النهايات نقبل تجاوزا الكتابات التالية:

$+\infty+\infty=+\infty$ ، $-\infty-\infty=-\infty$ ، $\infty+l=\infty$ ، $+\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$(\infty)(\infty)=\infty$ الاشارة جداء الاشارتين، $(\infty)\times l=\infty$ الاشارة جداء الاشارتين $l\neq 0$، $(\infty)\times 0$ ح ع ت

* $\frac{l}{\infty}=0$ (يمكن أن يكون $l=0$)، $\frac{l}{0}=\infty$ حيث $l\neq 0$ ، $\frac{\infty}{l}=\infty$ في حالة النتيجة ∞ الاشارة من اشارة البسط والمقام $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ حالتي عدم تعيين

حذاري : $\frac{0}{\infty}=0$، $\frac{\infty}{0}=\infty$، $(+\infty)(-\infty)=-\infty$ وليست حالات عدم تعيين

حالات عدم التعيين وطرق ازالتها

$$\frac{\infty}{\infty}$$

النتائج الممكنة	0	∞	عدد غير معدوم
متى هذه النتائج	المقام مقتدر على البسط	البسط مقتدر على المقام	تكافؤ بين البسط والمقام في الاقتدار
طريقة الازالة	إخراج العامل مشترك ، الاحسن ان يكون الاسرع الى ∞ أو بناء نهاية شهير		

أمثلة

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty$$ البسط مقتدر على المقام

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]=0$$ المقام مقتدر

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x+1}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right]=0$$ المقام مقتدر

مع العلم أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، نهاية شهيرة

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x+1}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right]=+\infty$$ البسط مقتدر

مع العلم أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ ، نهاية شهيرة

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}+2}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\frac{2}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}+2}{x+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\frac{2}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=-1$$

$$-\infty+\infty$$

النتائج الممكنة	عدد	$+\infty$	$-\infty$
متى تكون تلك النتائج	تكافؤ بين الجزء الذي يؤول الى ناقص لانهاية والجزء الذي يؤول الى زائد لانهاية	الجزءالذي يؤول الى $+\infty$ مقتدر على الجزء الذي يؤول الى $-\infty$	الجزء الذي يؤول الى $-\infty$ مقتدر على الجزء الذي يؤول الى $+\infty$
طريقة الازالة	إخراج العامل مشترك في حالة استقراء النتيجة $-\infty$ او $+\infty$ ، وفي حالة التكافؤ الضرب في المرافق في حالة الدوال الصماء		
أمثلة	$\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-\sqrt{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=$ $=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]$ $=\lim_{x\to+\infty}x\left[2+\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\left[x+1-\sqrt{4x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+1-\sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}\right]=$ $=\lim_{x\to+\infty}\left[x+1-2x\sqrt{\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}\right]\lim_{x\to+\infty}\left[x+1-\sqrt{4x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]$ $=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{x}-2\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-e^x\right]=\lim_{x\to+\infty}e^x\left[2\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}-1\right]=-\infty$ لان $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ ، نهاية شهيرة $\lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]=$ $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]=0$ $\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-lnx\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[2+\frac{1}{x}-\frac{lnx}{x}\right]=+\infty$ لان $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$ ، نهاية شهيرة		

$0 \times \infty$

النتائج الممكنة	عدد غير معدوم	∞	0
متى تكون تلك النتائج	تكافؤ بين سرعة الجزء الذي يؤول الى ∞ و الجزء الذي يؤول الى 0	سرعة الجزء الذي يؤول الى ∞ أكبر بكثير من سرعة الجزء الذي يؤول الى 0	سرعة الجزء الذي يؤول الى 0 أكبر بكثير من سرعة الجزء الذي يؤول الى∞
طريقة الازالة	بناء نهاية شهيرة في العموم ، او تغيير شكل العبارة حتى تصبح حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$		
أمثلة	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)\sqrt{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{(2x+1)\sqrt{x}}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x\sqrt{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}\right]=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x^2+1)e^x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2}x^2\,e^x\right]=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\,e^x\right]=0$ نهاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2}\right]=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x+1}{x}-1\right)x\,\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{x+1}{x}-1}\right]$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{x}\right)x\,\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{x+1}{x}-1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{x+1}{x}-1}\right]=1$ لان $\lim\limits_{t\to1}\left[\frac{\ln t}{t-1}\right]=1$ ،نهاية شهيرة		

$\frac{0}{0}$

النتائج الممكنة	عدد غير معدوم	0	∞
متى تكون تلك النتائج	تكافؤ بين سرعة البسط الى 0 و سرعة المقام الى 0	سرعة البسط الى 0 أكبر بكثير من سرعة المقام الى 0	سرعة المقام الى 0 أكبر بكثير من سرعة البسط الى 0
طريقة الازالة	بناء نهاية شهيرة ، التحليل ، العدد المشتق		
أمثلة	$\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2}\right]=$ $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{x-3}{x-1}\right]=-\infty$ أو $+\infty$ ،حسب اقتراب x من الواحد بقيم أصغر أو أكبر $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{e^x-3x-1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{e^x-1}{x}-\frac{3x}{x}\right]=-2$ لأن : $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{e^x-1}{x}\right]=1$ نهاية شهيرة حساب $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1+3x}{x}$ بوضع $g(x)=\sqrt{x+1}+3x$ لدينا $g(0)=\sqrt{1}+3\times0=1$ ولدينا $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+3$ ومنه تصبح النهاية من الشكل $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ وبما أن الدالة g قابلة للإشتقاق عند0 فإن النهاية هي$g'(0)$ أي $\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$ منه $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1+3x}{x}=\frac{7}{2}$ $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\times\frac{x+1}{x-3}=-\frac{1}{3}$ لان $\lim\limits_{t\to0}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=1$ ، نهاية شهيرة وهذا بوضع $t=x^2-1$ لما $x\to1$ فإن $t\to0$		

نهايات شهيرة

الدوال المثلثية	الدوال الاسية	الدالة اللوغارتمية
$\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta}=1$	$\lim\limits_{\Delta\to+\infty} e^{\Delta}=+\infty$	$\lim\limits_{\Delta\to+\infty}\ln(\Delta)=+\infty$
$\lim\limits_{\Delta\to+\infty}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta}=0$	$\lim\limits_{\Delta\to-\infty} e^{\Delta}=0$	$\lim\limits_{\substack{>\\ \Delta\to 0}}\ln(\Delta)=-\infty$
$\lim\limits_{\Delta\to-\infty}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta}=0$	$\lim\limits_{\Delta\to+\infty}\frac{e^{\Delta}}{\Delta^{n}}=+\infty$	$\lim\limits_{\Delta\to+\infty}\frac{\ln(\Delta)}{\Delta^{n}}=0$
$\lim\limits_{\Delta\to+\infty}\frac{\cos(\Delta)}{\Delta}=0$	$\lim\limits_{\Delta\to-\infty}\Delta^{n}e^{\Delta}=0$	$\lim\limits_{\substack{>\\ \Delta\to 0}}\Delta^{n}\ln(\Delta)=0$
$\lim\limits_{\Delta\to-\infty}\frac{\cos(\Delta)}{\Delta}=0$ $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\cos(\Delta)-1}{\Delta}=1$	$\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{e^{\Delta}-1}{\Delta}=1$	$\lim\limits_{\Delta\to 1}\frac{\ln(\Delta)}{\Delta-1}=1$ $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\ln(\Delta+1)}{\Delta}=1$
	$n\in\mathbb{N}$	

ملاحظة : القول أن جزء من عبارة مقتدر على الجزء الأخر من العبارة يقصد به سرعة الأول إلى ∞ أكبر من سرعة الثاني الى ∞

فسرعة الدالة الاسية إلى $+\infty$ أكبر بكثير من سرعة كثير حدود أو دالة ناطقة أو دالة صماء الى $+\infty$

وسرعة كثير حدود أو دالة ناطقة أو صماء إلى $+\infty$ أكبر بكثير من سرعة الدالة اللوغارتمية إليها

لذا لدينا في جوار $+\infty$: $e^{f(x)} \gg g(x) \gg \ln[h(x)]$ ، f و g و h دوال ناطقة أو كثيرات حدود

الترميز $\gg$ أكبر بكثير

بطاقة تقنية في حساب النهايات للدوال الاسية واللوغارتمية

الدوال الأسية:

من جل كل $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ كثيرات حدود او دستور لدالة ناطقة لدينا:

-1

شكل العبارة $e^{f(x)}$ ، $f(x)$ يؤول الى $-\infty$ النتيجة : 0

مثال: $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+3x-1} = 0$ ، $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} e^{\frac{x^2-4}{x-1}} = 0$ لأن $\begin{cases} x \overset{>}{\to} 1 \\ x-1 \overset{>}{\to} 0 \\ x^2-4 \to -3 \end{cases}$

-2

شكل العبارة $e^{f(x)}$ ، $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ النتيجة : $+\infty$

أمثلة: $\lim_{x\to-\infty} e^{x^2+3x-1} = +\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} e^{\frac{x^2}{x-1}} = +\infty$ لأن $\begin{cases} x \overset{>}{\to} 1 \\ x-1 \overset{>}{\to} 0 \\ x^2 \to 1 \end{cases}$

-3

شكل العبارة $g(x)+e^{f(x)}$، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ النتيجة : $+\infty$

طريقة الازالة إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ من نفس الدرجة أو درجة $f(x)$ أكبر نكتب العبارة على الشكل :

$g(x)+e^{f(x)} = f(x)\left[\frac{g(x)}{f(x)}+\frac{e^{f(x)}}{f(x)}\right]$، وذلك لبناء نهاية شهيرة $\lim_{f(x)\to+\infty}\frac{e^{f(x)}}{f(x)}$

ملاحظة : إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دستور لدالة ناطقة نعتبر تجاوزا أن ناتج الدرجة الثانية على الاولى يعطي الدرجة الأولى و الدرجة الثالثة على الاولى تعطي الثانية وهكذا

طريقة الازالة إذا كانت درجة $g(x)$ أكبر من درجة $f(x)$ نكتب العبارة على الشكل :

$g(x)+e^{f(x)} = \left(f(x)\right)^n\left[\frac{g(x)}{\left(f(x)\right)^n}+\frac{e^{f(x)}}{\left(f(x)\right)^n}\right]$، n درجة $g(x)$

ملاحظة:ليس ظروري إخراج عامل مشترك $\left(f(x)\right)^n$،المطلوب جعل الكسر $\frac{g(x)}{\left(f(x)\right)^n}$ يؤول الى عدد

شكل العبارة $g(x)-e^{f(x)}$، $g(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ النتيجة:$-\infty$

طريقة الازالة نفس ما قلنا سابقا

أمثلة :

-1 $\lim_{x\to-\infty}\left[(x+3)+e^{x^2+3x-1}\right] = \lim_{x\to-\infty}(x^2+3x-1)\left[\frac{(x+3)}{x^2+3x-1}+\frac{e^{x^2+3x-1}}{x^2+3x-1}\right] = +\infty$

لان: $\begin{cases} x \to -\infty \\ x^2+3x-1 \to +\infty \\ \frac{e^{x^2+3x-1}}{x^2+3x-1} \to +\infty \text{ ن ش} \\ \frac{(x+3)}{x^2+3x-1} \to 0 \end{cases}$

-2 $$\lim_{x\to+\infty}\left[-x^2+3x-1+e^{3x-1}\right] = \lim_{x\to+\infty}(3x-1)^2\left[\frac{-x^2+3x-1}{(3x-1)^2}+\frac{e^{3x-1}}{(3x-1)^2}\right]$$

لان: $\begin{cases} x \to +\infty \\ (3x-1)^2 \to +\infty \\ \frac{e^{3x-1}}{(3x-1)^2} \to +\infty \text{ ن ش} \\ \frac{(-x^2+3x-1)}{(3x-1)^2} \to \frac{-1}{9} \end{cases}$

-3 $$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\left[\frac{5x+2}{(x-1)^2}-e^{\frac{x+3}{x-1}}\right] = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2\left[\frac{\frac{5x+2}{(x-1)^2}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2}-\frac{e^{\frac{x+3}{x-1}}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2}\right] =$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2\left[\frac{5x+2}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2-\frac{e^{\frac{x+3}{x-1}}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2}\right] = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2\left[\frac{5x+2}{(x+3)^2}-\frac{e^{\frac{x+3}{x-1}}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2}\right] = -\infty$$

لان $\begin{cases} \overset{>}{x \to 1} \\ x-1 \overset{>}{\to} 0 \\ \frac{x+3}{x-1} \to +\infty \end{cases}$ أي $\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2 = +\infty$ و $\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\frac{e^{\frac{x+3}{x-1}}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2} = +\infty$ و $\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\frac{5x+2}{(x+3)^2} = \frac{7}{16}$

-4

شكل العبارة $g(x)+h(x)e^{f(x)}$، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $+\infty$ النتيجة : $+\infty$

طريقة الازالة إذا كانت $g(x)$ و $f(x)$ من نفس الدرجة أو درجة $f(x)$ أكبر نكتب العبارة على الشكل :

$$g(x)+\ h(x)e^{f(x)} = f(x)\left[\frac{g(x)}{f(x)}+\ h(x)\frac{e^{f(x)}}{f(x)}\right]$$

ملاحظة : ليس من الظروري اخراج $f(x)$ عامل مشترك ولكن لابد من قسمة $g(x)$ على عبارة تنتج من اخراجها كامل مشترك وتحقق ان الكسر $g(x)$ وعلى تلك العبارة يؤول الى عدد قد تكون العبارة هي $h(x)$ أو x

إذا كانت درجة $g(x)$ أكبر من درجة $f(x)$ نكتب العبارة على الشكل :

$$g(x)+h(x)e^{f(x)} = \left(f(x)\right)^n\left[\frac{g(x)}{\left(p(x)\right)^n}+h(x)\frac{e^{f(x)}}{\left(f(x)\right)^n}\right]$$ ، n درجة $g(x)$

ملاحظة: ليس ظروري اخراج عامل مشترك $\left(f(x)\right)^n$،المطلوب جعل الكسر $\frac{g(x)}{\left(f(x)\right)^n}$ يؤول الى عدد

شكل العبارة $g(x)+h(x)e^{f(x)}$، $g(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $-\infty$ النتيجة : $-\infty$

طريقة الازالة نفس ما قلنا سابقا

أمثلة: 1-

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x+3+(-2x+5)e^{x^2+3x-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x-1)\left[\frac{x+3}{x^2+3x-1}+(-2x+5)\frac{e^{x^2+3x-1}}{x^2+3x-1}\right]=+\infty$$

لان $x^2+3x-1\to+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x^2+3x-1}=0$

$$\begin{cases} x\to-\infty \\ -2x+5\to+\infty \\ \frac{e^{x^2+3x-1}}{x^2+3x-1}\to+\infty \text{ ن ش} \end{cases}$$

2- $\lim_{x\to+\infty}\left[x+3+(-2x+5)e^{x+2}\right]=$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{x+3}{x}+\frac{-2x+5}{x}e^{x+2}\right]=-\infty$$

لان $\begin{cases} x\to+\infty \\ e^{x+2}\to+\infty \\ \frac{x+3}{x}\to1 \\ \frac{-2x+5}{x}\to-2 \end{cases}$

-5

شكل العبارة $\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)}$، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ أو عدد و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $+\infty$ النتيجة : $+\infty$

طريقة الازالة إذا كانت $g(x)$ و $f(x)$ و $h(x)$ من نفس الدرجة أو درجة $f(x)$ أكبر

نكتب العبارة على الشكل : $\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)}=\frac{\frac{g(x)}{f(x)}+\frac{e^{f(x)}}{f(x)}}{\frac{h(x)}{f(x)}}$

إذا كانت درجة $g(x)$ أو $h(x)$ أكبر من درجة $f(x)$ نكتب العبارة على الشكل :

$\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)}=\frac{\frac{g(x)}{[f(x)]^n}+\frac{e^{f(x)}}{[f(x)]^n}}{\frac{h(x)}{[f(x)]^n}}$ ، n الدرجة الاكبر بين درجة $g(x)$ و $h(x)$

ملاحظة:ليس ظروري القسمة على $(f(x))^n$،المطلوب جعل الكسران $\frac{g(x)}{(f(x))^n}$ و $\frac{h(x)}{(f(x))^n}$ يؤولان الى عدد

شكل العبارة $\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)}$، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ أو عدد و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $-\infty$ النتيجة : $-\infty$

أمثلة : 1- $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+e^{x^2+3x-1}}{x+3}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{x^2+3x-1}+\frac{e^{x^2+3x-1}}{x^2+3x-1}}{\frac{x+3}{x^2+3x-1}}\right]=+\infty$

لان $\begin{cases}x\to+\infty\\ x^2+3x-1\to+\infty\\ \frac{e^{x^2+3x-1}}{x^2+3x-1}\to+\infty \text{ ن ش}\end{cases}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+3x-1}=0$ و $\begin{cases}x\to+\infty\\ \frac{x+3}{x^2+3x-1}\overset{>}{\to}0\end{cases}$

2- $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{x+2}}{x^2+3x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{e^{x+2}}{(x+2)^2}}{\frac{x^2+3x-1}{(x+2)^2}}\right]=+\infty$

3- $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x+e^{x+2}}{-3x+5}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{-x}{x+2}+\frac{e^{x+2}}{x+2}}{\frac{-3x+5}{x+2}}\right]=-\infty$ لان $\begin{cases}x\to+\infty\\ \frac{-x}{x+2}\to-1\\ \frac{-3x+5}{x+2}\to-3\\ \frac{e^{x+2}}{x+2}\to+\infty \text{ ن ش}\end{cases}$

-6

شكل العبارة $\frac{e^{f(x)}-1}{g(x)}$، $g(x)$ يؤول الى 0 و $f(x)$ يؤول الى 0 النتيجة حسب نهاية $\frac{f(x)}{g(x)}$

طريقة الازالة نكتب العبارة على الشكل : $\frac{e^{f(x)}-1}{g(x)}=\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\times\frac{f(x)}{g(x)}$ ولدينا $\begin{cases}f(x)\to0\\ \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\to1 \text{ ن ش}\end{cases}$

ولحساب نهاية $\frac{f(x)}{g(x)}$ من أجل $g(x)$ يؤول الى 0 و $f(x)$ يؤول الى 0 نستعمل التحليل غالبا وليس دوما

مثال : $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1+e^{\frac{x}{x^2-1}}}{\frac{x}{x^2+1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1+e^{\frac{x}{x^2-1}}}{\frac{x}{x^2-1}}\times\frac{\frac{x}{x^2-1}}{\frac{x}{x^2+1}}\right]$

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1+e^{\frac{x}{x^2-1}}}{\frac{x}{x^2-1}}\times\frac{x^3+x}{x^3-x}\right]=1$ لان $\begin{cases}x\to+\infty\\ \frac{x^3+x}{x^3-x}\to1\\ \frac{-1+e^{\frac{x}{x^2-1}}}{\frac{x}{x^2-1}}\to1 \text{ ن ش}\end{cases}$

-7

شكل العبارة $\frac{f(e^x)}{g(e^x)}$ ، $g(e^x)$ يؤول الى$-\infty$ او $+\infty$ و $f(e^x)$ يؤول الى$-\infty$ او $+\infty$

طريقة الازالة يمكن وضع $e^x=t$ وتصبح بعدها نهاية دالة ناطقة

شكل العبارة $\frac{f(e^x)+h(x)}{g(e^x)}$ ، $g(e^x)$ يؤول الى$-\infty$ او $+\infty$ و $f(e^x)$ يؤول الى$-\infty$ او $+\infty$
و $h(x)$ تؤول $-\infty$ او $+\infty$

طريقة الازالة أخراج اسية عبارة أكبر مايمكن في البسط واسية عبارة اكبر ما يمكن في المقام

أمثلة :

-1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{2x}+e^{x}+1}{e^{2x}+1}\right]=1$ لأنه: بوضع $z=e^{x}$ لما $x\to+\infty$ فإن $z\to+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{2x}+e^{x}+1}{e^{2x}+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{z^{2}+z+1}{z^{2}+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{z^{2}}{z^{2}}\right]=1$

-2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{e^{-3x}+e^{-x}+1}{e^{-2x}+1}\right]=+\infty$ بوضع $z=e^{-x}$ لما $x\to-\infty$ فإن $z\to+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{e^{-3x}+e^{-x}+1}{e^{-2x}+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{z^{3}+z+1}{z^{2}+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{z^{3}}{z^{2}}\right]=+\infty$

-3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{x}-x+1}{e^{2x}+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{x}\left(1-\frac{x}{e^{x}}+\frac{1}{e^{x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1-\frac{x}{e^{x}}+\frac{1}{e^{x}}}{e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)}\right]=0$ لأن $\begin{cases} x\to+\infty \\ \frac{1}{e^{2x}}\to 0 \\ \frac{1}{e^{x}}\to 0 \\ \frac{x}{e^{x}}\to 0 \end{cases}$ ن ش

8- شكل العبارة $g(x)e^{f(x)}$، $f(x)$ يؤول الى $-\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $+\infty$ او $-\infty$ النتيجة : 0

طريقة الإزالة نكتب العبارة على الشكل $\frac{g(x)}{f(x)}f(x)\,e^{f(x)}$ وذلك لبناء ن شهيرة $\lim\limits_{f(x)\to-\infty} f(x)\,e^{f(x)}$

إذا كانت درجة $g(x)$ أكبر من درجة $f(x)$ نكتب العبارة على الشكل: $\frac{g(x)}{(f(x))^{n}}\left(f(x)\right)^{n}e^{f(x)}$

ملاحظة:ليس الظروري الضرب والقسمة على $\left(f(x)\right)^{n}$ المطلوب جعل الكسر $\frac{g(x)}{(f(x))^{n}}$ يؤول الى عدد

أمثلة :

-1

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)e^{-x^{2}+3x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+3}{-x^{2}+3x-1}(-x^{2}+3x-1)e^{-x^{2}+3x-1}\right]$$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(-x^{2}+3x-1)e^{-x^{2}+3x-1}\right]=0$ بوضع $z=-x^{2}+3x-1$ لما $x\to+\infty$ فإن $z\to-\infty$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(-x^{2}+3x-1)e^{-x^{2}+3x-1}\right]=\lim\limits_{z\to-\infty} ze^{z}=0$ (ن شهيرة)

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{-x^{2}+3x-1}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+3)e^{-x^{2}+3x-1}\right]=0$

-2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(-x^{2}+3x-1)e^{x+2}\right]=0$ لان :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(-x^{2}+3x-1)e^{x+2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x^{2}+3x-1}{(x+2)^{2}}\times(x+2)^{2}e^{x+2}\right]$$

ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+2)^{2}e^{x+2}\right]=0$ بوضع، $z=x+2$ لما $x\to-\infty$ فإن $z\to-\infty$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+2)^{2}e^{x+2}\right]=\lim\limits_{z\to-\infty} z^{2}e^{z}=0$ (نهاية شهيرة)

و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{-x^{2}+3x-1}{(x+2)^{2}}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{-x^{2}}{x^{2}}\right]=-1$

الدوال اللوغارتمية:

من جل كل $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ كثيرات حدود او دستور لدالة ناطقة لدينا:

(1

شكل العبارة $\ln[f(x)]$، $f(x)$ يؤول الى 0 بقيم أكبرلما x يؤول الى $-\infty$ او $+\infty$ أو x_0 النتيجة : $-\infty$

أمثلة: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \ln[x^2-1] = -\infty$ لأن $\begin{cases} x \overset{>}{\to} 1 \\ x^2-1 \overset{>}{\to} 0 \end{cases}$

وكذلك : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left[\frac{-3x+2}{x^2+1}\right] = -\infty$ لأن $\begin{cases} x \to -\infty \\ \frac{-3x+2}{x^2+1} \overset{>}{\to} 0 \end{cases}$

(2

شكل العبارة $\ln[f(x)]$ ، $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ لما x يؤول الى $-\infty$ او $+\infty$ أو x_0 النتيجة : $+\infty$

أمثلة: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln[x^2-1] = +\infty$ لأن $\begin{cases} x \to +\infty \\ x^2-1 \to +\infty \end{cases}$

وكذلك: $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln[-2x^3-1] = +\infty$ لأن: $\begin{cases} x \to +\infty \\ -2x^3-1 \to +\infty \end{cases}$

وكذلك: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \ln\left[\frac{x+2}{x^2-1}\right] = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $\begin{cases} x^2-1 \overset{>}{\to} 0 \\ \frac{x+2}{x^2-1} \to +\infty \end{cases}$

(3

شكل العبارة $g(x)+ln(f(x))$، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ النتيجة : $-\infty$

طريقة الازالة إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ من نفس الدرجة أو درجة $g(x)$ أكبر نكتب العبارة على الشكل :

$g(x)+ln(f(x)) = f(x)\left[\frac{g(x)}{f(x)} + \frac{ln(f(x))}{f(x)}\right]$، وذلك لبناء نهاية شهيرة $\lim\limits_{f(x)\to+\infty} \frac{ln(f(x))}{f(x)}$

طريقة الازالة إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من درجة $g(x)$ نستعمل الخواص لانزال درجة $f(x)$

ملاحظة : إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دستور لدالة ناطقة نعتبر تجاوزا أن ناتج الدرجة الثانية على الاولى يعطي الدرجة الأولى وهكذا

خواص: من اجل a و b عددان حقيقيان موجبان تماما ومن أجل n عدد ناطق لدينا

$ln(a\times b) = lna + lnb$ ، $ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$ ، $ln(a^n) = nlna$

$ln\left(\frac{1}{a}\right) = -lna$ ، $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}lna$

شكل العبارة $g(x)-ln(f(x))$، $g(x)$ تؤول إلى $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ النتيجة : $+\infty$

طريقة الازالة نفس ما قلنا سابقا

أمثلة :

1- $\lim\limits_{x\to+\infty}[(-2x+3)+ln[x+4]]=-\infty$ لان

$$\lim\limits_{x\to+\infty}[-2x+3+ln[x+4]]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+4)\left[\frac{-2x+3}{x+4}+\frac{ln[x+4]}{x+4}\right]$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{ln[x+4]}{x+4}\right]=0$ (نهاية شهيرة)

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x+3}{x+4}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{-2x}{x}\right]=-2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+4)=+\infty$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty}[(-x^2+3x-1)+ln[x^2+4]]=-\infty$ لان:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}[-x^2+3x-1+ln(x^2+4)]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+4)\left[\frac{-x^2+3x-1}{x^2+4}+\frac{ln[x^2+4]}{x^2+4}\right]$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{ln[x^2+4]}{x^2+4}\right]=0$ (نهاية شهيرة) و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-x^2+3x-1}{x^2+4}\right]=-1$

3- $\lim\limits_{x\to+\infty}[(-2x+3)+ln[x^2+4]]=-\infty$ لان

$$\lim\limits_{x\to+\infty}[(-2x+3)+ln[x^2+4]]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(-2x+3)+ln\left[x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\right]\right]$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-2x+3+ln(x^2)+ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-2x+3+2ln|x|+ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\right]$$

بإخراج x عامل مشترك نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{-2x+3}{x}+2\frac{lnx}{x}+\frac{ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x}\right]$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{lnx}{x}\right]=0$ (نهاية شهيرة) و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x}\right]=0$

(4

شكل العبارة $\frac{ln[f(x)]}{g(x)}$، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ النتيجة : 0

طريقة الازالة

إذا كانت $g(x)$ و $f(x)$ من نفس الدرجة أو درجة $g(x)$ أكبر نكتب العبارة على الشكل: $\frac{ln[f(x)]}{g(x)}=\frac{\frac{lnf(x)}{f(x)}}{\frac{g(x)}{f(x)}}$

إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من درجة $g(x)$ نستعمل خواص ln لانزال درجة $f(x)$

أمثلة: **1-** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{ln[x+4]}{-2x+3}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{ln[x+4]}{x+4}}{\frac{-2x+3}{x+4}}\right]=0$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{ln[x+4]}{x+4}\right]=0$ (نهاية شهيرة) و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x+3}{x+4}\right]=-2$

-2 $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln[x^2+4]}{-x^2+3x-1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{\ln[x^2+4]}{x^2+4}}{\frac{-x^2+3x-1}{x^2+4}}\right] = 0$ لان:

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln[x^2+4]}{x^2+4}\right] = 0$ (نهاية شهيرة) و $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x^2+3x-1}{x^2+4}\right] = -1$

-3 $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln[x^2+4]}{3x-1}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\right]}{3x-1}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2\ln|x|+\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{3x-1}\right]$

$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2\ln|x|}{3x-1} + \frac{\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{3x-1}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[2\frac{\frac{\ln(-x)}{-x}}{\frac{3x-1}{-x}} + \frac{\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{3x-1}\right] = 0$ لان

$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln(-x)}{-x}\right] = 0$ (نهاية شهيرة) و $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{3x-1}\right] = 0$ و $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x-1}{-x}\right] = -3$

(5

شكل العبارة $g(x)+h(x)\ln[f(x)]$، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $+\infty$ النتيجة متعلقة بدرجة $h(x)$ و $g(x)$ إذا كانت درجة $g(x)$ اكبر من $h(x)$ فإن النتيجة $-\infty$ وإذا كانت درجة $h(x)$ اكبر من أو تساوي درجة $g(x)$ فإن $+\infty$

حالة 1 طريقة الازالة إذا كانت درجة $h(x)$ تساوي أو أكبر من درجة $g(x)$ نكتب العبارة على الشكل :

$$g(x) + h(x)\ln[f(x)] = h(x)\left[\frac{g(x)}{h(x)} + \ln[f(x)]\right]$$

أو كتابة العبارة $g(x) + h(x)\ln[f(x)] = g(x)\left[1 + \frac{h(x)}{g(x)}\ln[f(x)]\right]$

مثال :

-1 $\lim_{x\to+\infty}[-2x+3+(3x+5)\ln[x+4]] = +\infty$ لان

$$\lim_{x\to+\infty}[-2x+3+(3x+5)\ln[x+4]] = \lim_{x\to+\infty}(3x+5)\left[\frac{-2x+3}{3x+5} + \ln[x+4]\right]$$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln(x+4) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+3}{3x+5} = \frac{-2}{3}$

-2 $\lim_{x\to+\infty}[-2x+3+(3x^2+5)\ln[x+4]] = +\infty$ لان

$$\lim_{x\to+\infty}[-2x+3+(3x^2+5)\ln[x+4]] = \lim_{x\to+\infty}(3x^2+5)\left[\frac{-2x+3}{3x^2+5} + \ln[x+4]\right]$$

و $\lim_{x\to+\infty}[\ln[x+4]] = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5}{-2x+3} = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(-2x+3) = -\infty$

-3 $\lim_{x\to+\infty}[-2x+3+(3x^2+5)\ln[x+4]] = +\infty$ لان

$$\lim_{x\to+\infty}[-2x+3+(3x^2+5)\ln[x+4]] = \lim_{x\to+\infty}(-2x+3)\left[1 + \frac{3x^2+5}{-2x+3}\ln[x+4]\right]$$

و $\lim_{x\to+\infty}[\ln[x+4]] = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5}{-2x+3} = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(-2x+3) = -\infty$

حالة 2 طريقة الازالة إذا كانت درجة $g(x)$ أكبر من درجة $h(x)$ نكتب العبارة على الشكل :

$$g(x)+h(x)ln[f(x)]=g(x)\left[1+\frac{h(x)}{\frac{g(x)}{x}}\times\frac{ln[f(x)]}{x}\right]$$

ثم نبين أن $\frac{ln[f(x)]}{x}$ يؤول الصفر كما في الحالة 4 سابقا

أو $g(x)+h(x)ln[f(x)]=h(x)\left[\frac{g(x)}{h(x)}+ln[f(x)]\right]$ نضع $k(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ نتعامل مع العبارة $k(x)+ln[f(x)]$ أن وجدت حالة عدم تعيين كما قلنا في الشكل 3

مثال :

$\lim_{x\to+\infty}[-2x^2+3+(3x+5)ln[x+4]]=-\infty$ لان

$$\lim_{x\to+\infty}[-2x+3+(3x+5)ln[x+4]]=\lim_{x\to+\infty}(3x+5)\left[\frac{-2x^2+3}{3x+5}+ln[x+4]\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x+4)(3x+5)\left[\frac{-2x^2+3}{(3x+5)(x+4)}+\frac{ln[x+4]}{x+4}\right]$$ لان $\lim_{x\to+\infty}(x+4)(3x+5)=-\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln[x+4]}{x+4}=0$ (نهاية شهيرة) و $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x^2+3}{(3x+5)(x+4)}\right]=\frac{-2}{3}$

شكل العبارة $g(x)+h(x)ln[f(x)]$، $g(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $-\infty$ النتيجة متعلقة بدرجة $h(x)$ و $g(x)$ إذا كانت درجة $g(x)$ اكبر تماما من درجة $h(x)$ فإن النتيجة $+\infty$ وإذا كانت درجة $h(x)$ اكبر من أو تساوي درجة $g(x)$ فإن $-\infty$

حالة 1 طريقة الازالة إذا كانت درجة $h(x)$ تساوي أو أكبر من درجة $g(x)$ نكتب العبارة على الشكل :

$$g(x)+h(x)ln[f(x)]=h(x)\left[\frac{g(x)}{h(x)}+ln[f(x)]\right]$$

مثال :

-1 $\lim_{x\to+\infty}[3x+(2-x)ln[x+4]]=-\infty$ لان

$$\lim_{x\to+\infty}[3x+(2-x)ln[x+4]]=\lim_{x\to+\infty}(2-x)\left[\frac{3x}{2-x}+ln[x+4]\right]$$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}ln(x+4)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2-x}=-3$

حالة 2 طريقة الازالة إذا كانت درجة $g(x)$ أكبر من درجة $h(x)$ نكتب العبارة على الشكل :

$g(x)+h(x)ln[f(x)]=h(x)\left[\frac{g(x)}{h(x)}+ln[f(x)]\right]$ نضع $k(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ نتعامل مع العبارة $k(x)+ln[f(x)]$ أن وجدت حالة عدم تعيين كما قلنا في الشكل 3

مثال :

$\lim_{x\to+\infty}[x^2+3+(-x+5)ln[x+4]]=+\infty$ لان

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2+3+(-x+5)ln[x+4]\right]=\lim_{x\to+\infty}(-x+5)\left[\frac{x^2+3}{-x+5}+ln[x+4]\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+4)(-x+5)\left[\frac{x^2+3}{(-x+5)(x+4)}+\frac{ln[x+4]}{x+4}\right]=$$ لان $\lim_{x\to+\infty}(x+4)(-x+5)=-\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln[x+4]}{x+4}=0$ (نهاية شهيرة) و $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+3}{(-x+5)(x+4)}\right]=-1$

(6

شكل العبارة $\frac{g(x)+ln[f(x)]}{h(x)}$، $g(x)$ و $h(x)$ يؤولان الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ النتيجة متعلقة بدرجة $g(x)$ و $h(x)$ إذا كانت درجة $g(x)$ اكبر من $h(x)$ فإن النتيجة $+\infty$ (كليهما يؤولان الى $-\infty$ أو كليهما الى $+\infty$) أو $-\infty$ (أحدهما تؤول الى $-\infty$ والاخرى الى $+\infty$) وإذا كانت درجة $h(x)$ اكبر من $g(x)$ فإن النتيجة 0 واذا كان لهما نفس الدرجة فإن النتيجةعدد غير معدوم

طريقة الإزالة نكتب العبارة على الشكل: $\frac{g(x)+ln[f(x)]}{h(x)}=\frac{g(x)}{h(x)}+\frac{ln[f(x)]}{h(x)}$

نهاية $\frac{ln[f(x)]}{h(x)}$ تطرقنا اليه في 4 و نهاية $\frac{g(x)}{h(x)}$ نهاية دالة ناطقة ناتجة من كثيري حدود او دالتين ناطقتين

أمثلة :

-1 $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x+ln[x+4]}{-2x+3}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x}{-2x+3}+\frac{\frac{ln[x+4]}{x+4}}{\frac{-2x+3}{x+4}}\right]=1$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{ln[x+4]}{x+4}\right]=0$ (ن ش) و $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x+3}{x+4}\right]=-2$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x}{-2x+3}\right]=1$

-2 $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x^2+ln[x+4]}{-2x+3}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x^2}{x+3}+\frac{\frac{ln[x+4]}{x+4}}{\frac{x+3}{x+4}}\right]=-\infty$ لان:

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{ln[x+4]}{x+4}\right]=0$ (ن ش) و $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+3}{x+4}\right]=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x+3}=-\infty$

-3 $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2x+ln[-x+4]}{x^2+3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2x}{x^2+3}+\frac{\frac{ln[-x+4]}{-x+4}}{\frac{x^2+3}{-x+4}}\right]=0$ لان:

$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{ln[-x+4]}{-x+4}\right]=0$ (ن ش) و $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+3}{-x+4}\right]=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2+3}=0$

(7

شكل العبارة $g(x)ln[f(x)]$، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ كثيري حدود حيث $f(x)$ ينتهي الى 0 و $g(x)$ ينتهي الى 0 من أجل x يؤول الى x_0 و x_0 جذر لـ $f(x)$ فإن $g(x)ln[f(x)]$ يؤول الى 0 من اجل x يؤول x_0

طريقة الإزالة:نكتب العبارة على الشكل $\frac{g(x)}{f(x)}f(x)ln[f(x)]$ لبناء ن ش $\lim_{f(x)\overset{>}{\to}0} f(x)\,ln[f(x)]$

مثال : $\lim_{x\overset{>}{\to}2}[(x-2)ln[x^2-4]]=0$ لان

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 2}}[(x-2)ln[x^2-4]] = \lim_{\substack{> \\ x\to 2}}\left[\frac{(x-2)}{(x^2-4)} \times (x^2-4)ln[x^2-4]\right]$$

و $\lim_{\substack{> \\ x\to 2}}[(x^2-4)ln[x^2-4]] = 0$ (نهاية شهيرة) و $\lim_{\substack{> \\ x\to 2}}\left[\frac{(x-2)}{(x^2-4)}\right] = \lim_{\substack{> \\ x\to 2}}\left[\frac{1}{x+2}\right] = \frac{1}{4}$

(8

شكل العبارة $g(x)ln[f(x)]$، $g(x)$ يؤول إلى $-\infty$ أو $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى 1 النتيجة حسب نهاية $g(x)(f(x)-1)$

طريقة الازالة نكتب العبارة على الشكل : $g(x)ln[f(x)] = (f(x)-1)g(x)\frac{ln[f(x)]}{f(x)-1}$

ولدينا: $\begin{cases} f(x)\to 1 \\ \frac{ln[f(x)]}{f(x)-1} \to 1 \text{ ن ش} \end{cases}$

أمثلة :

1- $\lim_{x\to+\infty}\left[xln\left[\frac{x}{x+3}\right]\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{x}{x+3}-1\right)\frac{ln\left[\frac{x}{x+3}\right]}{\left(\frac{x}{x+3}-1\right)}\right]$

$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-3x}{x+3} \times \frac{ln\left[\frac{x}{x+3}\right]}{\left(\frac{x}{x+3}-1\right)}\right] = -3$ لان $\begin{cases} x\to+\infty \\ \frac{x}{x+3}\to 1 \\ \frac{ln\left[\frac{x}{x+3}\right]}{\left(\frac{x}{x+3}-1\right)} \to 1 \text{ ن ش} \end{cases}$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-3x}{x+3}\right] = -3$

2- $\lim_{x\to+\infty}\left[x^2ln\left[\frac{x}{x+3}\right]\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{x}{x+3}-1\right)\frac{ln\left[\frac{x}{x+3}\right]}{\left(\frac{x}{x+3}-1\right)}\right]$

$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-3x^2}{x+3} \times \frac{ln\left[\frac{x}{x+3}\right]}{\left(\frac{x}{x+3}-1\right)}\right] = -\infty$ لان $\begin{cases} x\to+\infty \\ \frac{x}{x+3}\to 1 \\ \frac{ln\left[\frac{x}{x+3}\right]}{\left(\frac{x}{x+3}-1\right)} \to 1 \text{ ن ش} \end{cases}$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-3x^2}{x+3}\right] = -\infty$

خلاصة لاهم الحالات

الأسية

العبارة	الشروط	النتيجة أو كيفية الازالة
$e^{f(x)}$	$f(x)$ تؤول الى $-\infty$	0
$e^{f(x)}$	$f(x)$ تؤول الى $+\infty$	$+\infty$
$g(x)+h(x)e^{f(x)}$	$f(x)$ تؤول الى $+\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $-\infty$ و $h(x)$ تؤول الى $+\infty$	طريقة الازالة : اخراج العامل المشترك $f(x)\left[\frac{g(x)}{f(x)}+h(x)\frac{e^{f(x)}}{f(x)}\right]$ و إذا كانت درجة $g(x)$ أكبر من درجة $f(x)$ نخرج عامل مشترك $f(x)$ مرفوعة الى اس يجعل $\frac{g(x)}{f(x)}$ يؤول الى عدد
$\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)}$	$f(x)$ تؤول الى $+\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $-\infty$ أو $-\infty$ و $h(x)$ تؤول الى $+\infty$	طريقة الازالة : قسمة البسط والمقام $\frac{\frac{g(x)}{f(x)}+\frac{e^{f(x)}}{f(x)}}{\frac{h(x)}{f(x)}}$ وإذا كانت درجة $g(x)$ أو $h(x)$ أكبر من درجة $f(x)$ نقسم على $f(x)$ مرفوعة الى اس يجعل $\frac{g(x)}{f(x)}$ و $\frac{h(x)}{f(x)}$ يؤولان الى عدد
$g(x)e^{f(x)}$	$f(x)$ تؤول الى $-\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $-\infty$ أو $-\infty$	طريقة الازالة: نضرب ونقسم في نفس العدد $\frac{g(x)}{f(x)}f(x)\,e^{f(x)}$ وإذا كانت درجة $g(x)$ أكبر من درجة $f(x)$ نضرب و نقسم في $f(x)$ مرفوعة الى اس يجعل $\frac{g(x)}{f(x)}$ يؤول الى عدد

اللوغارتمية

العبارة	الشروط	النتيجة أو كيفية الازالة
$lnf(x)$	$f(x)$ تؤول الى 0 بقيم أكبر	$-\infty$
$lnf(x)$	$f(x)$ تؤول الى $+\infty$	$+\infty$
$g(x)+lnf(x)$	$f(x)$ تؤول الى $+\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $-\infty$	طريقة الازالة : اخراج العامل المشترك $f(x)\left[\frac{g(x)}{f(x)}+\frac{lnf(x)}{f(x)}\right]$ و إذا كانت درجة $g(x)$ أقل من درجة $f(x)$ ننزل الدرجة للعبارة امام ln باستعمال الخواص
$\frac{g(x)+ln[f(x)]}{h(x)}$	$f(x)$ تؤول الى $+\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $-\infty$ أو $-\infty$ و $h(x)$ تؤول الى $+\infty$	طريقة الإزالة: قسمة البسط والمقام $\frac{g(x)}{h(x)}+\frac{\frac{ln[f(x)]}{f(x)}}{\frac{h(x)}{f(x)}}$ وإذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من درجة $h(x)$ ننزل الدرجة للعبارة التى امام ln باستعمال الخواص وسنجد $\frac{ln[f(x)]}{h(x)}$ يؤول الى الصفر ونتيجة النهاية هي النتيجة التى يؤول اليها $\frac{g(x)}{h(x)}$

النهايات والحصر – النهايات والمقارنة

مبرهنة الحصر:

f، g و h دوال عددية و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x) = l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي

$g(x) < f(x) < h(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

تمدد هذه المبرهنة عند حالتي $x \to -\infty$ و $x \to x_0$ أو

تطبيق : باعتبار f معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{6x-cosx}{3x+2}$

بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ فإن $\frac{6x-1}{3x+2} \le f(x) \le \frac{6x+1}{3x+2}$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

الحل : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-1 \le cosx \le 1$ وبشكل خاص على $[0;+\infty[$

منه $-1 \le -cosx \le 1$ أي $6x-1 \le 6x-cosx \le 6x+1$ بالقسمة على العدد الحقيقي

$3x+2$ الموجب تماما في المجال $[0;+\infty[$ نجد أن: $\frac{6x-1}{3x+2} \le f(x) \le \frac{6x+1}{3x+2}$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{6x+1}{3x+2} = 2$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{6x-1}{3x+2} = 2$ منه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

مبرهنة المقارنة1:

f، g دالتان و l عدد حقيقي، إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و إذا كان من أجل

x كبير بالقدرالكافي $f(x) \ge g(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

تمدد هذه المبرهنة عند حالتي $x \to -\infty$ او $x \to x_0$

تطبيق : باعتبار f معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي $f(x) = \frac{6x+x\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$

بين أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ فإن $f(x) > \frac{x^2+6x}{3x+2}$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

الحل : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $x^2+1 \ge x^2$ وبشكل خاص على $[0;+\infty[$

منه $\sqrt{x^2+1} \ge \sqrt{x^2}$ أي $\sqrt{x^2+1} \ge |x|$ أي $\sqrt{x^2+1} \ge x$ منه $x\sqrt{x^2+1} \ge x^2$

أي $6x + x\sqrt{x^2+1} \ge x^2+6x$ بالقسمة على العدد الحقيقي $3x+2$ الموجب تماما في المجال

$[0;+\infty[$ نجد أن: $f(x) \ge \frac{x^2+6x}{3x+2}$

بما أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+6x}{3x+2} = +\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

مبرهنة المقارنة2:

f، g دالتان و l عدد حقيقي:

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \le g(x)$ فإن

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

تمدد هذه المبرهنة عند حالتي $x \to -\infty$ او $x \to x_0$

تطبيق : باعتبار f معرفة على $]-\infty;0]$ كما يلي $f(x)=\frac{6x+x\sqrt{x^2+1}}{-x+2}$

بين أن من أجل كل x من $]-\infty;0]$ فإن $f(x)\leq\frac{-x^2+6x}{-x+2}$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

الحل : من أجل كل x من $]-\infty;0]$ $\sqrt{x^2+1}\geq -x$ منه $6x+x\sqrt{x^2+1}\geq -x^2+6x$

بالقسمة على العدد الحقيقي $-x+2$ الموجب تماما نجد $f(x)\leq\frac{-x^2+6x}{-x+2}$

بما أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+6x}{-x+2}=-\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

المستقيمات المقاربة و المنحنيات المقاربة

المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$

أو $\lim_{x\to-\infty}f(x)=b$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=b$ مستقيم مقارب لـ(C_f) موازي لحامل محور الفواصل بجوار $+\infty$ أو $-\infty$ على الترتيب

أمثلة :

1- باعتبار الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{2x^2+x+1}{x^2+1}$

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2+x+1}{x^2+1}\right]=2$ و $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^2+x+1}{x^2+1}\right]=2$ منه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب لـ(C_f) مواز لحامل محور الفاصل بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$

2- من أجل الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-1+(2x+5)e^{3x-1}$

$\lim_{x\to-\infty}[-1+(3x+5)e^{3x-1}]=\lim_{x\to-\infty}\left[-1+\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)(3x-1)e^{3x-1}\right]=-1$

لأن $\begin{cases} x\to-\infty \\ \frac{3x+5}{3x-1}\to 1 \\ (3x-1)e^{3x-1}\to 0 \text{ ن ش} \end{cases}$

منه المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ مستقيم مقارب لـ(C_f) مواز لحامل محور الفاصل بجوار $-\infty$

المستقيم المقارب الموازي لحامل محور التراتيب

إذا كانت $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ فإن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ مستقيم مقارب لـ(C_f) موازي لحامل محور التراتيب

ملاحظة:

إذا كانت النهاية لـ $f(x)$ عند a من اليمين غير منتهية ومن اليسار منتهية فالمستقيم المقارب الموازي لـ لحامل التراتيب هو مقارب فقط من اليمين ومن اليسار هناك نقطة تقارب وليس مستقيم والعكس في حالة العكس

أمثلة :

1- باعتبار الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2-1}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2-1}\right]=-\infty$

منه المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مستقيم مقارب لـ(C_f) مواز لحامل محور التراتيب

2- من أجل الدالة f المعرفة على $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ بـ $f(x)=2+\frac{ln(x+1)}{x-1}$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases} x\overset{>}{\to}-1\\ ln(x+1)\to-\infty\\ \frac{ln(x+1)}{x-1}\to+\infty\end{cases}$

منه المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مستقيم مقارب لـ(C_f) مواز لحامل محور التراتيب

المستقيم المقارب المائل

المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ او عند $-\infty$ يعني :

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

إذا كانت $a\neq 0$ فإن (Δ) مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f)

مبرهنة:

إذا كانت $f(x)$ من الشكل $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $a\neq 0$ وكانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

أو $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C_f)

بجوار $+\infty$ على الترتيب $-\infty$

أمثلة :

1- باعتبار الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1}$ بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1}{x-1}-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x-1}\right]=0$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{x-1}\right]=0$ منه المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$

2- من أجل الدالة f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;1[$ بـ $f(x)=-x+3+\frac{ln(-x+1)}{x+1}$

بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{ln(-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{\frac{ln(-x+1)}{-x+1}}{\frac{x+1}{-x+1}}\right] == 0$ لأن $\begin{cases} x \to -\infty \\ \frac{l(-x+1)}{-x+1} \to 0 \text{ ن ش } \\ \frac{x-1}{-x+1} \to -1 \end{cases}$

منه المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 3$ مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$

3- من أجل الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x - 1 + (2x + 5)e^{3x-1}$

بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x\to-\infty} (3x + 5)e^{3x-1} =$

$= \lim_{x\to-\infty} \left[\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)(3x - 1)e^{3x-1}\right] = 0$ لأن:

$\begin{cases} x \to -\infty \\ \frac{3x+5}{3x-1} \to 1 \\ (3x - 1)e^{3x-1} \to 0 \text{ ن ش } \end{cases}$ أي المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

4- من أجل الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x - 1 + \frac{e^x-2}{e^x+3}$

بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[-1 + \frac{e^x-2}{e^x+3}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{-5}{e^x+3}\right] = 0$

لأن: $\begin{cases} x \to +\infty \\ e^x + 3 \to 1 \end{cases}$ أي المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

المنحنى المقارب

القول أن المنحنى (C_g) منحنى الدالة g مقارب للمنحنى(C_f) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ يعني:

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ على الترتيب $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

مثال :

1- الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = ln(x) + \frac{3}{x+1}$ منحناها البياني يقترب من منحنى الدالة ln بجوار $+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - ln(x)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+1} = 0$

2- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 + \frac{4}{e^{-x}+x}$ منحناها البياني يقترب من منحنى الدالة مربع بجوار $-\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{e^{-x}+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{-x}}{\frac{e^{-x}}{-x}-1} = 0$

لأن: $\begin{cases} x \to -\infty \\ \frac{4}{-x} \to 0 \\ \frac{e^{-x}}{-x} \to +\infty \end{cases}$

طريقة البحث عن المستقيم المقارب المائل (خاص بالرياضي وتقني رياضي)

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

أو $\lim_{x\to-\infty} (x) = +\infty$ فإننا نقول أنه يُحتمل وجود مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ إذا حُسبت النهاية

بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$ إذا حُسبت النهاية بجوار $-\infty$

وللتأكد من وجود أو عدم وجود المستقيم المقارب المائل وتعيين معادلته ان وجد نتبع الخطوات التالية

نفرض أحد الحالات الأربعة السابقة ولتكن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

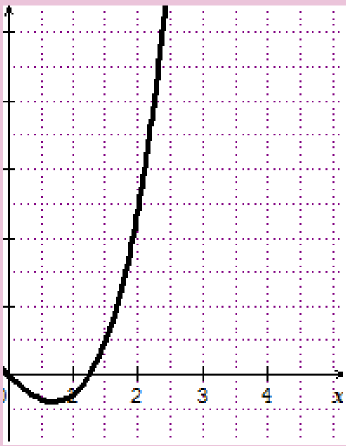
المرحلة الاولى نحسب سرعة المنحنى البياني $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

نتيجة النهاية $+\infty$ أو $-\infty$

حسب الحالة المأخوذة النتيجة لا يمكن ان تكون $-\infty$

المنحنى لا يقبل مستقيم مقارب مائل بل يقبل فرع من قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب

الشكل سيكون كما يلي

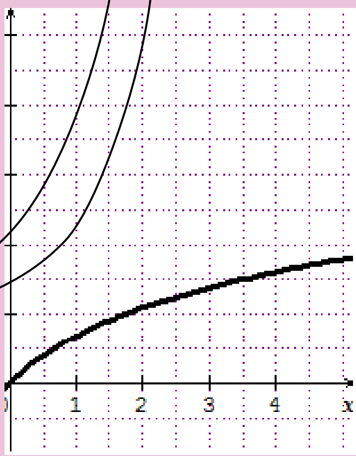


$f(x) = -2x - 1 + e^x$

نتيجة النهاية 0

المنحنى لا يقبل مستقيم مقارب مائل بل يقبل فرع من قطع مكافئ في اتجاه محور الفواصل

الشكل سيكون كما يلي



$f(x) = ln(x + 1)$

نتيجة النهاية a غير معدوم

المرحلة الثانية

نحسب : $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] =$

الحالة الاولى

نتيجة النهاية $+\infty$ أو $-\infty$

المنحنى لا يقبل مستقيم مقارب مائل ولكن يقبل فرعا من قطع مكافئ في اتجاه المستقيم الذي معادلته $y = ax$

$f(x) = x + ln(x)$

الحالة الثانية

نتيجة النهاية b

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته من الشكل

$y = ax + b$

$f(x) = x + 1 + \frac{ln(x)}{x}$

الإشارات:

ملاحظة عامة:

إشارة الجداء من جداء الإشارات

مثلا لدراسة إشارة $(x^2+x+1)(2-x)$ ندرس إشارة $2-x$ و اشارة x^2+x+1 في نفس الجدول ثم نعين جداء الإشارات كما سيأتي لاحقا

لدراسة إشارة $(-4x+2)(e^x-3)$ ندرس إشارة e^x-3 و اشارة $-4x+2$ في نفس الجدول ثم نعين جداء الإشارات

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$ln3$		$+\infty$
$-4x+2$		+	0	−	|	−	
e^x-3		−	|	−	0	+	
$(-4x+2)(e^x-3)$		−	0	+	0	−	

إشارة حاصل القسمة من حاصل قسمة الإشارات

مثلا * لدراسة إشارة $\frac{x^2+x+1}{x^2+3x+2}$ ندرس إشارة x^2+x+1 و إشارة x^2+3x+2 في نفس الجدول ثم نعين حاصل قسمة الإشارات

* لدراسة إشارة $\frac{2+lnx}{x-2}$ ندرس إشارة $2+lnx$ في مجموعة التعريف و إشارة $x-2$ في نفس الجدول ثم نعين حاصل قسمة الإشارات

x	0		e^{-2}		2		$+\infty$
$x-2$		−	|	−	0	+	
$2+lnx$		−	0	+	|	+	
$\frac{2+lnx}{x-2}$		+	0	−	||	+	

ملاحظة: إذا كان أحد طرفي الجداء موجب فالاشارة للعبارة كاملة هي نفس إشارة الطرف الآخر

وإذا كان أحد طرفي الجداء سالب فالاشارة للعبارة كاملة هي عكس إشارة الطرف الآخر

إذا كان البسط موجب أو المقام موجب فالاشارة للعبارة كاملة هي نفس إشارة المقام أو البسط على الترتيب

إذا كان البسط سالب أو المقام سالب فالاشارة للعبارة كاملة هي عكس إشارة المقام أو البسط على الترتيب

تنبيه هام **لا يمكن في المجموع ان تتوقف الاشارة على أحد طرفي المجموع إما بنفس أو بعكس الإشارة**

فمثلا في العبارة التالية $1+(-x+2)e^x$ لا يمكن القول $e^x>0$ و $1>0$ فالاشارة متوقفة على $-x+2$ هذا خطأ بل هناك طرق أخرى لتعيين الاشارة

ولكن يمكن استنتاج إشارة المجموع إذا كان طرفاه موجبين معا فهو موجب أو سالبين معا فهو سالب

فمثلا في العبارة التالية $1+(x^2+2)e^x$ هو موجب لانه مجموع وجداء لقيم موجبة

في العبارة التالية $-1+\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}$ هو سالب لانه مجموع سالبين

1-إشارة كثير حدود من الدرجة الأولى

لتعيين إشارة العبارة الجبرية $ax+b$ ، نحل المعادلة $ax+b=0$ نجد $x=-\frac{b}{a}$

وتكون الإشارة كما يلي:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a

أمثلة :

إشارة $2x-6$ هي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x-6$	-	0	+

إشارة $2-x$ هي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	+	0	-

2-إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية

حل معادلة من الدرجة الثانية و تعيين إشارة العبارة الجبرية ax^2+bx+c يعتمد على حساب المميز Δ

حيث : $\Delta=b^2-4ac$ ولدينا:

إذا كان	الحلول	التحليل	الاشارة
$\Delta<0$	المعادلة لا تقبل حلول	لا تقبل تحليل	x: $-\infty$ … $+\infty$ ؛ ax^2+bx+c: نفس إشارة a
$\Delta=0$	المعادلة تقبل حل مضاعف $x_0=-\frac{b}{2a}$	$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	x: $-\infty$ ، x_0 ، $+\infty$ ؛ ax^2+bx+c: نفس إشارة a ، 0 ، نفس إشارة a
$\Delta>0$	المعادلة تقبل حلان متمايزان هما: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	x: $-\infty$ ، x_1 ، x_2 ، $+\infty$ ؛ ax^2+bx+c: نفس إشارة a ، 0 ، عكس إشارة a ، 0 ، نفس إشارة a ؛ بفرض $x_1<x_2$

ملاحظة : إذا كان $a+b+c=0$ الحلول هي 1 و $\frac{c}{a}$

إذا كان $a+c=b$ الحلول هي -1 و $-\frac{c}{a}$

إذا كان للمعادلة حلان فإن مجموعهما $S=x_1+x_2$ هو $S=\frac{-b}{a}$

وجداؤهما $P=x_1\times x_2$ هو $P=\frac{c}{a}$

إذا كان a و c من إشارتين مختلفتين فإن المميز موجب تماما بالظرورة

3-الإشارة هندسيا انطلاقا من جدول تغيرات او تمثيل بياني مع معرفة قيم الانعدام

تمهيد : التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات $(x\,,f(x))$ حيث $x \in D_f$

منه فإن $f(x)$ هي تراتيب النقط التي تنتمي الى (C_f) أي الترتيبة موجبة تعني أن $f(x)$ موجبة والترتيبة سالبة تعني أن $f(x)$ سالبة

لذا فإن تعيين اشارة $f(x)$ حسب قيم x من D_f يرجع الى دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل

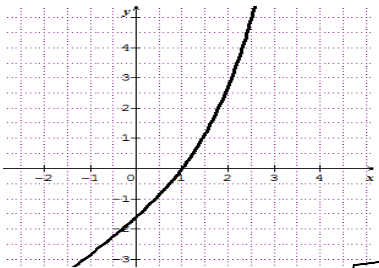
إذا كان (C_f) يقع فوق حامل محور الفواصل تماما فإن $f(x) > 0$

إذا كان (C_f) يقع تحت حامل محور الفواصل تماما فإن $f(x) < 0$

فواصل النقط التي يتقاطع فيها (C_f) مع حامل محور الفواصل هي حلول للمعادلة $f(x) = 0$

حذاري تعيين اشارة $f(x)$ لا علاقة له باتجاه التغير

فمثلا 1− الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x - 2 + e^{x-1}$ تحقق $f(1) = 0$ وتمثيلها البياني كما يلي



فجدول اشارة $f(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ هو

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2− الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = -x^2 + 1 + \frac{4x-4}{ln(x+1)}$ تحقق $f(1) = 0$ وتحقق كذلك $f(\alpha) = 0$ حيث $2.32 < \alpha < 2.33$ جدول تغيراتها في المجال $]0;+\infty[$ كما يلي

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	γ	↘	$-\infty$

حيث $\beta \approx 1.59$ و $\gamma \approx 0.95$

فجدول اشارة $f(x)$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$ هو

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3− الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$ تحقق $f(\alpha) = 0$ حيث $1.5 < \alpha < 2$ جدول تغيراتها كما يلي

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{e} - 1$	↘	-1

فجدول اشارة $f(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ هو:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

4-إشارة عبارة جبرية متعلقة بالعدد exp(p(x))

حلول معادلات ومتراجحات أسية:

.1 لحل معادلة من الشكل : $\alpha\, e^{p(x)}+\beta=0$ حيث α و β عددان حقيقيان غير معدومان لدينا :

- إذا كان $\alpha\beta\geq 0$ المعادلة لا تقبل حلول
- إذا كان $\alpha\beta<0$ لدينا $e^{p(x)}=-\frac{\beta}{\alpha}$ أي $p(x)=ln\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$

(لاحظ ان $\frac{\beta}{\alpha}$ سالب أي $-\frac{\beta}{\alpha}$ موجب)ونحل هذه المعادلة

مثال: $4e^{-4x+2}-16=0$ يعني ان $e^{-4x+2}=4$ ومنه $-4x+2=ln4$

أي $x=\frac{2-ln4}{4}$ ومنه $x=\frac{2-2ln2}{4}$ أي $x=\frac{1+ln2}{2}$

.2 لدراسة إشارة : $\alpha\, e^{p(x)}+\beta$ حيث α و β عدد حقيقي معلومان لدينا :

- إذا كان $\alpha\beta\geq 0$ إشارة العدد $\alpha\, e^{p(x)}+\beta$
  - ✓ موجبة على مجموعة تعريف p إذا كان α و β موجبان
  - ✓ سالبة على مجموعة تعريف p إذا كان α و β سالبان
- إذا كان $\alpha\beta<0$ لمعرفة إشارة العدد $\alpha\, e^{p(x)}+\beta$ يكفي معرفة

حلول المعادلة $\alpha\, e^{p(x)}+\beta=0$ والمتراجحة $\alpha\, e^{p(x)}+\beta>0$ أو $\alpha\, e^{p(x)}+\beta<0$

$\alpha\, e^{p(x)}+\beta>0$ تكافئ $e^{p(x)}>-\frac{\beta}{\alpha}$ في حالة $\alpha>0$ ......(1)

$\alpha\, e^{p(x)}+\beta>0$ تكافئ $e^{p(x)}<-\frac{\beta}{\alpha}$ في حالة $\alpha<0$ ......(2)

الحالة (1) ... $p(x)>ln\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ ونحل هذه المتراجحة و نستنتج حلول المتراجحة $\alpha\, e^{p(x)}+\beta>0$

الحالة (2)... $p(x)<ln\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ ونحل هذه المتراجحة و نستنتج حلول المتراجحة $\alpha\, e^{p(x)}+\beta>0$

حالة خاصة $p(x)=ax+b$

في حالة $\alpha\beta<0$

x	$-\infty$ $\frac{-b-ln\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}{a}$ $+\infty$
$\alpha\, e^{ax+b}+\beta$	عكس اشارة αa 0 نفس اشارة αa

في حالة $\alpha\beta>0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$\alpha\, e^{ax+b}+\beta$	نفس اشارة α

مثال: لدراسة إشارة $e^{-2x+3}-3$ لدينا $e^{-2x+3}-3=0$ يعني $e^{-2x+3}=3$

ومنه $-2x+3=ln3$ أي $x=\frac{3-ln3}{2}$

ولدينا $e^{-2x+3}-3>0$ يعني $e^{-2x+3}>3$ ومنه $-2x+3>ln3$ أي $x<\frac{3-ln3}{2}$

ومنه إشارة $e^{-2x+3}-3$ كما يلي :

x	$-\infty$	$\frac{3-ln3}{2}$	$+\infty$
$e^{-2x+3}-3$	+	0	-

3. لحل المعادلة: $ae^{2p(x)}+be^{p(x)}+c=0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية و $a\neq 0$ و $b\neq 0$

نضع $e^{p(x)}=t$ فتصبح $ae^{2p(x)}+be^{p(x)}+c=0$

من الشكل $at^2+bt+c=0$ (نحلها باستعمال المميز)

* إذا كان المميز سالب المعادلة لا تقبل حلول

* إذا كان المميز معدوم المعادلة تقبل حلا مضاعفا t_0 أي $e^{p(x)}=t_0$ لحلها نتبع ما قلناه في الحالة 1

(تقبل حلول في حالة t_0 موجب تماما ولا تقبل حلول في حالة t_0 سالب او معدوم)

* إذا كان المميز موجب المعادلة تقبل حلان متمايزان t_1 و t_2

أي $e^{p(x)}=t_1$ (تقبل حلول في حالة t_1 موجب تماما ولا تقبل حلول حلول في حالة t_1 سالب او معدوم)

و $e^{p(x)}=t_2$ (تقبل حلول في حالة t_2 موجب تماما ولا تقبل حلول حلول في حالة t_2 سالب او معدوم)

مثال : لحل $e^{-2x}-2e^{-x}-3=0$

نضع $e^{-x}=t$ فتصبح $t^2-2t-3=0$ ولدينا $\Delta=16$ أي $\begin{cases} t_1=3 \\ t_2=-1 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} e^{-x}=3 \\ e^{-x}=-1 \text{(لاتقبل حلول)} \end{cases}$ و $e^{-x}=3$ يعني ان $-x=\ln 3$ أي $x=-\ln 3$

4. لدراسة إشارة $ae^{2p(x)}+be^{p(x)}+c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية و $a\neq 0$ و $b\neq 0$

نضع $e^{p(x)}=t$ فتصبح $ae^{2p(x)}+be^{p(x)}+c$ من الشكل at^2+bt+c (نستعمل المميز)

* إذا كان المميز سالب إشارة $e^{2p(x)}+be^{p(x)}+c$ من إشارة a

* إذا كان المميز معدوم المعادلة تقبل حلا مضاعفا t_0 ومنه $at^2+bt+c=a(t-t_0)^2$

أي $ae^{2p(x)}+be^{p(x)}+c=a\left(e^{p(x)}-t_0\right)^2$ إذا كان t_0 موجب الإنعدام نجده بحل

المعادلة $e^{p(x)}=t_0$ والإشارة من إشارة a ، وإذا كان t_0 سالب لا يوجد انعدام والإشارة من إشارة a على طول مجال تعريف $p(x)$

* إذا كان المميز موجب المعادلة تقبل حلان t_1 و t_2 ومنه $at^2+bt+c=a(t-t_1)(t-t_2)$

أي $ae^{2p(x)}+be^{p(x)}+c=a\left(e^{p(x)}-t_1\right)\left(e^{p(x)}-t_2\right)$ ، وندرس إشارة $\left(e^{p(x)}-t_1\right)$ و $\left(e^{p(x)}-t_2\right)$ بالطريقة المذكورة في 2 ثم نشكل جدول الإشارة للجداء $a\left(e^{p(x)}-t_1\right)\left(e^{p(x)}-t_2\right)$

مثال: لدراسة إشارة $e^{-2x}-2e^{-x}-3$ نضع $e^{-x}=t$ فتصبح $t^2-2t-3=0$ ولدينا $\begin{cases} t_1=3 \\ t_2=-1 \end{cases}$

ومنه $e^{-2x}-2e^{-x}-3=1(e^{-x}-3)(e^{-x}+1)$ ولدينا إشارة $e^{-x}+1$ موجبة على $\mathbb{R}$ لانها مجموع موجبين

و $e^{-x} = 3$ يعني ان $-x = ln3$ أي $x = -ln3$ و $e^{-x} > 3$ يعني ان $-x > ln3$ أي $x < -ln3$

إذن جدول الإشارة كما يلي :

x	$-\infty$	$-ln3$	$+\infty$
$e^{-x}+1$	+		+
$e^{-x}-3$	+	0	−
$e^{-2x}-2e^{-x}-3$	+	0	−

5-إشارة عبارة جبرية متعلقة بالعدد ln(p(x))

حلول معادلات ومتراجحات لوغارتمية:

1. لحل معادلة من الشكل: $\alpha ln[p(x)] + \beta = 0$ حيث α و β عددان حقيقيان $\alpha \neq 0$

- نعين أولا D مجموعة قيم x التي تجعل $p(x)$ موجب تماما
- وفي D لدينا $\alpha ln[p(x)] + \beta = 0$ تكافئ $ln[p(x)] = -\frac{\beta}{\alpha}$ أي $p(x) = e^{-\frac{\beta}{\alpha}}$

ونحل هذه المعادلة ونختار الحلول التي تنتمي الى D

مثال: لحل المعادلة $ln(-4x+2) - 3 = 0$ لدينا $D = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$

ولدينا $ln(-4x+2) - 3 = 0$ يعني ان $ln(-4x+2) = 3$ ومنه $-4x+2 = e^3$ أي $x =$

$\frac{2-e^3}{4} \in D$ فهو حل للمعادلة

2. لدراسة إشارة $\alpha ln[p(x)] + \beta$: حيث α و β عددان حقيقيان $\alpha \neq 0$

نعين أولا D مجموعة قيم x التي تجعل $p(x)$ موجب تماما

ثم نعين حلول المعادلة $\alpha ln[p(x)] + \beta = 0$ و المتراجحة $\alpha ln[p(x)] + \beta > 0$

أو $\alpha ln[p(x)] + \beta < 0$

$\alpha ln[p(x)] + \beta > 0$ أي $p(x) > e^{-\frac{\beta}{\alpha}}$

ونحل هذه المتراجحة ثم نستنتج حلول المتراجحة $\alpha ln[p(x)] + \beta > 0$

بمعرفة حلول المعادلة والمتراجحة يمكن تشكيل جدول اشارة للعبارة $\alpha ln[p(x)] + \beta$

مثال: لدراسة إشارة $ln(-2x+3) - 3$ لدينا $D = \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$

لدينا $ln(-2x+3) - 3 = 0$ يعني $ln(-2x+3) = 3$ ومنه $-2x+3 = e^3$ أي $x = \frac{3-e^3}{2}$

ولدينا $ln(-2x+3) - 3 > 0$ يعني $ln(-2x+3) > 3$ ومنه $-2x+3 > e^3$ أي $x < \frac{3-e^3}{2}$

ومنه إشارة $ln(-2x+3) - 3$

كما يلي :

x	$-\infty$	$\frac{3-e^3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$e^{-2x+3}-3$	+	0	−

3. لحل معادلة من الشكل : $a[ln(p(x))]^2 + bln(p(x)) + c = 0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$ و $b \neq 0$

- نعين أولا D مجموعة قيم x التي تجعل $p(x)$ موجب تماما
- ثم نضع $ln(p(x)) = t$ فتصبح $a[ln(p(x))]^2 + bln(p(x)) + c = 0$ من الشكل $at^2 + bt + c = 0$ (نحلها باستعمال المميز)

إذا كان المميز سالب المعادلة لا تقبل حلول

إذا كان المميز معدوم المعادلة تقبل حلا مضاعفا t_0 أي $ln(p(x)) = t_0$ (نحلها بالطريقة السابقة)

إذا كان المميز موجب المعادلة تقبل حلان متمايزان t_1 و t_2

أي $ln(p(x)) = t_1$ (نحلها بالطريقة السابقة) و $ln(p(x)) = t_2$ (نحلها بالطريقة السابقة)

مثال : $[ln(3x+3)]^2 - 2ln(3x+3) - 3 = 0$ لدينا $D =]-1\,;+\infty[$

نضع $ln(3x+3) = t$ فتصبح $t^2 - 2t - 3 = 0$ ولدينا $\Delta = 16$ أي $\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} ln(3x+3) = 3 \\ ln(3x+3) = -1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 3x+3 = e^3 \\ 3x+3 = e^{-1} \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = \frac{e^3-3}{3} \in D \\ x = \frac{e^{-1}-3}{3} \in D \end{cases}$

4. لدراسة إشارة $a[ln(p(x))]^2 + bln(p(x)) + c$ حيث a، b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$ و $b \neq 0$

- نعين أولا D مجموعة قيم x التي تجعل $p(x)$ موجب تماما

نضع $lnp(x) = t$ فتصبح $a[ln(p(x))]^2 + bln(p(x)) + c$ من الشكل $at^2 + bt + c$ (نحلها بالمميز)

إذا كان المميز سالب إشارة $a[ln(p(x))]^2 + bln(p(x)) + c$ من إشارة a

إذا كان المميز معدوم المعادلة تقبل حلا مضاعفا t_0 ومنه $at^2 + bt + c = a(t - t_0)^2$

أي $a[ln(p(x))]^2 + bln(p(x)) + c = a(ln(p(x)) - t_0)^2$ الانعدام نجده بحل المعادلة $ln(p(x)) = t_0$ والإشارة من إشارة a

إذا كان المميز موجب المعادلة تقبل حلان t_1 و t_2 ومنه $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$

أي $a[ln(p(x))]^2 + bln(p(x)) + c = a[ln(p(x)) - t_1][ln(p(x)) - t_2]$

وندرس إشارة $(ln(p(x)) - t_1)$ و $(ln(p(x)) - t_2)$ بالطريقة المذكورة سابقا ثم نشكل جدول الإشارة للجداء $a[ln(p(x)) - t_1][ln(p(x)) - t_2]$

مثال: إشارة $[ln(3x+3)]^2 - 2ln(3x+3) - 3$ ، $D =]-1\,;+\infty[$

نضع $ln(3x+3)=t$ فتصبح $t^2-2t-3=0$ ولدينا $\begin{cases} t_1=3 \\ t_2=-1 \end{cases}$

ومنه $[ln(3x+3)]^2-2ln(3x+3)-3=1(ln(3x+3)-3)(ln(3x+3)+1)$

ولدينا $\begin{cases} ln(3x+3)=3 \\ ln(3x+3)=-1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 3x+3=e^3 \\ 3x+3=e^{-1} \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=\frac{e^3-3}{3} \in D \\ x=\frac{e^{-1}-3}{3} \in D \end{cases}$

و $\begin{cases} ln(3x+3)>3 \\ ln(3x+3)>-1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 3x+3>e^3 \\ 3x+3>e^{-1} \end{cases}$ أي $\begin{cases} x>\frac{e^3-3}{3} \\ x>\frac{e^{-1}-3}{3} \end{cases}$

و $e^{-x}=3$ يعني ان $-x=ln3$ أي $x=-ln3$ و $e^{-x}>3$ يعني ان $-x>ln3$ أي $x<-ln3$

x	-1		$\frac{e^{-1}-3}{3}$		$\frac{e^3-3}{3}$		$+\infty$
$ln(3x+3)-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$ln(3x+3)+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$[ln(3x+3)]^2-2ln(3x+3)-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الاستمرارية

f دالة مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f.القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة عند a هي $f(a)$.(f مستمرة عند a) يكافئ $(\lim_{x\to a} f(x) = f(a))$

نتائج: • الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

• الدوال كثيرات الحدود، sin و cos مستمرة على $\mathbb{R}$.

• الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

مثال: الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $\begin{cases} f(x) = xln|x| + 1 \dots x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ مستمرة عند الصفر لان:

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}[xln|x| + 1] = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}[xln(x) + 1] = 1$ لان $\begin{cases} x \overset{>}{\to} 0 \\ xln(x) \to 0 \text{ ن ش} \end{cases}$

و $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0}[xln|x| + 1] = \lim_{x \overset{<}{\to} 0}[-(-x)ln(-x) + 1] = 1$ $\begin{cases} x \overset{<}{\to} 0 \\ -xln(-x) \to 0 \text{ ن ش} \end{cases}$

ومنه $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة1: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a; b]$.من أجل كل عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(x) = k$.

مبرهنة2: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a; b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a; b[$.

أمثلة :

1- نأخذ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 + x + 1$

المعادلة $f(x) = 2$ تقبلا حلا وحيدا في المجال $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ لان الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ كونها دالة كثير حدود وبشكل خاص على $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 + 1$

ومنه على $\mathbb{R}$: $f'(x) > 0$ أي f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وبشكل خاص على $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

و $f(1) = 3$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{8}$ ومنه $f\left(\frac{1}{2}\right) < 2 < f(1)$

إذا المعادلة $f(x) = 2$ تقبل في المجال $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$ حلا وحيد

2- نأخذ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -2x + 2 - e^x$

المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا في المجال$]0,3;\ 0,4[$ لان الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ كونها مجموع دوال مستمرة وبشكل خاص على $[0.3;\ 0.4]$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-2-e^{x}$

ومنه على $\mathbb{R}$: $f'(x)<0$ أي f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ وبشكل خاص على $[0.3;\ 0.4]$

و $f(0.4)=-0.2$ و $f(0.3)=0.04$ ومنه $f(0.4)<0<f(0.3)$،

إذا المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0.3;\ 0.4[$ حلا وحيدا

الاشتقاقية

الاشتقاقية : العدد المشتق- الدالة المشتقة

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h\neq 0$.

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a إذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0.

تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $f'(x)$

إذن $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وذلك بوضع $x=a+h$

ملاحظة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و تسمى الدالة $f':x\to f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f

مثال نأخذ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 لان $\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+1)}\right]=0$$

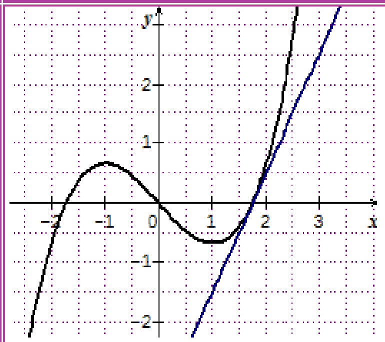
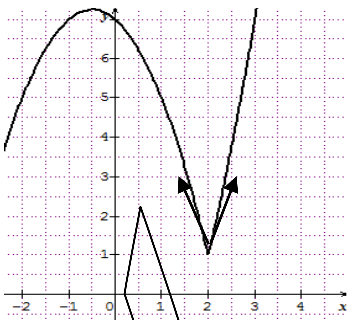
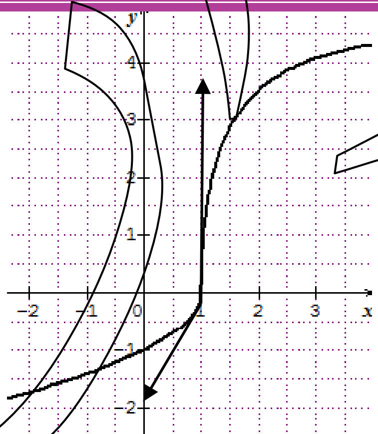
إذا f قابلة للاشتقاق عند 0 لان نهاية النسبة موجودة ومحدودة ومنه $f'(0)=0$

تعريف و خاصية:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0,f(x_0))$ مماسا (Δ) معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ملاحظات:

الحالة والتفسير الجبري	التمثيل الموافق لذلك	التفسير الهندسي
1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$ الدالة قابلة للاشتقاق عند a		للمنحنى (C_f) مماسا عند النقطة $A(a\,,f(a))$ معامل توجيهه $f'(a)$ ومعادلته: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$
2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$ و $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l'$ و $l\neq l'$ الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a		المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماس عند النقطة $A(a\,,f(a))$ من اليمين معامل توجيهه l ومعرف بالجملةالديكارتية $\begin{cases}y=l(x-a)+f(a)\\ x\geq a\end{cases}$ ومن اليسار معامل توجيهه $\acute{l}$ ومعرف بالجملة الديكارتية $\begin{cases}y=\acute{l}(x-a)+f(a)\\ x\leq a\end{cases}$ النقطة $A(a\,,f(a))$ تسمى **نقطة زاوية**
3) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$ و $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ أو $-\infty$ أو العكس الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a		المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماس عند النقطة $A(a\,,f(a))$ من اليمين معامل توجيهه l ومعرف بالجملة الديكارتية $\begin{cases}y=l(x-a)+f(a)\\ x\geq a\end{cases}$ ومن اليسار موازي لحامل محور التراتيب معرف بالجملة الديكارتية: $\begin{cases}x=a\\ y\leq f(a)\end{cases}$ النقطة A تسمى **نقطة** **إرجاع** هذا في حالة النهاية $+\infty$ أما في حالة النهاية $-\infty$ فنصف المماس الموازي لحامل محورالتراتيب معرف بالجملة $\begin{cases}x=a\\ y\geq f(a)\end{cases}$

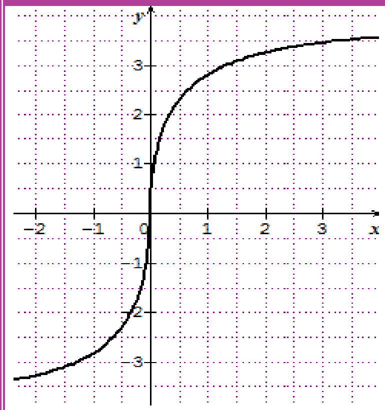
4)

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$$

و

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a



المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماس عند النقطة $A(a, f(a))$ من اليمين موازي لحامل محور التراتيب معرف بالجملة الديكارتية: $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$

ومن اليسار موازي لحامل محور التراتيب معرف بالجملة الديكارتية: $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$

النقطة $A(a, f(a))$ تسمى **نقطة إنعطاف**

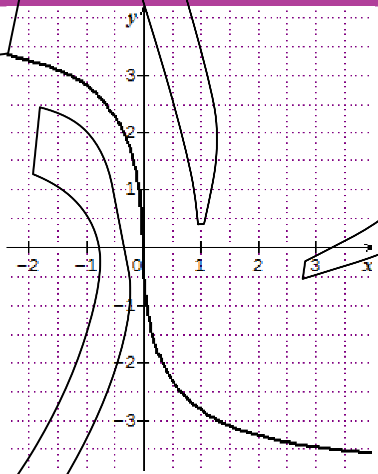
5)

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$

و

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a



المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماس عند النقطة $A(a, f(a))$ من اليمين موازي لحامل محور التراتيب معرف بالجملة الديكارتية: $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$

ومن اليسار موازي لحامل محور التراتيب معرف بالجملة الديكارتية: $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$

النقطة $A(a, f(a))$ تسمى **نقطة إنعطاف**

6)

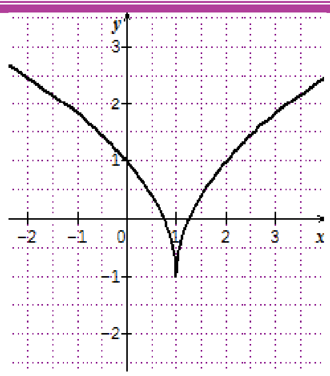
$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$$

و

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$

أو العكس

الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a



المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماس عند النقطة $A(a, f(a))$ من اليمين ومن اليسار موازي لحامل محور التراتيب معرف بنفس بالجملة الديكارتية: $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$

النقطة $A(a, f(a))$ تسمى **نقطة إرجاع**

بعض الصيغ للأسئلة التي يطلب فيها معادلة المماس

1- إعطاء فاصلة نقطة التماس تصريحا أو تلميحا

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$...

مثال

نأخذ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 + x + 1$

- ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

لدينا معادلة المماس في هذه الحالة $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

و $\begin{cases} f'(x) = 2x+1 \\ f'(0) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ منه المعادلة هي $y = x + 1$ هنا أعطيت الفاصلة تصريحا

نأخذ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{x-1} + 2x$

- ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة $A(1\,,3)$...لدينا معادلة المماس في هذه الحالة

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

و $\begin{cases} f'(x) = e^{x-1} + 2 \\ f'(1) = 3 \\ f(1) = 3 \end{cases}$ منه المعادلة $y = 3x$ هنا أعطيت الفاصلة تصريحا والاضافة الى الترتيبة

نأخذ الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x) = ln(x+1) + 2$

- ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ (C_f) في نقطة تقاطعة مع حامل محور التراتيب أي $x_0 = 0$

[معلوم أن نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب هي النقطة من (C_f) التي فاصلتها معدومة]

لدينا معادلة المماس في هذه الحالة $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

و $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x+1} \\ f'(0) = 1 \\ f(0) = 2 \end{cases}$ منه المعادلة $y = x + 2$ هنا أعطيت الفاصلة تلميحا

نأخذ الدالتين f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 + x - ln(x^2+1)$

و g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = x^2 + x$

- ويقول السؤال أكتب معادلة للمماس (T) الذي يمس كل من (C_f) و (C_g) في نقطة تقاطعهما

نعين أولا فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (C_g) وذلك بحل المعادلة $f(x) = g(x)$

أي $x^2 - ln(x^2+1) = x^2$ نجد $ln(x^2+1) = 0$ أي $x^2 + 1 = e^0$ منه $x = 0$

لدينا معادلة المماس في هذه الحالة $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

لدينا $\acute{g}(x) = 2x+1$ منه $\acute{g}(0) = \acute{f}(0) = 1$ و $g(0) = f(0) = \mathbf{0}$ منه المعادلة $y = x$

هنا أعطيت الفاصلة تلميحا

2- إعطاء ترتيبة نقطة التماس تصريحا أو تلميحا

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$....

مثال

نأخذ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+1}$

- ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الترتيبة 1.

نبحث أولا على فاصلة نقطة التماس وذلك بحل المعادلة $f(x) = 1$ أي $\frac{x^2+x+2}{x^2+1} = 1$ منه $x = -1$

- لدينا معادلة المماس في هذه الحالة $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$.

و نكمل كتابة المعادلة كما في الحالة 1 هنا أعطيت الترتيبة تصريحا

نأخذ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{x-2} - 1$

- ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ (C_f) أكتب معادلة المماس لـ (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل أي $f(x) = 0$ [معلوم أن نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل هي النقطة من (C_f) التي ترتيبتها معدومة]

نحل أولا المعادلة $f(x) = 0$ أي $e^{x-2} - 1 = 0$ منه $e^{x-2} = 1$ أي $x - 2 = 0$ منه $x = 2$

- لدينا معادلة المماس في هذه الحالة $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

و نكمل كتابة المعادلة كما في الحالة 1 هنا أعطيت الترتيبة تلميحا

3- إعطاء معامل توجيه المماس تصريحا أو تلميحا

$y = f'(a)(x-a) + f(a).$

الحالة 1 يعطى معامل التوجيه مباشرة ولا تُربط المسألة بمستقيم سواء بوجود مماس او أكثر

نأخذ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^x - 2x + 1$

- ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ (C_f) الذي معامل توجيهه 1. أي $f'(a) = 1$

لذا نحل المعادلة $f'(x) = 1$ أي $e^x - 2 = 1$ أي $x = ln3$

لدينا معادلة المماس في هذه الحالة $y = f'(ln3)(x - ln3) + f(ln3)$

و نكمل كتابة المعادلة كما في الحالة 1 هنا أعطي معامل التوجيه تصريحا

نأخذ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$ بـ $f(x)=ln|x^2-3|$

- ويقول السؤال بين أن لـ (C_f) مماسان معامل توجيه كل منها -1 أكتب معادلة كل منهما
- أي $f'(a)=-1$ لذا نحل المعادلة $f'(x)=-1$ أي $\frac{2x}{x^2-3}=-1$ أي $x^2+2x-3=0$

منه للمعادلة حلان هما $x_1=1$ و $x_2=-3$

لدينا معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

و معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة -3 هي $y=f'(-3)(x+3)+f(-3)$

و نكمل كتابة المعادلة كما في الحالة 1 هنا أعطي معامل التوجيه تصريحا

الحالة2 تُربط المسألة بمستقيم معامل توجيهه معلوم ويكون المماس موازيا له سواء بوجود مماس او أكثر

نأخذ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{x}{2}+(e^{-x}-1)^2$

ويقول السؤال بين أن لـ (C_f) مماسا وحيدا يوازي (Δ) (التي كانت معادلته معطاة سلفا $(\Delta):y=\frac{1}{2}x$)

لذا نحل المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$ لان المماس معامل توجيهه $f'(a)$ والمستقيم معامل توجيهه $\frac{1}{2}$

وإذا كان لمستقيمان نفس معامل التوجيه فهما متوازيان

$f'(x)=\frac{1}{2}$ أي $\frac{1}{2}-2e^{-x}(e^{-x}-1)=\frac{1}{2}$ أي $2e^{-x}(e^{-x}-1)=0$ منه $(e^{-x}-1)=0$

منه $x=0$ لدينا معادلة المماس في هذه الحالة $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

و نكمل كتابة المعادلة كما في الحالة 1 هنا أعطي معامل التوجيه تلميحا

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x+\frac{ln|x|}{x}$

ويقول السؤال بين أنه يوجد مماسان لـ (C_f) يوازيان (Δ) (التي كانت معادلته معطاة سلفا $(\Delta):y=x$)

لذا نحل المعادلة $f'(x)=1$ لان المماس معامل توجيهه $f'(a)$ والمستقيم معامل توجيهه 1

وإذا كان لمستقيمان نفس معامل التوجيه فهما متوازيان

$f'(x)=1$ أي $1+\frac{1-ln|x|}{x^2}=1$ أي $\frac{1-ln|x|}{x^2}=0$ منه في مجموعة التعريف $1-ln|x|=0$

منه $|x|=e$ أي $\begin{cases}x=e\\x=-e\end{cases}$ لدينا معادلتا المماسين هما $\begin{cases}y=f'(e)(x-e)+f(e)\\y=f'(-e)(x+e)+f(-e)\end{cases}$

و نكمل كتابة المعادلتين كما في الحالة 1 هنا أعطي معامل التوجيه تلميحا

يمكن أن يطلب تعيين المماس الذي يعامد مستقيم معلوم مثلا $y=\alpha x+\beta$

والاجابة تكون بتعيين فاصلة نقطة التماس بحل المعادلة $\boldsymbol{f'(x)\times\alpha=-1}$

الحالة 3 تُربط المسألة بمستقيم معامل توجيهه معلوم ومتعلق بوسيط ويكون المماس موازيا له

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x-1)(1-e^{-x})$

ويقول السؤال ليكن (T_m) حزمة مستقيمات معرفة بالمعادلته $(T_m) : y = x + m$ حيث m وسيط حقيقي

عين قيمة m حتى يكون (T_m) مماسا لـ (C_f) في نقطة يطلب تعيين فاصلتها

نلاحظ أن حزمة المستقيمات (T_m) لها نفس معامل التوجيه 1

لذا نحل المعادلة $f'(x) = 1$ لان المماس معامل توجيهه $f'(a)$ والمستقيم (T_m) معامل توجيهه 1

$f'(x) = 1$ أي $1 - e^{-x} + e^{-x}(x-1) = 1$ أي $e^{-x}(x-2) = 0$ منه $x = 2$

لدينا معادلة المماس في هذه الحالة $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ نجد $y = x - 2 + 1 - e^{-2}$

منه $y = x - 1 - e^{-2}$ ومنه $m = -1 - e^{-2}$ و فاصلة نقطة التماس هي 2

m

4- إعطاء نقطة من المماس ليست بالظرورة نقطة التماس

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = 1 - \frac{2ln|x|}{x}$

ويقول السؤال بين أنه يوجد مماس لـ(C_f) يشمل النقطة $A(\mathbf{0}\,;\,\mathbf{1})$ ويمس (C_f) في نقطتين يطلب تعيينهما

لاحظ أن النقطة A ليست من (C_f) هي فقط من المستقيم المماس وإذا كانت نقطة من مستقيم فإن احداثياها تحقق معادلته الديكارتية

منه $1 = f'(a)(0-a) + f(a)$ حيث a فاصلة نقطة التماس ، لدينا $f'(x) = -\frac{2-2ln|x|}{x}$

منه $1 = -\frac{2-2ln|a|}{a^2}(0-a) + 1 - \frac{2ln|a|}{a}$ ومنه $0 = \frac{2-2ln|a|}{a} - \frac{2ln|a|}{a}$ أي $0 = \frac{2-4ln|a|}{a}$

ومنه $\begin{cases} 2 - 4ln|a| = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} ln|a| = \frac{1}{2} \\ a \neq 0 \end{cases}$

لدينا $ln|a| = \frac{1}{2}$ يعني $|a| = \sqrt{e}$ أي $a = \sqrt{e}$ أو $a = -\sqrt{e}$

منه معادلة المماس الذي يشمل النقطة $A(\mathbf{0}\,;\,\mathbf{1})$ هي $y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$

الاشتقاقية و الاستمرارية

خاصية: إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال

اتجاه تغير دالة:

مبرهنة (دون برهان): f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) > 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تتعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) < 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تتعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماما على I.

*إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

اشتقاق دالة مركبة مبرهنة (دون برهان):

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I

و لدينا من أجل كل x من I: $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'[u(x)]$

مثال : $f(x) = \frac{lnx}{x} + 2$ و أي $f'(x) = \frac{1-lnx}{x^2}$

مشتقة الدالة g حيث $g(x) = f(e^{-x})$

هي $g'(x) = -e^{-x}f'(e^{-x})$ أي $g'(x) = -e^{-x}\frac{1-ln(e^{-x})}{(e^{-x})^2}$ أي $g'(x) = -\frac{1+x}{e^{-x}}$

عمليات على المشتقات

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على I من $\mathbb{R}$ و g لا تنعدم من اجل كل x من I لدينا

الدالة		المشتقة
(nعدد طبيعي،aعدد حقيقي) $x \to ax^n$	$\Longrightarrow$	$x \to nax^{n-1}$
$f+g$	$\Longrightarrow$	$f'+g'$
$f \times g$	$\Longrightarrow$	$f'g+g'f$
$\frac{f}{g}$	$\Longrightarrow$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$
$\frac{1}{f}$	$\Longrightarrow$	$\frac{-f'}{f^2}$
$\frac{a}{x+b}$	$\Longrightarrow$	$\frac{-a}{(x+b)^2}$
$\frac{a}{bx+c}$	$\Longrightarrow$	$\frac{-ab}{(bx+c)^2}$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\Longrightarrow$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
f^n	$\Longrightarrow$	$nf'f^{n-1}$
(fموجبة على I) $x \to \sqrt{f(x)}$	$\Longrightarrow$	$x \to \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$x \to cosx$	$\Longrightarrow$	$x \to -sinx$
$x \to sinx$	$\Longrightarrow$	$x \to cosx$
$x \to cos(f(x))$	$\Longrightarrow$	$x \to -f'(x)sin(f(x))$
$x \to sin(f(x))$	$\Longrightarrow$	$x \to f'(x)cos(f(x))$
(fموجبة تماماعلى I) $x \to ln(f(x))$	$\Longrightarrow$	$\frac{f'}{f}$
(fغير معدومة على I) $x \to ln\lvert f(x)\rvert$	$\Longrightarrow$	$\frac{f'}{f}$
$x \to e^{f(x)}$	$\Longrightarrow$	$x \to f'(x)e^{f(x)}$

أمثلة :

-1 الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x^2+1}$ دالتها المشتقة معرفة على $\mathbb{R}$
بـ $f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-(2x)(x^2+x+2)}{(x^2+1)^2}$ منه $f'(x)=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

-2 الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x-x+1$ دالتها المشتقة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f'(x)=e^x-1$

-3 الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=sin(x^2+x+2)$ دالتها المشتقة معرفة على $\mathbb{R}$
بـ $f'(x)=(2x+1)sin(x^2+x+2)$

4- الدالة f المعرفة على $D =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ بـ $f(x) = ln(x^2+x) + \frac{2x}{x+1}$ دالتها

المشتقة معرفة على D بـ $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}$ ومنه $f'(x) = \frac{x^2+5x+1}{(x^2+x)(x+1)}$

الوضع النسبي لمنحنيين بيانيين :

طريقة: لدراسة وضعية المنحنى (C_f) و المنحنى (C_g) ندرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$

ولدينا : – القيم x التي تحقق المتراجحة $f(x)-g(x) > 0$ هي فواصل النقط بحيث : (C_f) فوق (C_g)

– القيم x التي تحقق المتراجحة $f(x)-g(x) < 0$ هي فواصل النقط بحيث: (C_f) تحت (C_g)

– القيم x التي تحقق المعادلة $f(x)-g(x) = 0$ هي فواصل النقط بحيث: (C_f) يتقاطع مع (C_g)

مثال

الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = lnx + \frac{3x-3}{x^2+1}$ و (C_f) منحناها البياني و (C) المنحنى

الممثل للدالة اللوغارتمية وضعية (C_f) بالنسبة الى (C) متعلقة بدراسة اشارة الفرق $f(x) - lnx$ ولدينا

$$f(x) - lnx = \frac{3x-3}{x^2+1}$$

x	0		1		$+\infty$
x^2+1		+		+	
$3x-3$		−	0	+	
$f(x) - lnx$		−	0	+	
وضعية (C_f) بالنسبة الى (C)		(C_f) يقع تحت (C)	تقاطع (C_f) و (C)	(C_f) يقع فوق (C)	

حالة خاصة

الوضع النسبي لمنحني بياني ومستقيم :

لدراسة وضعية (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = ax+b$ ندرس إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$

ولدينا: – القيم x التي تجعل $f(x)-(ax+b) > 0$ هي فواصل النقط بحيث : (C_f) فوق (Δ)

– القيم x التي تجعل $f(x)-(ax+b) < 0$ هي فواصل النقط بحيث : (C_f) تحت (Δ)

– القيم x التي تجعل $f(x)-(ax+b) = 0$ هي فواصل النقط بحيث : (C_f) يتقاطع مع (Δ)

مثال: الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = x - 1 + \frac{lnx}{x+1}$ و (C_f) منحناها البياني و (Δ) المستقيم

ذو المعادلة $y = x-1$ وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) متعلقة بدراسة اشارة الفرق $f(x)-(x-1)$

ولدينا

$$f(x) - (x-1) = \frac{lnx}{x+1}$$

x	0		1		$+\infty$
$x+1$		+		+	
lnx		−	0	+	
$f(x)-(x-1)$		−	0	+	
وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)	تقاطع (C_f) و (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

نقط خاصة - محور التناظر

شفعية دالة

f دالة زوجية على I من $\mathbb{R}$. يعني أن : من أجل كل $x \in I$ فإن $-x \in I$ و $f(-x) = f(x)$

f دالة فردية على I من $\mathbb{R}$ يعني أن : من أجل كل $x \in I$ فإن $-x \in I$ و $f(-x) = -f(x)$

دراسة شفعية دالة يعني دراسة إن كانت زوجية أم فردية..

هندسيا

- إذا كانت f دالة زوجية فمنحناها البياني (C_f) متناظر بالنسبة الى حامل محور التراتيب
- إذا كانت f دالة فردية فمنحناها البياني (C_f) متناظر بالنسبة الى مبدأ الاحداثيات

أمثلة :

1- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$ دالة زوجية لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(-x) = \frac{3(-x)^2+2}{(-x)^2+1}$ أي $f(-x) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$ ومنه $f(-x) = f(x)$

2- الدالة f المعرفة على $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ $D_f =$ $f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

دالة فردية لأنه من أجل كل x من D_f فإن $-x$ من D_f

ولدينا: $f(-x) = -x + \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$ أي $f(-x) = -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ لان $\frac{-x+1}{-x-1} = \frac{-(x-1)}{-(x+1)}$

ومنه $f(-x) = -x + \ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\right)$ ومنه $f(-x) = -x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ومنه $f(-x) = -f(x)$

3- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ دالة فردية لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$ أي $f(-x) = \frac{e^x(e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}$ ومنه $f(-x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$

إذن $f(-x) = \frac{-(e^x-1)}{1+e^x}$ أي $f(-x) = -f(x)$

مركز التناظر

f دالة معرفة على I من $\mathbb{R}$، (C_f) تمثيلها البياني

$A(a\,,b)$ مركز تناظر لـ(C_f) يعني أن من أجل كل x من I فإن $2a - x$ من I

و $f(2a-x) + f(x) = 2b$

أو من أجل كل x من I فإن $a - x$ من I و $a + x$ من I و $f(a-x) + f(a+x) = 2b$

بصفة عامة : من أجل كل x من I فإن $(2-k)a - x$ من I و $ka + x$ من I

و $f((2-k)a - x) + f(ka + x) = 2b$

أمثلة :

1− لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $f(x)=x+1+\frac{3}{x-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني

النقطة $\Omega(1;2)$ مركز تناظر لـ (C_f) لان لما $x\neq 1$ فإن $2-x\neq 1$

ولدينا: $f(2-x)+f(x)=(2-x)+1+\frac{3}{(2-x)-1}+x+1+\frac{3}{x-1}$

$=\cancel{-x}+3+\cancel{\frac{3}{-x+1}}+\cancel{x}+1+\cancel{\frac{3}{x-1}}=4$ ومنه $\Omega(1,2)$ مركز تناظر لـ (C_f)

2− لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني

النقطة $\Omega(0\,;1)$ مركز تناظر لـ (C_f) لان من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(-x)+f(x)=(\cancel{-x})+\frac{2}{e^{-x}+1}+\cancel{x}+\frac{2}{e^x+1}$ أي $f(-x)+f(x)=\frac{2}{e^{-x}+1}+\frac{2}{e^x+1}$

منه $f(-x)+f(x)=\frac{2e^x}{e^x(e^{-x}+1)}+\frac{2}{e^x+1}$ أي $f(-x)+f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}+\frac{2}{e^x+1}=\frac{2e^x+2}{e^x+1}=2$

محور التناظر

f دالة معرفة على I من $\mathbb{R}$ ، (C_f) تمثيلها البياني

المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر لـ (C_f) يعني أن

من أجل كل x من I فإن $2a-x$ من I و $f(2a-x)-f(x)=0$

أو من أجل كل x من I فإن $a-x$ من I و $a+x$ من I و $f(a-x)-f(a+x)=0$

بصفة عامة من أجل كل x من I فإن $(2-k)a-x$ من I و $ka+x$ من I و

$f((2-k)a-x)-f(ka+x)=0$

أمثلة :

1− لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*-\{2\}$ بـ $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x^2-2x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني

المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ (C_f) لأن لما $x\neq 2$ فإن $2-x\neq 0$ ولما $x\neq 0$ فإن $2-x\neq 2$

ولدينا: $x\neq 2$ $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x^2-2x}=\frac{4+x^2-4x-4+2x+3}{4+x^2-4x-4+2x}=\frac{(2-x)^2-2(2-x)+3}{(2-x)^2-2(2-x)}=f(2-x)$

2− لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\ln(x^2-x+1)$ ، (C_f) تمثيلها البياني

المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}$ محور تناظر لـ (C_f) لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(1-x)=\ln[(1-x)^2-(1-x)+1]=$

$=\ln(x^2-2x+1-1+x+1)=f(x)$

نقط التقاطع مع حاملي محور الاحداثيات

لتحديد تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

يكفي حل المعادلة $f(x)=0$ حلول المعادلة هي فواصل هذه النقط و التراتيبة معدومة

مثلا:

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع $(x\acute{x})$ حيث $D_f=]0;+\infty[$ و $f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x}$ نحل المعادلة $\frac{1+\ln(x)}{x}=0$

منه حلها في مجموعة التعريف هو حل المعادلة $1+\ln(x)=0$ أي $\ln(x)=-1$ منه $x=e^{-1}$

نقطة التقاطع احداثياتها $(e^{-1},0)$

لتحديد نقط التقاطع مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ إن وجدت وتكون حينها نقطة التقاطع هي النقطة ذات الإحداثيات $(0,f(0))$

نقطة الإنعطاف

تعريفها:

هي النقطة التي يتحول عندها المنحنى من تحدب إلى تقعر أو من تقعر إلى تحدب

خواصها

يخترق عندها المماس المنحنى

حالات طرحها اربعة

الحالة الأولى : إذا انعدمت العبارة الجبرية $\acute{f}(x)$ (حيث $\acute{f}$ هي المشتقة الأولى للدالة f) عند القيمة a ولم تغير اشارتها بجوارها يمينا ويسارا فإن النقطة $A(a;f(a))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

x	a
$\acute{f}(x)$	+ | 0 +

أو

x	a
$\acute{f}(x)$	− | 0 −

ملاحظة هامة هذا الشرط لنقطة الانعطاف هو شرط كافي وغير لازم ، بمعنى لا يتوجب حدوثة لكي نقول بوجود نقطة انعطاف فقد تكون نقطة الانعطاف موجودة وهذا الشرط غير محقق

مثلا:

1- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ $f(x)=\frac{x^3-2}{x^3+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني،قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$

ودالتها المشتقة معرفة بـ $\acute{f}(x)=\frac{9x^2}{(x^3+1)^2}$

إشارة $\acute{f}(x)$ على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	+	||	+	0	+	

ومنه النقطة ذات الاحداثيات $(0\,;f(0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

2- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f\ (x)=x+2+(x-1)e^{2x}$

دالتها المشتقة معرفة على $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x}g(x)$ حيث $g(x) = 2x - 1 + e^{-2x}$

فإشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعند دراسة الدالة g على $\mathbb{R}$ نجد جدول التغيرات التالي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

فجدول اشارة $g(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ هو

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

ومنه

ومنه النقطة ذات الاحداثيات $(0\,;f(0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

الحالة الثانية

إذا انعدمت العبارة الجبرية $f''(x)$ (حيث f'' هي المشتقة الثانية للدالة f) عند القيمة a وغيرت إشارتها بجوارها يمينا ويسارا فإن النقطة $A(a; f(a))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

x		a	
$f''(x)$	$-$	0	$+$

x		a	
$f''(x)$	$+$	0	$-$

مثلا:

1- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 - 4x - 2e^{-x-1}$، (C_f) تمثيلها البياني، قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة بـ $f'(x) = 2x - 4 + 2e^{-x-1}$

و الدالة f' بدورها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة بـ $f''(x) = 2 - 2e^{-x-1}$

إشارة $f''(x)$ على $\mathbb{R}$ كما يلي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه النقطة ذات الإحداثيات $(-1\,; f(-1))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

2- الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ حيث: $f(x) = -x^2 + x\ln x$

دالتها المشتقة معرفة على $]0; +\infty[$بـ: $f'(x) = -2x + 1 + \ln x$ و الدالة f' بدورها قابلة للاشتقاق على$]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة بـ: $f''(x) = -2 + \frac{1}{x}$ أي : $f''(x) = \frac{-2x+1}{x}$

إشارة $f''(x)$ على $]0; +\infty[$ كما يلي:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه النقطة ذات الإحداثيات $\left(\frac{1}{2}\,; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

الحالة الثالثة

يطلب كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة a ثم يطلب دراسة الوضع النسبي بين هذا المماس والمنحنى ....إذا تغير الوضع النسبي عند النقطة ذات الفاصلة a بمعنى المنحنى كان فوق المماس قبل a واصبح تحته بعدها أو العكس فإن النقطة ذات الفاصلة a هي نقطة انعطاف للمنحنى

التفسير تغير الوضع النسبي عند نقطة التماس يعنى أن المماس اخترق المنحنى عندها فهي نقطة انعطاف

تنبيه : تغير الوضع النسبي بين المنحنى والمماس في موضع آخر وليس عند النقطة ذات الفاصلة a لا تفسير له

مثلا:

-1 الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1-x}{x^3+1}$، (C_f) تمثيلها البياني،

قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة بـ: $f'(x)=\frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2}$

عند كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0 نجدها: $y=-x+1$

لدينا $f(x)-(-x+1)=\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$ في المجال $]-1;+\infty[$ العدد x^3+1 موجب تماما

ومنه إشارة الفرق من اشارة $x^3(x-1)$ ومنه جدول الإشارة كالتالي

x	-1		0		1		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(-x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي بين المماس والمنحنى		(C_f) فوق (T)	تقاطع (C_f) و (T)	(C_f) تحت (T)	تقاطع (C_f) و (T)	(C_f) فوق (T)	

بما أن الوضع النسبي تغير بين المماس والمنحنى عند نقطة التماس فالمماس اخترق المنحنى فالنقطة ذات الإحداثيات $(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

الحالة الرابعة - خاصة بشعبة الرياضيات

يطلب دراسة قابلية الاشتقاق عند a وعند حساب $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نجدها $+\infty$ في جوار a بقيم صغرى وبقيم كبرى أو $-\infty$ في جوار a بقيم صغرى وبقيم كبرى

نستنتج أن النقطة ذات الإحداثيات $(a;f(a))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

التفسير

الحصول على $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ يعنى أن المنحنى تغير من تحدب الى تقعر

الحصول على $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ يعنى أن المنحنى تغير من تقعر الى تحدب

مثلا:

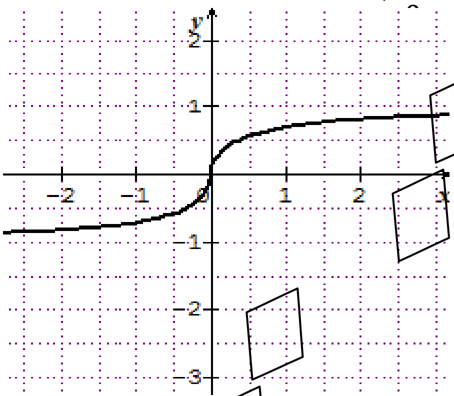
-1 الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+|x|}} \\ f(0)=0 \end{cases}$، (C_f) تمثيلها البياني،

عند دراسة قابلة للاشتقاق للدالة f عند 0 نجد :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+|x|}}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{\sqrt{x^2+|x|}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+|x|}}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{\sqrt{x^2+|x|}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}=+\infty$$

ومنه للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف هي مبدأ الإحداثيات



رسم منحنى بياني انطلاقا من منحنى بياني آخر

الحالة1: K عدد حقيقي، التمثيل البياني للدالة $f+k$ هو صورة التمثيل البياني للدالة f بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$

الحالة2: λ عدد حقيقي ، f دالة منحناها (C_f) أي مجموعة النقط ذات الإحداثيات $(x\,,f(x))$ فإن التمثيل البياني للدالة λf هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات $(x\,,\lambda f(x))$ أي نضرب تراتيب النقط من (C_f) في العدد λ

حالة خاصة ومهمة : إذا كان $\lambda=-1$ فإن التمثيل البياني لـ f و التمثيل البياني لـ $-f$ متناظران بالنسبة لحامل محور الفواصل

الحالة3: إذا كان $f(x)=g(x+a)+b$ فإن (C_f) هو صورة (C_g) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a,b)$

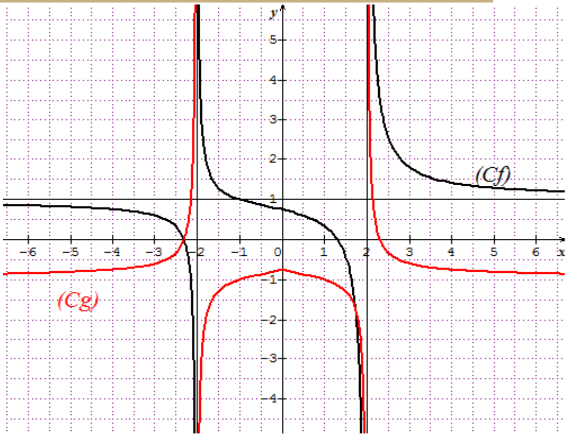
الحالة4: إذا كان $g(x)=|f(x)|$ فإن $g(x)=\begin{cases} f(x)\cdots f(x)\geq 0\\ -f(x)\cdots f(x)\leq 0\end{cases}$ ، أي (C_g) ينطبق على (C_f) في جزئه الذي فوق حامل محور الفواصل و (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل في جزئه الذي يقع تحت حامل محور الفواصل

الحالة5: إذا كانت $g(x)=f(|x|)$ أو $g(x)=-f(|x|)$ أو $g(x)=f(-|x|)$ فإن g زوجية $g(x)=f(|x|)=\begin{cases} f(x)\cdots x\geq 0\\ f(-x)\cdots x\leq 0\end{cases}$ ومنه (C_g) ينطبق على (C_f) في جزئه المرسوم في المجال $[0\,,+\infty[$ وبما ان g دالة زوجية نتمم الرسم بالتناظر بالنسبة لحامل محو التراتيب

الحالة6: إذاكانت g **دالة زوجية و** $g(x)=-f(x)$ **على نصف مجال تعريفها** فإذا على هذا المجال (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل وبما ان g دالة زوجية نتمم الرسم بالتناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب

مثلا: $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}$ و $g(x)=\dfrac{-x^2+|x|+3}{x^2-4}$

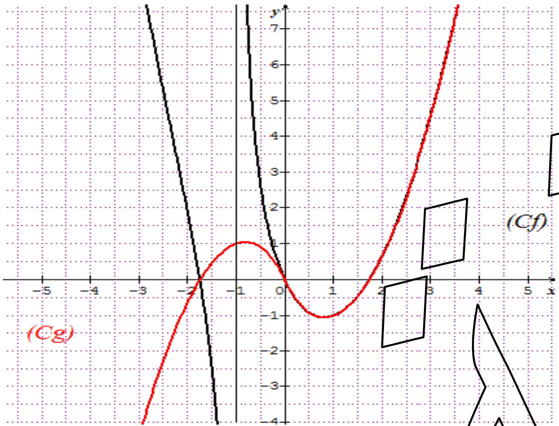
لدينا $g(x)=\dfrac{-(-x)^2+|-x|+3}{(-x)^2-4}=g(-x)$



ولدينا $g(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+x+3}{x^2-4}\cdots x\geq 0\\ \dfrac{-x^2-x+3}{x^2-4}\cdots x\leq 0\end{cases}$

ومنه $g(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+x+3}{x^2-4}\cdots x\geq 0\\ -f(x)\cdots x\leq 0\end{cases}$

الحالة7: إذاكانت g **دالة فردية و** $g(x)=f(x)$ **على نصف مجال تعريفها** فإذا على هذا المجال (C_g) ينطبق على (C_f) وبما ان g دالة فردية نتمم الرسم بالتناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات



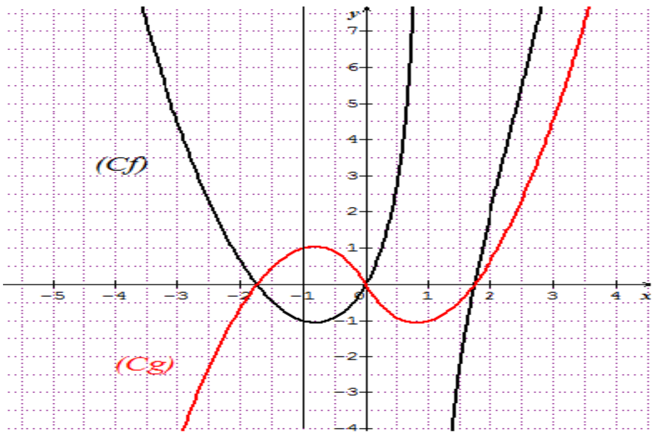
مثلا:

$f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x^3-3x}{|x|+1}$

لدينا $g(-x)=\dfrac{(-x)^3-3(-x)}{|-x|+1}=-g(x)$

ولدينا $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x}{x+1}=f(x)\cdots x\geq 0\\ \dfrac{x^3-3x}{-x+1}\cdots x\leq 0\end{cases}$

الحالة8: إذاكانت g **دالة فردية و** $g(x)=-f(x)$ **على نصف مجال تعريفها** فإذا على هذا المجال (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل وبما ان g دالة فردية نتمم الرسم بالتناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات



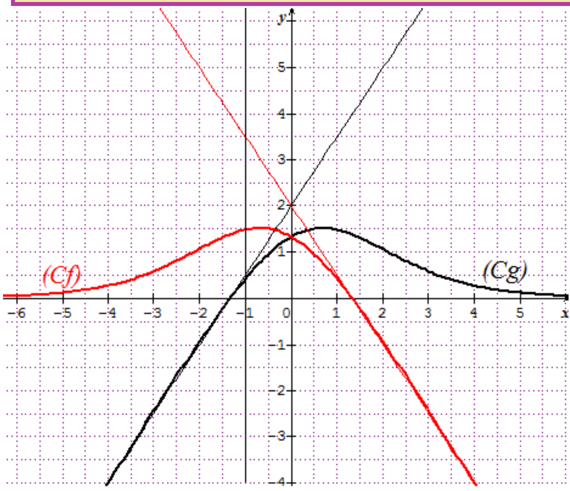
مثلا:

$f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x-1}$ و $g(x)=\dfrac{x^3-3x}{|x|+1}$

لدينا $g(-x)=\dfrac{(-x)^3-3(-x)}{|-x|+1}=-g(x)$

ولدينا $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x}{x+1}\cdots x\geq 0\\ \dfrac{x^3-3x}{-x+1}=-f(x)\cdots x\leq 0\end{cases}$

الحالة 9: إذاكانت $g(x) = f(-x)$ (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب

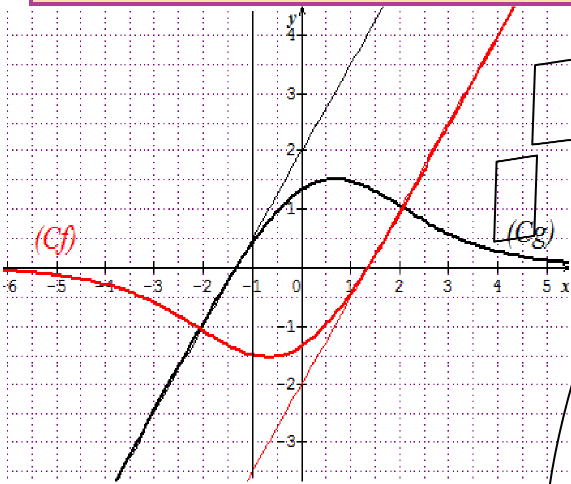


مثال:

$f(x) = \frac{3x+4}{e^x+2}$ و $g(x) = \frac{(-3x+4)e^x}{1+2e^x}$ لأن:

$$f(-x) = \frac{-3x+4}{e^{-x}+2} = \frac{(-3x+4)e^x}{(e^{-x}+2)e^x} = \frac{(-3x+4)e^x}{1+2e^x} = g(x)$$

الحالة 10: إذاكانت $g(x) = -f(-x)$ (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمبدأ الإحداثيات



مثال:

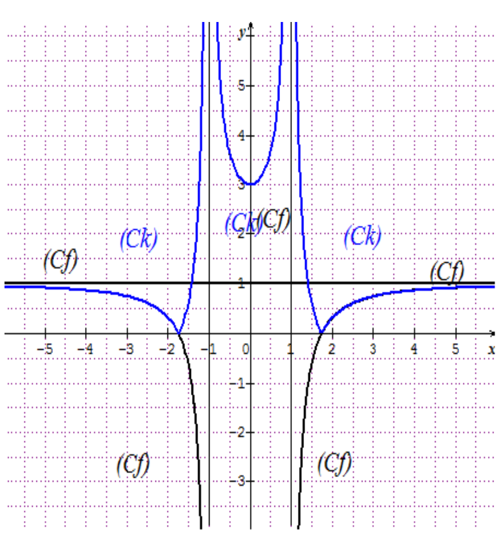
$f(x) = \frac{3x+4}{e^x+2}$ و $g(x) = \frac{(3x-4)e^x}{1+2e^x}$

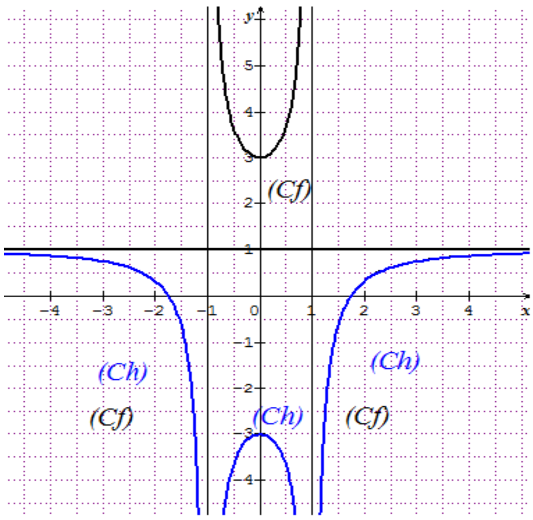
لأن

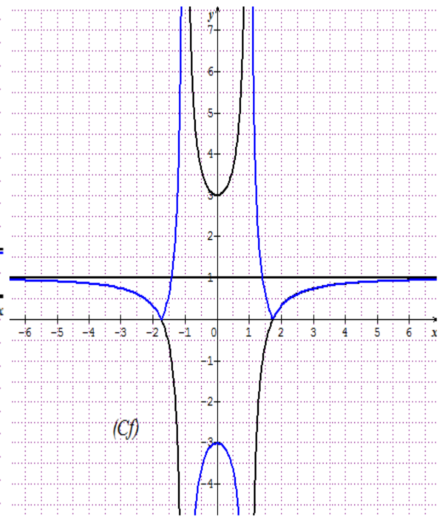
$$f(-x) = \frac{-3x+4}{e^{-x}+2} = \frac{(-3x+4)e^x}{(e^{-x}+2)e^x} = \frac{(-3x+4)e^x}{1+2e^x} = -g(x)$$

ملاحظة: من أجل الدالة $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-1}$ الدوال التالية ليست لها نفس التمثيل البياني:

$g(x) = \frac{|x^2-3|}{x^2-1}$ ، $h(x) = \frac{x^2-3}{|x^2-1|}$ ، $k(x) = \left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|$







تعيين ثوابت مجهولة لدالة مع اعطاء شروط - أو بالمطابقة أو بالقسمة

باستعمال القسمة الاقليدية أو المطابقة

مثلا:

1- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ $f(x)=\frac{x^2+3x+5}{x+1}$

المطلوب تعيين a و b و c بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$

في هذه الحالة يمكن توحيد المقامات للعبارة $ax+b+\frac{c}{x+1}$ ومطابقتها بـ $\frac{x^2+3x-2}{x+1}$

أو القسمة الاقليدية لـ x^2+3x-2 على $x+1$

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x+5 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^2-x & x+2 \\ \cline{1-1} 2x+5 & \\ -2x-2 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

ومنه $f(x)=x+2+\frac{3}{x+1}$

2- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$

أوجد الأعداد الحقيقية α ، β ، γ بحيث يكون من أجل كل x من D_f: $f(x)=\alpha x+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$

نوحد المقامات للعبارة $\alpha x+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$ نجد $\frac{\alpha x(x+1)^2+\beta(x+1)+\gamma}{(x+1)^2}$ أي $\frac{\alpha x^3+2\alpha x^2+(\beta+\alpha)x+\beta+\gamma}{(x+1)^2}$

بالمطابقة بين العبارتين : $\frac{1x^3+2x^2+0x+0}{(x+1)^2}$ و $\frac{\alpha x^3+2\alpha x^2+(\beta+\alpha)x+\beta+\gamma}{(x+1)^2}$ نجد

$\begin{cases}\alpha=1\\2\alpha=2\\\beta+\alpha=0\\\beta+\gamma=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=1\\\beta=-1\\\gamma=1\end{cases}$ أي $f(x)=x-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$

باستعمال معطيات نستخلص منها معادلات عددها مساوي لعدد المجاهيل على الأقل

لاجل ذلك نقدم الجدول المساعد التالي:

تفسيرها	المعلومة
يعني أن $f(a)=b$	النقطة $A(a,b)$ تنتمي إلى (C_f)
يعني أن $f(a)=b$ و $f'(a)=0$	النقطة $A(a,b)$ ذروة لـ (C_f) أو b قيمة حدية محلية عند a
يعني أن $f(a)=b$ و $f'(a)=0$	المماس عند $A(a,b)$ يوازي حامل محور الفواصل
يعني أن $f(a)=b$ و $f'(a)=\alpha$	المماس عند $A(a,b)$ يوازي مستقيم معادلته $y=\alpha x+\beta$
يعني أن $f(a)=b$ و $f'(a)\times\alpha=-1$	المماس عند $A(a,b)$ يعامد مستقيم معادلته $y=\alpha x+\beta$
يعني أن $f(a)=b$ و $f'(a)=\alpha$	معامل توجيه المماس عند $A(a,b)$ هو α
نعوض في مكان y بـ $f(x)$ وفي مكان y' بـ $f'(x)$ ونطابق وهكذا ، ثم نبسط المعادلة ونطابق	$f(x)$ حل لمعادلة تفاضلية معطاة

أمثلة:

.1

كقوله: نعتبر المعادلة التفاضلية: $\acute{y}-2y=xe^{x}$ .... (1).

ليكن a و b عددين حقيقيان و u الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $u(x)=(ax+b)e^{x}$، عين a و b حتى تكون u حلا للمعادلة 1

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $u'(x)=ae^{x}+(ax+b)e^{x}$ أي $u'(x)=(ax+a+b)e^{x}$

ولدينا: $u'(x)-2u(x)=[(ax+a+)e^{x}]-2[(ax+b)e^{x}]$

بالنشر والتبسيط نجد: $u'(x)-2u(x)=[(-ax+a-b)e^{x}]$

لكي تكون u حلا للمعادلة (1) من اجل كل قيم x من $\mathbb{R}$ يكفي ويلزم أن يكون: $\begin{cases}-a=1\\ a-b=0\end{cases}$

أي مطابقة العبارة $-ax+a-b$ مع العبارة مع العبارة x التي هي $1\times x+0$

نجد أن $a=-1$ من المعادلة الأولى و $a=b$ من المعادلة الثانية أي $b=-1$

.2 لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$، a و b أعداد حقيقية، (C_f) تمثيلها البياني

عين العددان a و b بحيث $A(-1,1)$ نقطة من (C_f) و معامل توجيهه المماس للمنحني (C_f) عند النقطة A يساوي $-e$ **من بكالوريا علمي 2008**

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=ae^{-x}+(ax+b)(-e^{-x})$ (مشتق الجداء)

أي $f'(x)=e^{-x}(a-b-ax)$

معامل توجيه المماس عند النقطة A ذات الفاصلة -1 هو $f'(-1)$ ومنه $f'(-1)=-e$

ومنه لدينا $\begin{cases}f(-1)=1\\ f'(-1)=-e\end{cases}$ أي $\begin{cases}(a(-1)+b)e^{-(-1)}+1=1\\ e^{-(-1)}(a-b-a(-1))=-e\end{cases}$ منه $\begin{cases}(-a+b)e=0\\ e(2a-b)=-e\end{cases}$

منه $\begin{cases}-a+b=0\\ 2a-b=-1\end{cases}$ منه بالجمع نجد $a=-1$ وبالتعويض نجد $b=-1$

ومنه الدالة هي $f(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

المناقشة البيانية

المناقشة المقصودة هنا هي تعيين عدد حلول معادلة أو عدد وإشارة حلول معادلة من الشكل: $f(x) = ax + b$ بالاعتماد على التمثيل البياني وليس جبريا حيث العددان a و b أحدهما او كلاهما معطى بدلالة وسيط يمسح مجموعة معطاة غالبا هي $\mathbb{R}$ والمطلوب مناقشة عدد الحلول حسب مسح هذا الوسيط للمجموعة المعطاة

y=ax+b

a $\neq 0$ — a متعلق بالوسيط — مناقشة دورانية — معامل التوجيه يتغير فالمستقيم يدور

a غير متعلق بالوسيط و b متعلق بالوسيط — مناقشة مائلة — معامل التوجيه لا يتغير فالمستقيم يتحرك بالتوازي مع مستقيم معلوم سلفا مماس أو مقارب مائل

a $=0$ — b متعلق بالوسيط — مناقشة أفقية — معامل التوجيه معدوم فالمستقيم يتحرك بالتوازي مع حامل محور الفواصل

المناقشة الأفقية

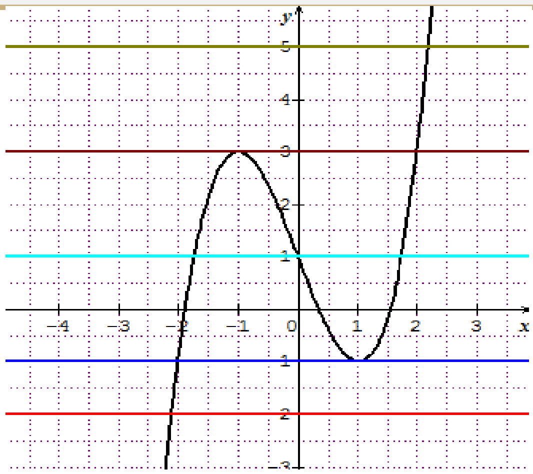
1− حلول المعادلة $f(x) = m$

هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$

لمناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ يكفي أن نحدد عدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل ذو المعادلة $y = m$ مع m يتغير في $\mathbb{R}$ ويسمى الحل مضاعفا −لانه فاصلة تطابق نقطتين − عندما يساوي m **ترتيبة الذروة** أو ترتيبة **نقطة الزاوية** أو **نقطة الإرجاع**

هام الذي يحدد لنا معالم المناقشة هي الذروة (أو نقطة الزاوية − نقطة الارجاع) او المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل

بمعنى نقارن بين العدد m وترتيبة الذروة أو العدد b بالنسبة للمستقيم المقارب الموازي لحامل محور التراتيب



أمثلة:

1- من أجل التمثيل البياني المقابل

مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ حيث: $m\in \mathbb{R}$

نعلم أن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m)

حيث $(\Delta_m): y=m$

لاحظ أن:

- من أجل $m=-2$ المستقيم (Δ_{-2}) يتقاطع مع (C_f) في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة لذا فإن من أجل $m=-2$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا إذا طلبت إشارته فإشارته سالبة
- من أجل $m=-1$ المستقيم (Δ_{-1}) يتقاطع مع (C_f) في نقطتين إحداهما ذروة فاصلتها موجبة والنقطة الاخرى فاصلتها سالبة لذا فإن من أجل $m=-1$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين أحدهما مضاعف إذا طلبت إشارته فإشارته الحل المضاعف موجبة والحل الاخر سالبة
- من أجل $m=1$ المستقيم (Δ_1) يتقاطع مع (C_f) في ثلاث نقاط فاصلة احداهما موجبة والاخرى معدومة و الأخرى سالبة ، لذا فإن من أجل $m=1$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل ثلاث حلول إذا طلبت إشارتها فإشارتها إحداهما موجبة والأخرى معدومة
- من أجل $m=3$ المستقيم (Δ_3) يتقاطع مع (C_f) في نقطتين إحداهما ذروة فاصلتها سالبة والنقطة الاخرى فاصلتها موجبة لذا فإن من أجل $m=3$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين أحدهما مضاعف إذا طلبت إشارته فإشارته الحل المضاعف سالبة والحل الاخر موجبة
- من أجل $m=5$ المستقيم (Δ_5) يتقاطع مع (C_f) في نقطة وحيدة فاصلتها موجبة لذا فإن من أجل $m=5$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا إذا طلبت إشارته فإشارته موجبة

ملاحظة: ان اختيار القيم لـ m السابقة ليس كيفيا بل اتخذنا من الذروات(النقطة الحدية) كموجه لنا في اختيارها فاخترنا قيمة اقل من ترتيبة الذروة السفلى والقيمة الثانية مساوية لترتيبتها والثالثة بين ترتيبة الذروتين والرابعة مساوية لترتيبة الذروة الثانية و الاخيرة فوق ترتيبة الذروة الثانية

لذا فإن مناقشة حسب قيم لعدد حلول المعادلة $f(x)=m$ في هذا المثال هي كما يلي :

من أجل $m\in]-\infty;-1[$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا

ما أجل $m=-1$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين أحدها مضاعف

من أجل $m\in]-1;3[$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل ثلاث حلول متمايزة مثنى مثنى

من أجل $m=3$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين أحدها مضاعف

من أجل $m\in]3;+\infty[$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا

-2 من أجل التمثيل البياني المقابل والذي هو التمثيل البياني للدالة

f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = -1 + \frac{e^x}{x}$

لمناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ حيث: $m \in \mathbb{R}$

نعلم أن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m)

حيث $(\Delta_{m}): y = m$

لاحظ أن:

- من أجل $m = -2$ المستقيم (Δ_{-2}) يتقاطع مع (C_f) في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة لذا فإن من أجل $m = -2$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا إذا طلبت إشارته فإشارته سالبة
- من أجل $m = -1$ المستقيم (Δ_{-1}) لا يتقاطع مع (C_f) في أي نقطة لذا فإن من أجل $m = -1$ المعادلة $f(x) = m$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$
- من أجل $m = 1$ المستقيم (Δ_1) لا يتقاطع مع (C_f) في أي نقطة لذا فإن من أجل $m = 1$ المعادلة $f(x) = m$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$
- من أجل $m = e - 1$ المستقيم (Δ_{e-1}) يتقاطع مع (C_f) في نقطة الذروة فاصلتها موجبة لذا فإن من أجل $m = e - 1$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا مضاعفا اذا طلبت إشارته فإشارته موجبة
- من أجل $m = 5$ المستقيم (Δ_5) يتقاطع مع (C_f) في نقطتين فاصلة كل منهما موجبة لذا فان من أجل $m = 5$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين إذا طلبت إشارتهما فإشارة كل منهما موجبة

ملاحظة : ان اختيار القيم لـ m السابقة ليس كيفيا بل اتخذنا من الذروات والمستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل كموجه لنا في اختيارها

اذا فإن مناقشة حسب قيم لعدد حلول المعادلة $f(x) = m$ في هذا المثال هي كما يلي:

من أجل $m \in]-\infty; -1[$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا

من أجل $m \in [-1; e-1[$ المعادلة $f(x) = m$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

من أجل $m = e - 1$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا مضاعفا

من أجل $m \in]e - 1; +\infty[$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين متمايزين

2− حلول المعادلة $f(x) = h(m)$

لمناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = h(m)$ يكفي أن نحدد عدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل ذو المعادلة $y = h(m)$ مع m يتغير في $\mathbb{R}$ او مجال منها او اتحاد مجالات

ويقصد بـ $h(m)$ عبارة بدلالة m مثلا $-2m$ أو $|m|$ او m^2 او $\ln(m)$ او $e^m - 3$ أو $f(m)$ .....

و لنتجنب الخطأ هنا الأحسن أن نضع $h(m) = \alpha$

أي نناقش حلول المعادلة $f(x) = \alpha$ بنفس طريقة $f(x) = m$

ثم نحل معادلات ومتراجحات التي مجهولها m

فإذا كان مثلا $\alpha = -2m$ و(قلنا مثلا $\alpha < 1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحل آخر) فهذا يعني أن

(إذا كانت $m > -\frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حل مضاعفا وحل آخر) لان $\alpha < 1$ يعني ان $-2m < 1$

وبالتالي $m > -\frac{1}{2}$ وهنا ننوه إلى

خواص القيمة المطلقة من اجل b موجب تماما

$|a| < b$ يعني ان: $-b < a < b$

$|a| = b$ يعني ان: $a = b$ أو $a =- b$

$|a| > b$ يعني ان: $a > b$ أو $a < -b$

الخواص و التربيع من اجل b موجب تماما

$a^2 < b$ يعني ان: $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

$a^2 = b$ يعني ان: $a = \sqrt{b}$ أو $a =- \sqrt{b}$

$a^2 > b$ يعني ان: $a > \sqrt{b}$ أو $a < -\sqrt{b}$

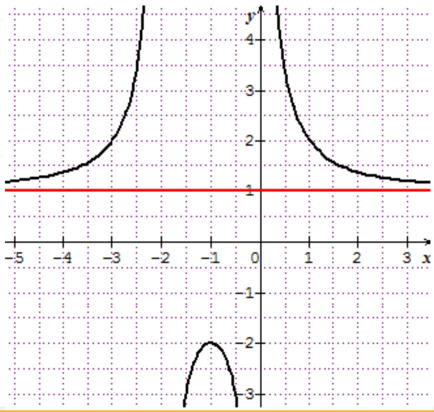
المتباينة المزدوجة والقيمة المطلقة من أجل a و b عددان حقيقين لدينا ما يلي

- من اجل $b < 0$ و$a < 0$ فإن $a < |m| < b$ لا توجد قيم لـ m تحققها
- من اجل $b > 0$ و $a < 0$ فإن $a < |m| < b$ تستلزم $\begin{cases} |m| > a \text{ ...دوما محققة} \\ |m| < b \end{cases}$
  ومنه $a < |m| < b$ حلولها هي حلول المتراجحة $|m| < b$ أي $-b < m < b$
- من اجل $b > 0$ و$a > 0$ فإن $a < |m| < b$ حلولها هي $m \in]-b; -a[\cup]a; b[$

المتباينة المزدوجة والتربيع من أجل a و b عددان حقيقين لدينا ما يلي:

- من اجل $b < 0$ و$a < 0$ فإن $a < m^2 < b$ لا توجد قيم لـ m تحققها
- من اجل $b > 0$ و $a < 0$ فإن $a < m^2 < b$ تستلزم $\begin{cases} m^2 > a \text{ ...دوما محققة} \\ m^2 < b \end{cases}$ ومنه
  $a < m^2 < b$ حلولها هي حلول المتراجحة $m^2 < b$ أي $-\sqrt{b} < m < \sqrt{b}$
- من اجل $b > 0$ و$a > 0$ فإن $a < m^2 < b$ حلولها هي $m \in]-\sqrt{b}; -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}; \sqrt{b}[$

أمثلة:



1- من أجل التمثيل البياني المقابل والذي هو التمثيل البياني للدالة

f المعرفة على $\mathbb{R}^* - \{-2\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+2x}$

لمناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = -2|m| + 3$ حيث: $m \in \mathbb{R}$

نعلم أن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m)

حيث $(\Delta_m): y = -2|m| + 3$

نضع $\alpha = -2|m| + 3$ فالمطلوب تعيين عدد حلول المعادلة $f(x) = \alpha$

لذا لدينا:

من أجل $\alpha \in]-\infty; -2[$ المعادلة $f(x) = \alpha$ تقبل حلان متمايزان

ولدينا $\alpha \in]-\infty; -2[$ معناه $-2|m| + 3 < -2$ ومنه $|m| > \frac{5}{2}$ أي $m \in \left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$

من أجل $\alpha = -2$ المعادلة $f(x) = \alpha$ تقبل حلا مضاعفا

ولدينا $\alpha = -2$ معناه $-2|m| + 3 = -2$ ومنه $|m| = \frac{5}{2}$ أي $m = \frac{5}{2}$ أو $m = -\frac{5}{2}$

من أجل $\alpha \in]-2; 1]$ المعادلة $f(x) = \alpha$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

ولدينا $\alpha \in]-2; 1]$ معناه $-2 < -2|m| + 3 \leq 1$ ومنه $-5 < -2|m| \leq -2$ أي

أن $1 \leq |m| < \frac{5}{2}$ ومنه $m \in \left]-\frac{5}{2}; -1\right] \cup \left[1; \frac{5}{2}\right[$

من أجل $\alpha \in]1; +\infty[$ المعادلة $f(x) = \alpha$ تقبل حلان متمايزان

ولدينا $\alpha \in]1; +\infty[$ معناه $-2|m| + 3 > 1$ ومنه $|m| < 1$ أي $m \in]-1; 1[$

الخلاصة

من أجل $m \in \left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$ المعادلة $f(x) = -2|m| + 3$ تقبل حلان متمايزان

من أجل $m = \frac{5}{2}$ أو $m = -\frac{5}{2}$ المعادلة $f(x) = -2|m| + 3$ تقبل حلا مضاعفا

من أجل $m \in \left]-\frac{5}{2}; -1\right] \cup \left[1; \frac{5}{2}\right[$ المعادلة $f(x) = -2|m| + 3$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

من أجل $m \in]-1; 1[$ المعادلة $f(x) = -2|m| + 3$ تقبل حلان متمايزان

ملاحظة 1: عند حلنا للمعادلات والمتراجحات اعلاه وذلك للانتقال من المجال الذي ينتمي اليه α الى المجال الذي تنتمي اليه m او من قيمة α الى قيمة m لو وجدنا أن المعادلة مستحيلة او المتراجحة مستحيلة فالحالة كلها مرفوضة ولا تكتب في الإجابة

ملاحظة 1: لاحظ ان في المثال اعلاه قيم m تمسح $\mathbb{R}$ إذا لم نجد ذلك فقد نسينا بعض الحالات

المناقشة المائلة

1- حلول المعادلة $f(x)=ax+m$ حيث $a\neq 0$ وغير متعلق بـ m و m وسيط حقيقي

هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=ax+m$

- لمناقشة عدد حلول المعادلة $f(x)=ax+m$ يكفي أن نحدد عدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المائل ذو المعادلة $y=ax+m$ مع m يتغير في $\mathbb{R}$ وهنا ننوه إلى ما يلي :

إذا كان (Δ) و (Δ') مستقيمان معادلتيهما على الترتيب $y=ax+b$ و $y=a'x+b'$

- يسمى العددان a و a' معاملي توجيه المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب
- يمثل العددين b و b' ترتيبتي نقطتي تقاطع (Δ) و (Δ') على الترتيب مع حامل محور التراتيب
- يكون (Δ) و (Δ') متوازيان إذا كان $a=a'$

الوضع النسبي لمستقيمين متوازيين

إذا كان (Δ) و (Δ') متوازيان فإن (Δ) تحت (Δ') إذا كان $b<b'$

(Δ) فوق (Δ') إذا كان $b>b'$

(Δ) يتقاطع مع (Δ') إذا كان $b=b'$

وفق المعطيات السابقة فإنه عادة في حالة المناقشة لتقاطع (C_f) مع مستقيم مائل يكون هذا المستقيم موازيا لمستقيم مقارب للمنحني أو لمماس عند نقطة منه ونقارن في هذه الحالة m بالقيمة b بالنسبة للمقارب أو للمماس الموازي له حسب الحالة

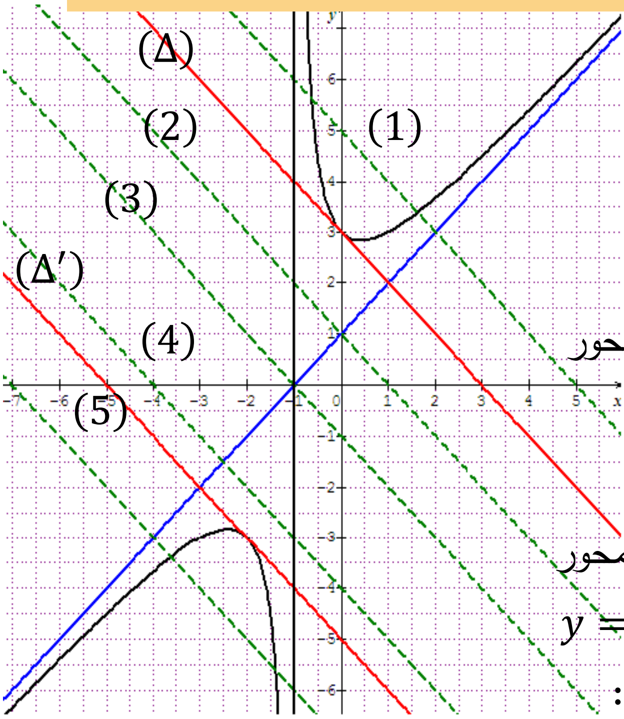
إذا كان $m<b$ فهذا يعني ان المستقيم المتحرك بتغير الـ m تحت المقارب أو المماس حسب الحالة ، وحدد في هذه الحالة عدد التقاطعات واذا كان $m>b$ فهذا يعني ان المستقيم المتحرك بتغير الـ m فوق المقارب أو المماس حسب الحالة ، وحدد في هذه الحالة عدد التقاطعات وإذا كان $m=b$ فهذا يعني ان المستقيم المتحرك بتغير الـ m ينطبق على المقارب أو المماس حسب الحالة ، وحدد في هذه الحالة عدد التقاطعات وإذا كان المستقيم المتحرك بتغير الـ m يوازي مماسا عند نقطة

يسمى الحل مضاعفا عندما $m=b$ وعند الذروة يسمى حلا وحيدا

هام المستقيم $(\Delta_m): y=ax+m$ يوازي مماسا او مستقيما مقاربا مائلا معادلته من الشكل $y=ax+b$ او اكثر من مستقيم معادلاتها بالشكل $y=ax+b$ ، $y=ax+c$ ... الذي يحدد لنا معالم المناقشة هي القيم b ، c ......

بمعنى نقارن بين العدد m وهذه القيم لنحدد وضع المستقيم المتحرب بالنسبة لوضع المستقيم الثابت الموازي له حسب ما قلناه في الوضع النسبي السابق بين مستقيمين متوازيين

وهنا للتوضيح أكثر نأخذ مثال :



الرسم المقابل هو للدالة : $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$

المستقيمين الظاهرين باللون الأحمر متوازيان وهما المماسان عند النقطتان ذاتا الفاصلتان 0 و $2-$ معادلتاهما على الترتيب $y=-x+3$ و $y=-x-5$ (لاحظ أن الأول يقطع حامل محور التراتيب عند النقطة ذات الترتيبة 3 والثاني $5-$)

المستقيمات باللون الأخضر موازية للمستقيمين آنفي الذكر بالضرورة المستقيم (1) معادلته $y=-x+5$ لانه يقطع حامل محور التراتيب عند النقطة ذات الترتيبة 5 وهكذا (4) معادلته $y=-x-4$

إذا مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x)=-x+m$ تكون كما يلي:

إذا كان $m<-5$ المعادلة تقبل حلان متمايزان (لاحظ انه تحت المماس (Δ') ولديك نقطتي تقاطع (في وضع مشابه للمستقيم (5))

إذا كان $m=-5$ المعادلة تقبل حلا مضاعف (لاحظ انه ينطبق على المماس (Δ'))

إذا كان $-5<m<3$ المعادلة لا تقبل حلول (لان أي قيمة لـ m بين هاتين القيمتين تجعل المستقيم ذو المعادلة $y=-x+m$ تحت (Δ) و فوق (Δ') كما هو الوضع لـ (2) و (3) و (4) ولا يوجد تقاطع بمعنى لا يوجد حلول)

إذا كان $m=3$ المعادلة تقبل حل مضاعف (لاحظ انه ينطبق على المماس (Δ))

إذا كان $m>3$ المعادلة تقبل حلان متمايزان(لاحظ انه فوق المماس (Δ) كما في حالة المستقيم (1))

إذا طلب منا مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ فهي تساوي عدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ الموازي للمقارب المائل الذي معادلته $y=x+1$

إذا كان $m<1$ او $m>1$ او نقول $m\neq 1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

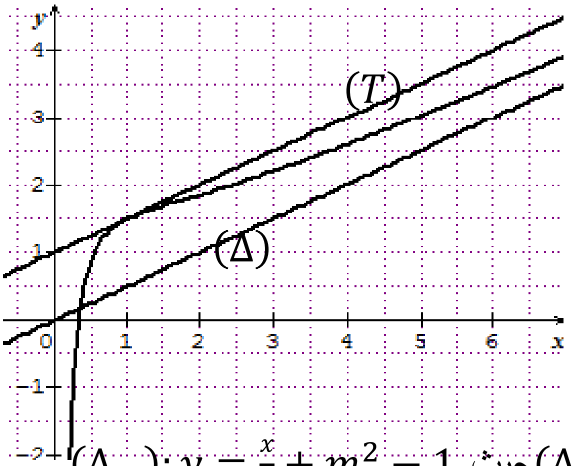
وإذا كان $m=1$ المعادلة لا تقبل حلول

هام مناقشة عدد وإشارة الحلول في كل الحالات يعني تحديد عدد النقط وإشارة فواصل هذه النقط بمعنى لا يهمنا المنحنى تحت حامل محور الفواصل أو فوقه ولكن بالإسقاط على محور الفواصل نرى الفاصلة إن كانت موجبة أو سالبة

2- حلول المعادلة $f(x) = ax + \mathrm{h}(m)$

لا تختلف هذه الحالة مع ما قلناه في المناقشة الأفقية وذلك بالاعتماد على تغيير متغير بوضع $\mathrm{h}(m) = \alpha$

لا تختلف هذه الحالة مع ما قلناه في المناقشة الأفقية وذلك بالاعتماد على تغيير متغير بوضع $\mathrm{h}(m) = \alpha$



مثال:

1- من أجل التمثيل البياني المقابل والذي هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$

لمناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{x}{2} + m^2 - 1$ حيث: $m \in \mathbb{R}$

لدينا $(\Delta): y = \frac{x}{2}$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

و $(T): y = \frac{x}{2} + 1$ مماس لـ(C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

نعلم أن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث $(\Delta_m): y = \frac{x}{2} + m^2 - 1$

نضع $\alpha = m^2 - 1$ فالمطلوب تعيين عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{x}{2} + \alpha$

لذا لدينا:

من أجل $\alpha \in]-\infty; 0]$ المعادلة $f(x) = \frac{x}{2} + \alpha$ تقبل حلا وحيدا

ولدينا $\alpha \in]-\infty; 0]$ معناه $m^2 - 1 \leq 0$ ومنه $m^2 \leq 1$ أي $m \in [-1; 1]$

من أجل $\alpha \in]0; 1[$ المعادلة $f(x) = \frac{x}{2} + \alpha$ تقبل حلان متمايزان

ولدينا $\alpha \in]0; 1[$ معناه $0 < m^2 - 1 < 1$ ومنه $1 < m^2 \leq 2$

ومنه $m \in]-\sqrt{2}; -1[\cup]1; \sqrt{2}[$

من أجل $\alpha = 1$ المعادلة $f(x) = \frac{x}{2} + \alpha$ تقبل حلا مضاعفا

ولدينا $\alpha = 1$ معناه $m^2 - 1 = 1$ ومنه $m^2 = 2$ أي $m = \sqrt{2}$ أو $m = -\sqrt{2}$

من أجل $\alpha \in]1; +\infty[$ المعادلة $f(x) = \frac{x}{2} + \alpha$ لا تقبل حلول

ولدينا $\alpha \in]1; +\infty[$ معناه $m^2 - 1 > 1$ ومنه $m^2 > 2$

أي $m \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$

المناقشة الدورانية

1− حلول المعادلة $f(x) = mx + b$

هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx + b$

- لمناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = mx + b$ يكفي أن نحدد عدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx + b$ مع m يتغير في $\mathbb{R}$الذي يتغير ميلة كلما تغير معامل توجيهه وهنا نذكرما يلي:

قبل مناقشة حلول المعادلة لا بد من تعيين أولا مركز الدوران

إذا كانت b غير متعلقة بـ m فإن إحداثيات مركز الدوران هي النقطة ذات الإحداثيات $(0; b)$

وإذا كانت b متعلقة بـ m فهي النقطة التي احداثييها $(x; y)$ حل الجملة $\begin{cases} g(x; y) = 0 \\ \text{h}(x; y) = 0 \end{cases}$

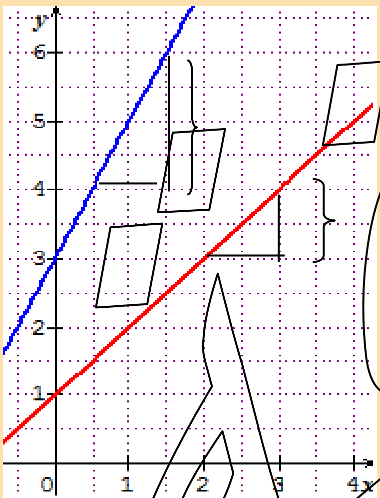
حيث المعادلة $y = mx + b$ تكافئ $mg(x; y) + \text{h}(x; y) = 0$

مثلا: معادلة المستقيم بالشكل $y = mx + m - 1$ تكافئ $y - mx - m + 1 = 0$

منه$m(-x - 1) + y + 1 = 0$ منه لكي تكون المعادلة محققة مهما كان m يتغير في $\mathbb{R}$ يكفي أن يتحقق ما يلي $\begin{cases} -x - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$ منه $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ أي مركز الدوران النقطة ذات الإحداثيات $(-1; -1)$

لا بد أن نعرف كذلك ما يلي

ميل مستقيم في معلم متعامد ومتجانس هو ارتفاع لمثلث قائم قائدته تساوي واحد ،باعتباره موجب



المستقيم بالأحمر معادلته$y = x + 1$

المستقيم بالأزرق معادلته$y = 2x + 3$

لذا فإن لرسم مستقيم علمت نقطة منه يكفي أن نتحرك بوحدة واحدة نحو اليمين ونحو الاعلى بـ a وحدة حيث a معامل توجيهه− هذا إذا كان a موجب أو نتحرك بوحدة واحدة نحو اليمين ونحو الاسفل بـ a وحدة هذا إذا كان a سالب

فزيادة a او توجهه نحو $+\infty$ يعني توجه الزاوية التي يميل بها المستقيم الى الزاوية $\frac{\pi}{2}$ ونقصان a او توجهه نحو $-\infty$ يعني توجه الزاوية التي يميل بها المستقيم الى الزاوية $\frac{-\pi}{2}$ وهكذا

مثلا:

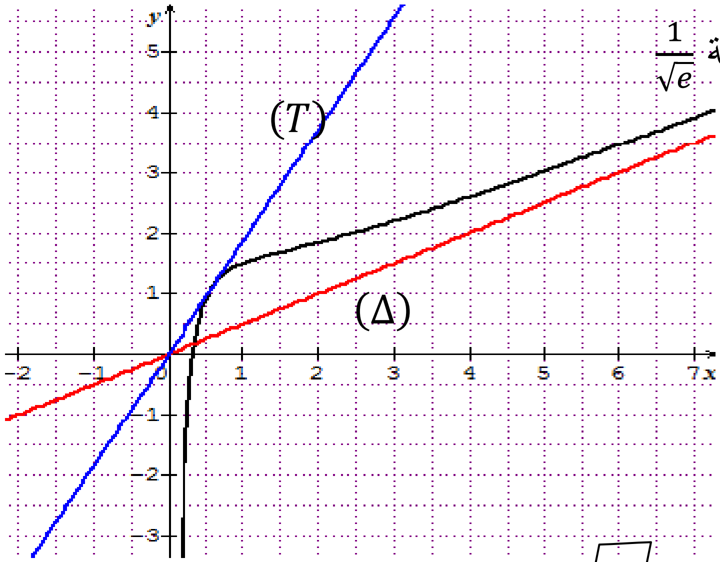
2- من أجل التمثيل البياني المقابل والذي هو التمثيل البياني للدالة

fالمعرفة على $]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+lnx}{x}$

لمناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$ حيث:$m \in \mathbb{R}$

لدينا $(\Delta): y = \frac{x}{2}$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

و $(T): y = \frac{e+1}{2}x$ مماس لـ(C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{\sqrt{e}}$



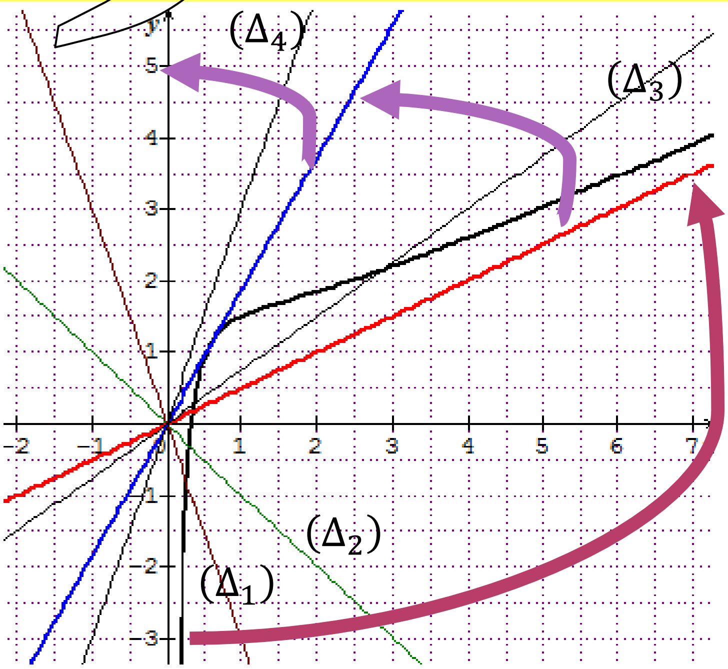
نعلم أن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث $(\Delta_m): y = mx$

من أجل $m \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ المعادلة $f(x) = mx$ تقبل حلا وحيدا (المستقيم يتحرك من الوضع العمودي في اتجاه عكس عقارب الساعة الى المستقيم (Δ) ، كما هو الحال (Δ_1) و (Δ_2)

من أجل $m \in \left]\frac{1}{2}; \frac{e+1}{2}\right[$ المعادلة $f(x) = mx$ تقبل حلان متمايزان (المستقيم يتحرك من (Δ) في اتجاه عكس عقارب الساعة الى المستقيم (T) ، كما هو الحال (Δ_3)

من أجل $m = \frac{e+1}{2}$ المعادلة $f(x) = mx$ تقبل حلا مضاعفا (المستقيم ينطبق على (T))

من أجل $m \in \left]\frac{e+1}{2}; +\infty\right[$ المعادلة $f(x) = mx$ لا تقبل حلول(المستقيم يتحرك من (T) في اتجاه عكس عقارب الساعة الى الوضع العمودي ، كما هو الحال (Δ_4)



الفهرس

حل معادلة من الشكل : $\alpha\, e^{p(x)} + \beta = 0$	25
دراسة إشارة : $\alpha\, e^{p(x)} + \beta$ – حالة خاصة	25
حل المعادلة: $ae^{2p(x)} + e^{p(x)} + c = 0$	26
دراسة إشارة $e^{2p(x)} + e^{p(x)} + c$	26
5-إشارة عبارة جبرية متعلقة بالعدد ln(p(x))	27
حل معادلة من الشكل : $\alpha ln[p(x)] + \beta = 0$	27
دراسة إشارة : $\alpha ln[p(x)] + \beta$	27
حل معادلة من الشكل : $a[ln(p(x))]^2 + bln(p(x)) + c = 0$	28
دراسة إشارة $a[ln(p(x))]^2 + bln(p(x)) + c$	28
الاستمرارية	30
مبرهنة	30
مبرهنة القيم المتوسطة:	30
الاشتقاقية	31
الاشتقاقية : العدد المشتق– الدالة المشتقة	31
التفسير الهندسي لقابلية الاشتقاق أو عدم قابلية الاشتقاق	32
بعض الصيغ للأسئلة التي يطلب فيها معادلة المماس	34
1- إعطاء فاصلة نقطة التماس تصريحا أو تلميحا	34
2- إعطاء ترتيبة نقطة التماس تصريحا أو تلميحا	35
3- إعطاء معامل توجيه المماس تصريحا أو تلميحا	35
4- إعطاء نقطة من المماس ليست بالظرورة نقطة التماس	37
الاشتقاقية و الاستمرارية	38
اتجاه تغير دالة:	38
اشتقاق دالة مركبة مبرهنة (دون برهان):	38
عمليات على المشتقات	39
الوضع النسبي لمنحنيين بيانيين :	40
الوضع النسبي لمنحني بياني ومستقيم :	40
نقط خاصة – محور التناظر	41
شفعية دالة	41
مركز التناظر	41
محور التناظر	42
نقط التقاطع مع حاملي محور الاحداثيات	43