طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

# أسئلة متنوعة شائعة

# في دراسة الدوال والإجابات عليها


إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل



آخر تحديث:

2020 / 11 / 29

## ① السلوك التقاربي \ المقاربات \ الوضعية النسبية

| السؤال | الإجابة |
|---|---|
| فسر بيانيا: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ | $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور التراتيب، معادلته: $x = a$ |
| فسر بيانيا: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ | $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا محور الفواصل معادلته: $y = b$ |
| فسر بيانيا: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ | $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = ax + b$ عند $\pm\infty$ |
| بين أن المستقيم $(\Delta): y = ax + b$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ | نبرهن: $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ |
| بين أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلته<br><br>ملاحظة:<br>(*) خاص بشعبتي: رياضيات + تقني رياضي | • إذا كان: $f(x) = ax + b + g(x)$<br>نبرهن $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$<br>ومعادلة المستقيم: $y = ax + b$<br>• إذا لم يكن ذلك(*):<br>نحسب العددين $a$ و$b$ من $\mathbb{R}$ كما يلي:<br>$a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$<br>$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$ |
| ادرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة: $(\Delta): y = ax + b$<br>نطبق نفس الإجابة على السؤال:<br>ادرس وضعية المنحنيين $(C_f)$ و$(C_g)$، بوضع: $d(x) = f(x) - g(x)$ | ندرس إشارة الفرق: $d(x) = f(x) - y$<br>• $d(x) > 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$<br>• $d(x) = 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقطع $(\Delta)$<br>• $d(x) < 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ |
| فسر بيانيا: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ | المنحنيين $(C_f)$ و$(C_g)$ متقاربان عند $\pm\infty$ |

## ② عناصر تناظر منحنى \ شفعية دالة

$D_f$ هي مجموعة تعريف الدالة $f$

| السؤال | الإجابة |
|---|---|
| بيّن أنّ النقطة $\boldsymbol{\Omega(\alpha;\beta)}$ مركز تناظر $\left(\boldsymbol{C_f}\right)$ | نبين أنّ: $\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$ |
| بيّن أنّ $\boldsymbol{f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta}$<br>ماذا تستنتج؟ | نستنتج أنّ:<br>$\left(C_f\right)$ متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ |
| بيّن أنّ المستقيم $\boldsymbol{d: x = \alpha}$ محور تناظر $\left(\boldsymbol{C_f}\right)$ | نبين أنّ: $\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) = f(x) \end{cases}$ |
| بيّن أنّ $\boldsymbol{f(\alpha + x) = f(\alpha - x)}$<br>ماذا تستنتج؟ | نستنتج أنّ:<br>$\left(C_f\right)$ متناظر بالنسبة إلى المستقيم $(d): x = \alpha$ |
| بيّن أنّ الدالة $\boldsymbol{f}$ فردية | نبين أنّ: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$ |
| بيّن أنّ الدالة $\boldsymbol{f}$ زوجية | نبين أنّ: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$ |
| بين أنّ: $\boldsymbol{f(-x) + f(x) = 0}$<br>ماذا تستنتج؟ | نستنتج أنّ:<br>$f$ فردية، ومبدا المعلم مركز تناظر $\left(C_f\right)$ |
| بين أنّ: $\boldsymbol{f(-x) - f(x) = 0}$<br>ماذا تستنتج؟ | نستنتج أنّ: $f$ زوجية، و$\left(C_f\right)$ متناظر بالنسبة إلى<br>حامل محور التراتيب $(yy')$ |
| بين أنّ: $\boldsymbol{f(\alpha - x) + f(x) = \beta}$<br>ماذا تستنتج؟ | نستنتج أنّ:<br>$\left(C_f\right)$ متناظر بالنسبة إلى النقطة<br>$\Omega\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\beta}{2}\right)$ |
| بين أنّ:<br>$\boldsymbol{f(\alpha - x) - f(x) = 0}$<br>ماذا تستنتج؟ | نستنتج أنّ:<br>$\left(C_f\right)$ متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة:<br>$x = \frac{\alpha}{2}$ |

## ③ إشارة دالة \ مبرهنة القيم المتوسطة

| السؤال | الإجابة |
|---|---|
| يعطى لك المنحنى $(C_f)$ مرسوما في معلم م م، <br>• عين فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل. <br>• استنتج إشارة $f(x)$ | • نحل بيانيا المعادلة: $f(x)=0$ <br>• ثم نحدد المجالات التي يكون عليها $(C_f)$ إما فوق محور الفواصل وإما أسفله <br>وأخيرا نحدد إشارة $f(x)$ |
| • أحسب $f(\alpha)$ واستنتج إشارة $f(x)$ | نجد $f(\alpha)=0$ ثم نحدد المجالات حيث: $f(x)$ إما موجبة أو سالبة |
| • بين أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حل وحيد $\alpha$ حيث: $a<\alpha<b$ <br>أو بصيغة أخرى: <br>بين أنّ $(C_f)$ يقطع المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته: $y=k$ في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ | • نبين أنّ: $f$ مستمرة ورتيبة تماما على $[a;b]$ <br>• ونحسب: $f(a)$ وَ $f(b)$ ونبين أنّ $k$ محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فينتج وجود $\alpha$ وحيد من $[a;b]$ <br>حيث: $f(\alpha)=k$ |
| • بين أنّ المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ <br>حيث: $a<\alpha<b$ <br>أو بصيغة أخرى: <br>بين أنّ $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ | • نبين أنّ $f$ مستمرة و رتيبة تماما على $[a;b]$ <br>• ونحسب: $f(a)$ وَ $f(b)$ <br>ونجد: $f(a)\times f(b)<0$ <br>وينتج وجود $\alpha$ وحيد من $[a;b]$ <br>حيث: $f(\alpha)=0$ |

الخليل للرياضيات

## ④ العدد المشتق وتفسيره الهندسي

| الإجابة | السؤال |
|---|---|
| • $f$ تقبل الاشتقاق عند $a$ و $f'(x) = l$<br>• $(C_f)$ يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا معامل توجيهه $l$ | فسّر: $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h} = l$<br>أو: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ |
| • $f$ تقبل الاشتقاق عند $a$ و $f'(x) = 0$<br>• $(C_f)$ يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y = f(a)$ | فسّر: $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h} = 0$ |
| • $f$ لا تقبل الاشتقاق عند $a$ و $(C_f)$ يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا (أو نصف مماس) يوازي حامل محور التراتيب معادلته $x = a$ | فسّر: $\lim_{\substack{h\to 0\\ <>}}\frac{f(h+a)-f(a)}{h} = \pm\infty$ |
| • $f$ لا تقبل الاشتقاق عند $a$.<br>• $(C_f)$ يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ نصفي مماسين معاملي توجيههما على الترتيب $l_1$ و $l_2$<br>وتسمى النقطة $A(a; f(a))$ نقطة زاوية. | فسّر: $\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{f(h+a)-f(a)}{h} = l_1$<br>وَ $\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{f(h+a)-f(a)}{h} = l_2$<br>حيث: $l_1 \neq l_2$ |

## ⑤ المماســـــات

| السؤال | الإجابة |
|---|---|
| عين معادلة المماس لـ $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $x_0$ | نكتب المعادلة $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ثم نحسب $f(x_0)$ و $f'(x_0)$ و نعوض في المعادلة أعلاه |
| عين معادلة المماس لـ $(C_f)$ في النقطة ذات الترتيبة $y_0$ | نبحث عن $x_0$ بحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ ثم نكتب معادلة المماس عند $x_0$ |
| عين بيانيا العدد المشتق $f'(x_0)$ <br> ملاحظة: <br> معامل توجيه المماس= $f'(x_0)$ | معامل التوجيه = $f'(x) = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ <br> حيث $A$ و$B$ من المماس |
| هل توجد مماسات لـ $(C_f)$ معامل توجيهها يساوي $a$ ؟ | نبحث عن $x_0$ بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ <br> عدد الحلول يمثل عدد المماسات |
| هل توجد مماسات لـ $(C_f)$ توازي المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟ | نبحث عن $x_0$ بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ <br> عدد الحلول يمثل عدد المماسات |
| هل توجد مماسات لـ $(C_f)$ تشمل النقطة $A(a; b)$ ؟ | نبحث عن $x_0$ بحل المعادلة <br> $b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$ <br> عدد الحلول يمثل عدد المماسات |
| هل توجد مماسات لـ $(C_f)$ تعامد المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟ (في معلم متعامد ومتجانس) | نبحث عن $x_0$ بحل المعادلة <br> $f'(x_0) = -\dfrac{1}{a}$ <br> عدد الحلول يمثل عدد المماسات |

## ⑥ إيجاد عبارة $f(x)$ بثوابت مجهولة $a, b$

| المعطيات | ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت: $a, b, c$ |
| --- | --- |
| $(C_f)$ يقبل في النقطة $A(x_0; y_0)$ مماسا يوازي محور الفواصل.<br>أو: $(C_f)$ يقبل ذروة في النقطة $A(x_0; y_0)$ | نحل الجملة:<br>$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$ |
| $(C_f)$ يقبل في النقطة ذات الفاصلة $x_0$ مماسا يوازي المستقيم ذو المعادلة:<br>$y = mx + k$ | نحل الجملة:<br>$\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$ |
| $(C_f)$ يقبل في النقطة $A(x_A; y_A)$ مماسا يشمل النقطة $B(x_B; y_B)$ | نحل الجملة:<br>$\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$ |

## ⑦ رسم منحنى $(C_g)$ إنطلاقا من المنحنى $(C_f)$

| إذا كان | فإنّ |
|---|---|
| $g(x) = -f(x)$ | $(C_g)$ يناظر $(C_f)$ بالنسبة إلى محور الفواصل $(xx')$ |
| $g(x) = f(\|x\|)$ | $g$ زوجية، وعندما: $x \geq 0$، يكون $(C_g)$ منطبقا على $(C_f)$ |
| $g(x) = \|f(x)\|$ | $(C_g)$ ينطبق على $(C_f)$ في المجالات التي تكون عليها $f$ موجبة.<br>وَ $(C_g)$ يناظر $(C_f)$ بالنسبة إلى $(xx')$ في المجالات التي تكون عليها $f$ سالبة. |