:

أن (Δ_n) متتالية هندسية أساسها $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

وحدها الأول:

$\Delta_0 = |z_1 - z_0|$

$\boxed{\Delta_0 = 2\sqrt{2}}$

أحسب (Δ_n) بدلالة n

لدينا (Δ_n) متتالية هندسية

$\Delta_n = \Delta_0 \cdot r^n$

$= 2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

إستنتج $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث لما $n \geq n_0$ يكون $\Delta_n < 10^{-2}$

$\Delta_n < 10^{-2}$

$2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 10^{-2}$

$2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-2}$

$2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}^n\cdot 2^{-n} < 10^{-2}$

$2\cdot 2^{1/2}\cdot 2^{n/2}\cdot 2^{-n} < 10^{-2}$

$2^{1-n} \cdot 2^{\frac{1+n}{2}} < 10^{-2}$

$2^{-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}} < 10^{-2}$

$\ln 2^{-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}} < \ln 10^{-2}$

$\left(-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}\right)\ln 2 < -2\ln 10$

$-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2} < -2\cdot\frac{\ln 10}{\ln 2}$

$-\frac{1}{2}n < -8,15$

ومنه: $n > 17$

الأعداد المركبة وطبيعة الرباعي:

متوازي الأضلاع:

الأقطار متناصفة:

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

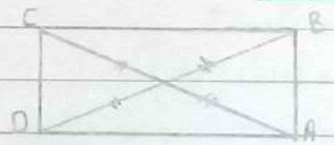
المعين:

الأقطار متناصفة ومتعامدة:

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

$(AC) \perp (BD)$

المستطيل:

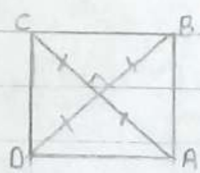


الأقطار متناصفة و متقايسة

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

$|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

المربع:



الأقطار متناصفة ومتقايسة و متعامدة:

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

$|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

$(AC) \perp (BD)$

شبه المنحرف:

يجب إثبات: $(CB) \parallel (DA)$

النسبة و مجموعة النقط:

حالة 1:

حقيقي $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}^*$

مجموعة النقط مستقيم (AB) بإستثناء النقطة B أي $(AB) - \{B\}$

حالة 2:

حقيقي موجب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}_+^*$

مجموعة النقط مستقيم (AB) بإستثناء القطعة $[AB]$ أي $(AB) - [AB]$.

حالة 3:

حقيقي سالب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}_-^*$

مجموعة النقط القطعة المفتوحة $]AB[$

الحالة 4:

تخيلي صرف $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in$

مجموعة النقط دائرة التي قطرها $[AB]$ بإستثناء النقطة B.

الحالة 5:

تخيلي صرف موجب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in$

مجموعة النقط هي نصف الدائرة التي قطرها $]AB[$ في الإتجاه المباشر (العلوي) (+)

الحالة 6:

تخيلي صرف سالب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in$

مجموعة النقط هي نصف الدائرة قطرها $]AB[$ في الإتجاه السفلي (−)

التحويلات النقطية:

الإنسحاب:

الشرط $a = 1$

شعاعه b

مثال: $z' = z + 1 - 2i$

$\begin{cases} \text{الشعاع } \vec{u}\binom{1}{-2} \\ \text{أو } z_{\vec{u}} = 1 - 2i \end{cases}$

التحاكي:

الشرط $a \in \mathbb{R} - \{1\}$

مركزه $z_\omega = \frac{b}{1-a}$

ونسبته $k = a$

مثال: $z' = 3z - 5i$

$\begin{cases} \text{المركز } z_\omega = \frac{-5}{2}i \\ \text{نسبته } k = 3 \end{cases}$

الدوران:

الشرط: $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$

$\begin{cases} \text{زاويته } \arg(a) \\ \text{مركزه } z_\omega = \frac{b}{1-a} \end{cases}$

مثال:

$z' = iz + 1 - i$

$\begin{cases} |a| = |i| = 1 \\ z_\omega = \frac{b}{1-a} = 1 \\ \arg(i) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

التشابه:

الشرط: $a \in \mathbb{C}$ و $|a| \neq 1$

$\begin{cases} \text{نسبته } k = |a| \\ \text{زاويته } \arg(a) \\ \text{مركزه } z_\omega = \frac{b}{1-a} \end{cases}$

مثال :

$z' = (1+i)z + i$

$$\begin{cases} |a| = |1+i| = \sqrt{2} \neq 1 \\ K = |a| = \sqrt{2} & \text{نسبته} \\ \arg(a) = \frac{\pi}{4} & \text{زاويته} \end{cases}$$

نعتبر التشابه المستوى المباشر S الذي يرفق بالنقطة A ذات اللاحقة $1+2i$، النقطة A' ذات اللاحقة $-4+2i$ وبالنقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3}+i$ النقطة B' ذات اللاحقة $-2+2i\sqrt{3}$.

1. عرف عبارة التشابه في المستوى المركب معينا عناصره المميزة.
2. عين عبارة التشابه باستعمال الشكل الأسي.
3. أكتب العبارة التحليلية لهذا التشابه.

1. عبارة التشابه:

$z' = az + b$

التعيين:

$$\begin{cases} z_{A'} = a z_A + b \\ z_{B'} = a \cdot z_B + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4+2i = a(1+2i)+b \\ -2+2i\sqrt{3} = a(\sqrt{3}+i)+b \end{cases}$$

بالطرح نجد (بالحساب)

$a = 2i$

ثم نعوض

$-4+2i = (2i)(1+2i)+b$

$b = -4+2i-2i+4$

$b = 0$

إذن العبارة هي:

$z' = 2iz$

عناصرها المميزة:

$$\begin{cases} |a| = |2i| = 2 & \text{نسبته} \\ \theta = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} & \text{زاويته} \\ z_w = 0 & \text{مركزه } O \end{cases}$$

2. الشكل الأسي:

$z' = 2iz$

$z' = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z$

3. العبارة التحليلية:

$z' = 2iz$

$x'+iy' = 2i(x+iy)$

$x'+iy' = 2ix - 2y$

$$\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases}$$

نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بالنقطة $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$ بحيث:

$x' = x+y+1$

$y' = -x+y+1$

أدرس طبيعة التحويل S.

لدينا: $z' = az + b$

$$\begin{cases} x' = x+y+1 \\ y' = -x+y+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = x'+iy' \\ z = x+iy \end{cases}$$

$z' = [x+y+1] + i[-x+y+1]$

$= x + y + 1 - xi + yi + i$

$= z + y + 1 - xi + i$

$= z - i^2 y + 1 - xi + i$

$= z - i(x+iy) + 1 + i$

$= z - iz + 1 + i$

$$\begin{cases} z' = (1-i)z + 1 + i \\ z' = az + b \end{cases}$$

بالمطابقة:

$$\begin{cases} a = 1-i \\ b = 1+i \end{cases}$$

العبارة المركبة لتحويل نقطي:

$z' - z_w = K \cdot e^{i\theta}(z - z_w)$

لدينا العبارة: لـ(S) التشابه المباشر

$z' = (i+1)z + 2 - i$

عين صورة بالتشابه (S) لـ الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(2,2)$ ونصف القطر 3.

لإيجاد صورة دائرة بتحويل نقطي:

مركزها هو صورة المركز الأول بالتحويل (S)

$z_{\Omega'} = (1+i) \cdot z_\Omega + 2 - i$

$= (1+i)(2+2i) + 2 - i$

$= 2 + 3i$

ومنه $\Omega'(2,3)$

ونصف قطرها:

$\boxed{r' = K \cdot r}$

$r' = \sqrt{2} \cdot 3$

$r' = 4,24$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي