أسئلة
الدوال الأصلية
و الحساب التكاملي
في البكالوريا
مع حلولها

لشعبة : علوم تجريبية

من 2008 إلى 2019

✍إعداد و تقديم : خالد بخاخشة

أسئلة الدوال الأصلية و التكاملات

التمرين [1] [باك 2008][م1]

g الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

- H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان .

ـ عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0

التمرين[2] [باك 2008][م2]

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$.

- أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان .
- عيّن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق $F(1)=2$.

التمرين [3] [باك 2009][م1]

k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$ ، (C_k) تمثيلها البياني .

- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=\dfrac{1}{2}$ ، $x=-\dfrac{1}{2}$.

التمرين [4] [باك 2009][م2]

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

التمرين [5] [باك 2011][م1]

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ ، و f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

- α عدد حقيقي . بيّن أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.
- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

التمرين [6] [باك 2011][م2]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^x-ex-1$. (C_f) تمثيلها البياني .

- أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ؛ $x=\alpha$. ($\alpha\in]1,75;1,76[$ و يحقق $f(\alpha)=0$)
- أثبت أن : $A(\alpha)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات)

التمرين [7] [باك 2012][م1]

f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

- لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

التمرين [8] [باك 2012][م2]

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^{x}$.

⬅ h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^{x}$

أ ـ عيّن العددين الحقيقين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.
بـ ـ إستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

التمرين [9] [باك 2015][م1]

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

⬅ F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

1) بيّن أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F .

التمرين [10] [باك 2015][م2]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

⬅ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

⬅ إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين [11] [باك 2016][الدورة الأولى][م1]

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

⬅ أ ـ جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

بـ ـ أحسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي $(n>1)$.

جـ ـ عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن: $I_n>2$.

التمرين [12] [باك 2016][الدورة الأولى][م2]

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

⬅ h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ ـ أحسب التكامل التالي: $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ ، حيث λ عدد حقيقي موجب تماما و فسّر النتيجة هندسيا .

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

التمرين [13] [باك 2016] [الدورة الثانية] [م1]

f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

⬅ بيّن أن الدالة $x\mapsto\frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

⬅ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

التمرين [14] [باك 2017] [الدورة العادية] [2م]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

التمرين [15] [باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [2م]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{-x}-2-\frac{e}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

(γ) المنحنى الذي معادلته: $y=e^{-x}-2$.

- ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

أحسب العدد الحقيقي l حيث: $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)$.

التمرين [16] [باك 2018] [1م]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.
- أحسب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتهما: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

التمرين [17] [باك 2018] [2م]

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) .

التمرين [18] [باك 2019] [1م]

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$. (C_f) تمثيلها البياني.

- H الدالة المعرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما.

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة x .

ب- أحسب A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين: $x=3$ و $x=4$.

حلول مقترحة

حل مقترح للتمرين[1]

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

- H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان

ـ تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة: $x\mapsto g(x)-1$.

الدالة H قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ ، و $H'(x)=\alpha e^{-x}+(-e^{-x})(\alpha x+\beta)=(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}$.

H دالة أصلية للدالة: $x\mapsto g(x)-1$ معناه: $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$ و منه نجد: $\alpha=1$ و $\beta=2$.

لدينا: $g(x)=g(x)+1-1=H'(x)+1$ و منه الدالة الأصلية للدالة g من الشكل: $G(x)=H(x)+x+c$

الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0 هي: $G(x)=(x+2)e^{-x}+x+2$.

حل مقترح للتمرين[2]

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$.

- كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+3x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3+1}{(x+1)^2}=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$$

- تعيين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق $F(1)=2$.

الدالة f مستمرة على $]-1;+\infty[$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تحقق $F(1)=2$ هي الدالة F المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt \text{ و منه: } F(x)=\int_1^x\left(t+1+\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{t+1}\right]_1^x=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+1 .$$

حل مقترح للتمرين[3]

- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ ، $x=-\frac{1}{2}$.

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}k(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(x)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}g(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{4}{x+1}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}+4\ln 3\,uv$$

حل مقترح للتمرين[4]

f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1\left[(x-1)-f(x)\right]dx=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

حل مقترح للتمرين[5]

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x+1}$ ، و f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

- تبيان أن الدالة h بحيث $h\left(x\right)=\left(x-\alpha\right)\ln\left(x-\alpha\right)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln\left(x-\alpha\right)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]\alpha;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]\alpha;+\infty[$:

$$h'\left(x\right)=1\times\ln\left(x-\alpha\right)+\frac{1}{x-\alpha}\times\left(x-\alpha\right)-1=\ln\left(x-\alpha\right)$$

- التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x+1-2}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+1}-\dfrac{2}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$.

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1-\dfrac{2}{x+1}+\ln\left(x-1\right)-\ln\left(x+1\right)$

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ من الشكل :

$$F\left(x\right)=x-2\ln\left(x+1\right)+\left[\left(x-1\right)\ln\left(x-1\right)-x\right]-\left[\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)-x\right]=x-\left(x+3\right)\ln\left(x+1\right)+\left(x-1\right)\ln\left(x-1\right)$$

حل مقترح للتمرين[6]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f\left(x\right)=e^{x}-ex-1$. $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني .

- حساب ، بدلالة α ، المساحة $A\left(\alpha\right)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $\left(C_f\right)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$.

$$A\left(\alpha\right)=-\int_0^{\alpha}f\left(x\right)dx=-\int_0^{\alpha}\left(e^{x}-ex-1\right)dx=-\left[e^{x}-\frac{1}{2}ex^{2}-x\right]_0^{\alpha}=1-\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2}e\alpha^{2}-\alpha\right)$$

- إثبات أن : $A\left(\alpha\right)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^{2}-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات)

لدينا : $f\left(\alpha\right)=0$ و منه $e^{\alpha}-e\alpha-1=0$ أي $e^{\alpha}=e\alpha+1$ و بالتالي :

$$A\left(\alpha\right)=-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e\alpha^{2}+\alpha+1=-\left(e\alpha+1\right)+\frac{1}{2}e\alpha^{2}+\alpha+1=\left(\frac{1}{2}e\alpha^{2}-e\alpha+\alpha\right)ua$$

حل مقترح للتمرين[7]

f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f\left(x\right)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

- لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g\left(x\right)=\dfrac{x^{2}}{2}+5x+6x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

تبيان أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0[$:

$$g'\left(x\right)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6x}{x\left(x-1\right)}-\frac{6}{1-x}=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6}{x-1}+\frac{6}{x-1}=f\left(x\right)$$

و منه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

حل مقترح للتمرين[8]

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^{x}$.

h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^{x}$.

أ ـ تعيين العددين الحقيقين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $h'(x)=ae^{x}+(ax+b)e^{x}=(ax+a+b)e^{x}$.

الدالة h أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ يعني: $h'(x)=xe^{x}$، و منه بالمطابقة نجد: $a=1$ و $b=-1$. أي $h(x)=(x-1)e^{x}$.

ب ـ إستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا: $g(x)=1-xe^{x}$ و منه دالة أصلية للدالة g من الشكل: $G(x)=x-(x-1)e^{x}$.

حل مقترح للتمرين[9]

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

تبيان أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ يعني: من أجل كل $x\in]0;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تكافئ $f(x)=0$ تكافئ: $x=1$ أو $x=e^{2}$، و منه منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^{2}.

تبيان أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$:

نضع: $u(x)=x\ln x-x$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$، $u'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\times x-1=\ln x$.

و منه الدالة u هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

إستنتاج عبارة الدالة F :

$$F(x)=\int_{1}^{x}f(t)dt=\int_{1}^{x}\left(\ln t-2-\frac{\ln t}{t}+\frac{2}{t}\right)dt=\left[t\ln t-t-2t-\frac{1}{2}(\ln t)^{2}-2\ln t\right]_{1}^{x}=(2+x)\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^{2}-3x$$

حل مقترح للتمرين[10]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

التحقق: من أجل كل عدد حقيقي x:

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-(4x+4)e^{2x+2}=1-2x-3e^{2x+2}$$

إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

و منه $f(x)=-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}e^{2x+2}$.

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ من الشكل: $F(x)=\frac{1}{2}\left[-f(x)+f'(x)+x-x^{2}-\frac{3}{2}e^{2x+2}\right]+c$

أي: $F(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^{2}+x-1+c$.

حل مقترح للتمرين[11]

الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

أ- إيجاد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على $]0;+\infty[$ من الشكل: $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2$. (لاحظ أن $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ من الشكل $u'\times u$)

بـ- حساب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي $(n>1)$.

$$I_n=\int_1^n[f(x)-(x-1)]dx=\int_1^n\frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n=\frac{1}{2}(\ln n)^2$$

جـ- تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن: $I_n>2$.

$I_n>2$ معناه $(\ln n)^2>4$ أي $\ln n>2$ أو $\ln n<-2$ (مرفوض) و منه $n>e^2$ و عليه: أصغر قيمة لـ n_0 هي $n_0=8$.

حل مقترح للتمرين[12]

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=x+f(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:

H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني: من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x)=h(x)$.

الدالة H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$H'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$$

و منه بالمطابقة نجد: $a=-1$ ، $b=-5$ و $c=-7$ أي $H(x)=(-x^2-5x-7)e^{-x}$.

2) أ- حساب التكامل: $A(\lambda)=\int_0^\lambda h(x)dx$ ، حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

$$A(\lambda)=\int_0^\lambda h(x)dx=[H(x)]_0^\lambda=(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7$$

التفسير الهندسي:

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

بـ- $\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7\right]=7$.

حل مقترح للتمرين[13]

الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

تبيان أن الدالة $x\mapsto\frac{-1}{x+1}[1+\ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

نضع: $h(x)=\frac{-1}{x+1}[1+\ln(x+1)]$ ، الدالة h قابلة للإشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}[1+\ln(x+1)]+\left(\frac{1}{x+1}\right)\times\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

بـ- حساب مساحة الحيّز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]dx=\left[e\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]\right]_0^1=\frac{1+(2e-1)\ln 2}{2}$$

حل مقترح للتمرين[14]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

- التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x:

$$F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-(x^2+2x+2)e^{1-x}=2-x^2e^{1-x}=f(x)$$

- حساب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=(7-2e)u.a$$

حل مقترح للتمرين[15]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{-x}-2-\frac{e}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني. (γ) المنحنى الذي معادلته: $y=e^{-x}-2$.

- n عدد طبيعي و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

$$A(n)=\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left[f(x)-e^{-x}+2\right]dx=\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left(-\frac{e}{x}\right)dx=-e\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left(\frac{1}{x}\right)dx=-e\left[\ln|x|\right]_{-e^{n+1}}^{-e^n}=e$$

حساب العدد الحقيقي l : $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)=2017e$.

حل مقترح للتمرين[16]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- تعيين دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

الدالة $x\mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=\int_1^x te^{-t}dt$.

نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=e^{-t}$ و منه $u'(t)=1$ ، $v(t)=-e^{-t}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x)=\left[-te^{-t}\right]_1^x-\int_1^x -e^{-t}dt=-xe^{-x}+e^{-1}-\int_1^x -e^{-t}dt=-xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1}=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$$

و منه الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$ هي: $F(x)=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$.

- حساب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

$$A=\int_1^3\left((2x+1)-f(x)\right)dx=\int_1^3 xe^{-x}dx=F(3)-F(1)=2e^{-1}-4e^{-3}(u.a)$$

حل مقترح للتمرين[17]

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx=\int_1^n\left(\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx=\left[\ln(1+x\ln x)\right]_1^n=\ln(1+n\ln n)$ (لاحظ أن f من الشكل : $\dfrac{u'}{u}$)

2) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$

لدينا : $I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1}f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_1^n f(x)dx+\int_n^{n+1}f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_n^{n+1}f(x)dx$

و من أجل $n>1$: $\int_n^{n+1}f(x)dx>0$ و بالتالي المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

حل مقترح للتمرين[18]

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$. (C_f) تمثيلها البياني .

1) H الدالة المعرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x\ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما .

أ- تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\dfrac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x)=[t\ln t]_3^x-\int_3^x\frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-3\ln 3-\int_3^x dt=x\ln x-3\ln 3-[t]_3^x$$

و منه $H(x)=x\ln x-3\ln 3-(x-3)$ أي : $H(x)=-x+3+x\ln x-3\ln 3$.

بـ- حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

$$A=\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}+\ln x\right)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+\int_3^4\ln x dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+H(4)=\left[\ln|x-2|\right]_3^4+H(4)$$

و منه $A=\ln 2+4\ln 4-4-3\ln 3+3$ أي : $A=(-1+9\ln 2-3\ln 3)(u.a)$.

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2020