الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان: ....شهادة البكالوريا..............

دورة: ....جوان 2024................

الشعبة: ....علوم تجريبية................

اختبار مادة: الرياضيات.....................

يوم: ....10 جوان 2024................

اللقب: ...قويسم.........................

الاسم: ...براهيم الخليل......................

تاريخ ومكان الميلاد: ......07 ماي 1996 الجلفة....

رقم التسجيل: 39021695

امضاء المترشح (ة):

اسم ولقب وتوقيع الحراس

1. لعور عبد الكريم 2. .... 3. ....

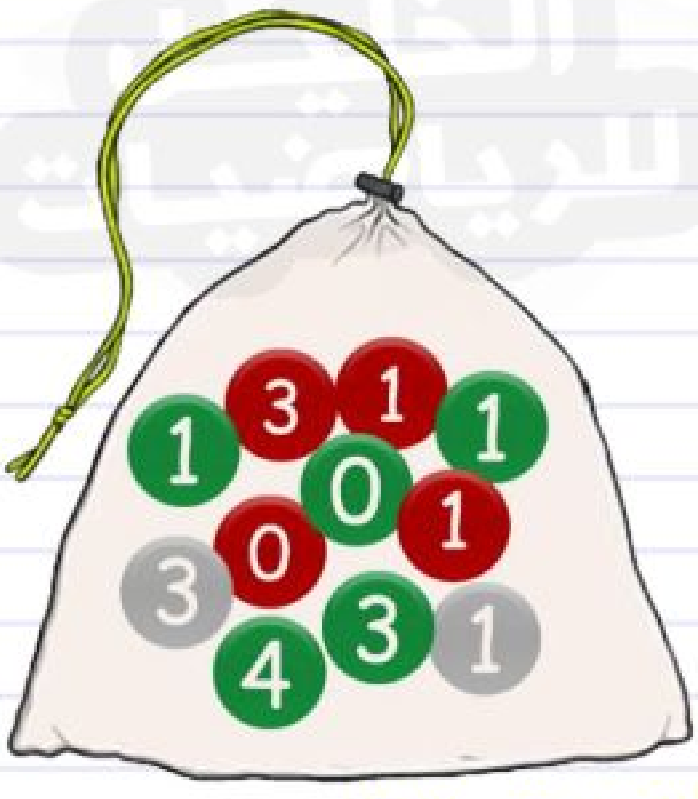
لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة – ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

اختبار مـــادة: ....الرياضيـــــــــــــــــــات....................

﴿الموضوع الأول﴾

◄ التمرين الأول:

ا)



❶ أ/ حساب $P(A)$ وتبيين أنّ $P(B)=\frac{56}{165}$ واستنتاج $P(C)$:

- $P(A)=\dfrac{C_4^3+C_5^3}{C_{11}^3}=\boxed{\dfrac{14}{165}}$
- $P(B)=\dfrac{C_8^3}{C_{11}^3}=\boxed{\dfrac{56}{165}}$
- $P(C)=1-P(B)=\boxed{\dfrac{109}{165}}$

ب/ حساب الاحتمال الشرطي $P_A(B)$:

$$\bullet\ P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{C_3^3+C_3^3}{C_{11}^3}}{\frac{14}{165}}=\frac{2}{14}=\boxed{\frac{1}{7}}$$

❷ أ/ تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثمّ حساب أمله الرياضياتي $E(X)$:

لدينا: $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

حيث:

$$\bullet\ P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{11}^3}=\boxed{\frac{56}{165}}$$

$$\bullet\ P(X=1)=\frac{C_3^1C_8^2}{C_{11}^3}=\boxed{\frac{84}{165}}$$

$$\bullet\ P(X=2)=\frac{C_3^2C_8^1}{C_{11}^3}=\boxed{\frac{24}{165}}$$

$$\bullet\ P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{11}^3}=\boxed{\frac{1}{165}}$$

وعليه:

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{56}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{24}{165}$	$\frac{1}{165}$

ومنه:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP(X=x_i)=\frac{135}{165}=\boxed{\frac{9}{11}}$$

ب/ حساب احتمال الحادثة $(X>1)$:

$$P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{51}{165}=\boxed{\frac{17}{55}}$$

II) حساب احتمال الحادثة D :

$$P(D)=1-\frac{A_9^3}{A_{11}^3}=\frac{486}{990}=\boxed{\frac{27}{55}}$$

◄ التمرين الثاني:

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-1+2\sqrt{3})\left[z^2-2(1-\sqrt{3})z+5-2\sqrt{3}\right]=0$:

لدينا: $(z-1+2\sqrt{3})\left[z^2-2(1-\sqrt{3})z+5-2\sqrt{3}\right]=0$

تكافئ:

$$\begin{cases} z-1+2\sqrt{3}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (*) \\ \text{أو} \\ z^2-2(1-\sqrt{3})z+5-2\sqrt{3}=0\ \ldots\ (**) \end{cases}$$

- حل $(*)$:

لدينا: $z-1+2\sqrt{3}=0$

معناه: $z=1-2\sqrt{3}$

- حل $(**)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}\Delta&=\left[-2(1-\sqrt{3})\right]^2-4(1)(5-2\sqrt{3})\\&=-4\\&=(2i)^2\end{aligned}$$

ومنه للمعادلة $(**)$ حلان مترافقان في $\mathbb{C}$ هما:

$$z=\frac{2(1-\sqrt{3})+2i}{2}=1-\sqrt{3}+i \quad \text{أو} \quad z=1-\sqrt{3}-i$$

إذن:

$$\boxed{S=\{1-2\sqrt{3}\ ;\ 1-\sqrt{3}+i\ ;\ 1-\sqrt{3}-i\}}$$

II)

❶ كتابة كلا من z_A-1 ، z_C-1 و z_B على الشكل المثلثي:

$$\begin{aligned}\bullet\ z_A-1&=1-\sqrt{3}+i-1\\&=-\sqrt{3}+i\\&=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\\&=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\&=2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\&=\boxed{2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet\ z_C-1&=\overline{z_A}-1\\&=\overline{z_A-1}\\&=\boxed{2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet\ z_B&=1-2\sqrt{3}\\&=\left|1-2\sqrt{3}\right|(\cos\pi+i\sin\pi)\\&=\boxed{(2\sqrt{3}-1)(\cos\pi+i\sin\pi)}\end{aligned}$$

❷ ايجاد لاحقة النقطة D :

$$\begin{aligned}z_D&=\frac{z_A-z_B+z_C}{1-1+1}\\&=z_A-z_B+\overline{z_A}\\&=2\mathrm{Re}(z_A)-z_B\\&=2(1-\sqrt{3})-1+2\sqrt{3}\\&=\boxed{1}\end{aligned}$$

❸ تبيين أنّ الرباعي $ABCD$ معيّن:

لدينا:

$$\begin{aligned}\bullet\ z_{\overrightarrow{AB}}&=z_B-z_A\\&=1-2\sqrt{3}-1+\sqrt{3}-i\\&=-\sqrt{3}-i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet\ z_{\overrightarrow{DC}}&=z_C-z_D\\&=1-\sqrt{3}-i-1\\&=-\sqrt{3}-i\end{aligned}$$

ومنه: $\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}}$ ... $(*)$

ولدينا:

$$\begin{aligned}\bullet\ AB&=|z_B-z_A|\\&=\left|-\sqrt{3}-i\right|\\&=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet\ AC&=|z_C-z_A|\\&=|z_C-\overline{z_C}|\end{aligned}$$

$$= |2\mathrm{Im}(z_C)|$$
$$= 2$$

ومنه: $\boxed{AB = AC}$ ... $(**)$

من $(*)$و $(**)$ نجد أنّ $ABCD$ معيّن

◄ التمرين الثالث:

❶ حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 :

$$\bullet\ u_1 = \frac{4 - u_0}{2 + u_0} = \frac{4 - 0}{2 + 0} = \boxed{2}$$
$$\bullet\ u_2 = \frac{4 - u_1}{2 + u_1} = \frac{4 - 2}{2 + 2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$
$$\bullet\ u_3 = \frac{4 - u_2}{2 + u_2} = \frac{4 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \boxed{\frac{7}{5}}$$

- برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_n \le 2$:

- نضع: $P(n): 0 \le u_n \le 2$
- لدينا: $u_0 = 0$ ومنه: $0 \le u_0 \le 2$ إذن $P(0)$ صحيحة
- ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نفرض صحة $P(n)$ و نثبت صحة $P(n+1)$
- لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{4 - u_n}{2 + u_n} = -\left(\frac{u_n - 4}{2 + u_n}\right) = -\left(\frac{u_n - 4 + 2 - 2}{2 + u_n}\right) = -\left(1 - \frac{6}{2 + u_n}\right) = \frac{6}{2 + u_n} - 1$$

ولدينا: $0 \le u_n \le 2$

ومنه: $2 \le 2 + u_n \le 4$

ومنه : $\frac{1}{4} \le \frac{1}{2 + u_n} \le \frac{1}{2}$

ومنه : $\frac{3}{2} \le \frac{6}{2 + u_n} \le 3$

ومنه : $0 \le \frac{1}{2} \le \frac{6}{2 + u_n} - 1 \le 2$

ومنه: $0 \le u_{n+1} \le 2$

إذن $P(n+1)$ صحيحة

- حسب البرهان بالتراجع فانه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 \le u_n \le 2$

❷

أ/ تبيين أنّ (v_n) هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 4} \\ &= \frac{\frac{4 - u_n}{2 + u_n} - 1}{\frac{4 - u_n}{2 + u_n} + 4} \\ &= \frac{2 - 2u_n}{12 + 3u_n} \\ &= -\frac{2}{3}\frac{u_n - 1}{4 + u_n} \\ &= -\frac{2}{3}\, v_n \end{aligned}$$

ومنه: (v_n) هندسية أساسها $\left(-\frac{2}{3}\right)$ وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 4} = -\frac{1}{4}$$

- كتابة عبارة v_n بدلالة n

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$v_n = v_0 q^n = \boxed{-\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

❸ تبيين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{5}{1-v_n} - 4$

لدينا : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 4} = 1 - \dfrac{5}{u_n + 4}$

ومنه : $\dfrac{5}{u_n + 4} = 1 - v_n$

ومنه : $\dfrac{u_n + 4}{5} = \dfrac{1}{1 - v_n}$

ومنه : $u_n + 4 = \dfrac{5}{1 - v_n}$

ومنه : $\boxed{u_n = \dfrac{5}{1 - v_n} - 4}$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا : $u_n = \dfrac{5}{1 - v_n} - 4$

ومنه : $u_n = \dfrac{5}{1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^n} - 4$

وعليه:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{5}{1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^n} - 4\right]\\ &= \frac{5}{1+0} - 4\\ &= \boxed{1}\end{aligned}$$

لأنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$

كون : $-1 < -\frac{2}{3} < 1$

❹ حساب S_n بدلالة n

$$\begin{aligned}S_n &= v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2024}\\ &= v_n\left[\frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+2024-n+1}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)}\right]\\ &= -\frac{3}{20}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{2025}\right]\\ &= \boxed{-\frac{3}{20}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2025} + 1\right]}\end{aligned}$$

- استنتاج T_n بدلالة n:

لدينا : $v_n = 1 - \dfrac{5}{u_n + 4}$

ومنه : $\dfrac{1}{u_n + 4} = \dfrac{1}{5}(1 - v_n)$

وعليه:

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{4+u_n} + \frac{1}{4+u_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{4+u_{n+2024}} \\
&= \frac{1}{5}(1-v_n) + \frac{1}{5}(1-v_{n+1}) + \cdots + \frac{1}{5}(1-v_{n+2024}) \\
&= \frac{1}{5}[1(2025) - (v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2024})] \\
&= \frac{1}{5}[2025 - S_n] \\
&= 405 - \frac{1}{5}S_n \\
&= \boxed{405 + \frac{3}{100}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2025} + 1\right]}
\end{aligned}$$

◄ التمرين الرابع: ﴿07.00﴾

I) حساب $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$:

$$g(1) = 1e^{-1+1} - 2 = \boxed{-1}$$

لدينا: $g(1) < 0$ قيمة حدية كبرى للدالة g

ومنه: $g(x) \leq -1$

إذن: $\boxed{g(x) < 0}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

II)

❶ أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}[-2x + 3 - xe^{-x+1}] = \lim_{x\to-\infty}[-2x - xe^{-x}] = \lim_{x\to-\infty}\left[-2x - \frac{x}{e^x}\right] = \boxed{+\infty}$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[-2x + 3 - xe^{-x+1}] = \lim_{x\to+\infty}[-2x - xe^{-x}] = \lim_{x\to+\infty}\left[-2x - \frac{x}{e^x}\right] = \boxed{-\infty}$$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

ب/ تبيين أنّ (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-2x+3)] &= \lim_{x\to+\infty}[-xe^{-x+1}] \\
&= \lim_{x\to+\infty}[-xe^{-x}] \\
&= \lim_{t\to-\infty}[te^t]
\end{aligned}$$

$$= \boxed{0}$$

لأنّ : $\lim_{t\to-\infty} te^t = 0$

ومنه $(\Delta): y = -2x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

من أجل كل x حقيقي، لدينا:

$$f(x) - (-2x + 3) = -xe^{-x+1}$$

لدينا: $e^{-x+1} > 0$ إذن إشارة $(-xe^{-x+1})$ من إشارة $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (-2x + 3)$	$+$	0	$-$

- (C_f) فوق (Δ) لما $x < 0$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x > 0$
- (C_f) يقطع (Δ) في $A(0; 3)$

❷ أ/ تبيين أنه: من اجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x) - e^{-x+1}$:

لدينا f قابلة للاشتقاق $\mathbb{R}$ حيث:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 - e^{-x+1} + xe^{-x+1} \\ &= -2 + xe^{-x+1} - e^{-x+1} \\ &= \boxed{g(x) - e^{-x+1}} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $f'(x) = g(x) - e^{-x+1}$

بما أنّ $\begin{cases} g(x) < 0 \\ -e^{-x+1} < 0 \end{cases}$

فإنّ: $g(x) - e^{-x+1} < 0$

إذن: $\boxed{f'(x) < 0}$

وعليه f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

- وجدول تغيراتها كما يلي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

❸ تبيين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) :

(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) معناه يوجد عدد حقيقي a يحقق: $f'(a) = -2$

لدينا: $f'(a) = -2$

معناه: $-2 + ae^{-a+1} - e^{-a+1} = -2$

ومنه: $ae^{-a+1} - e^{-a+1} = 0$

ومنه: $(a - 1)e^{-a+1} = 0$

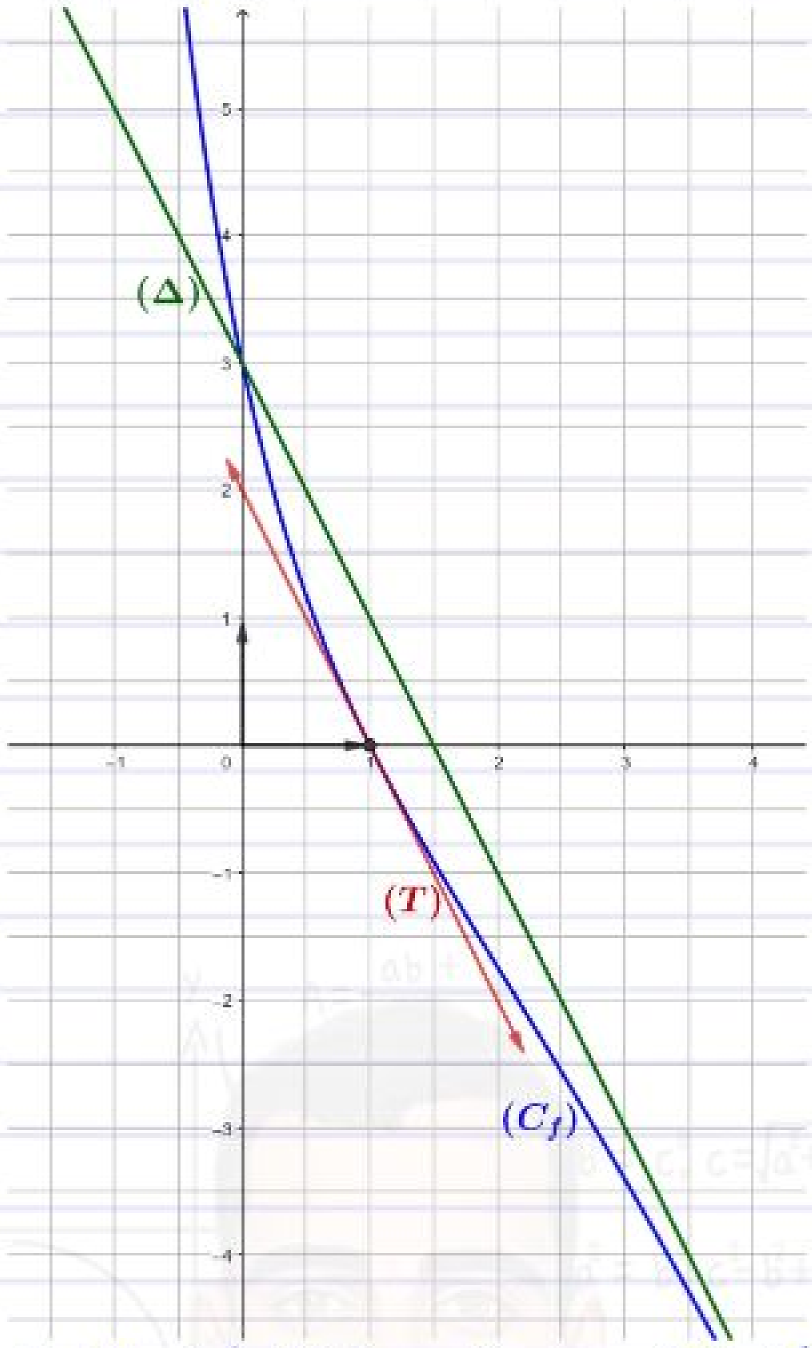
ومنه: $a - 1 = 0$ لأنّ: $e^{-x+1} > 0$

ومنه: $\boxed{a = 1}$

- إذن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $a = 1$ معادلته:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= -2(x - 1) + 0 \\ &= \boxed{-2x + 2} \end{aligned}$$

❹ أ/ رسم (Δ)، (T) و (C_f):



ب/ تعيين بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل $f(x) = -2x + m$ حلّين مختلفين:

حلول المعادلة $f(x) = -2x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = -2x + m$

ونجد أنه لما $\boxed{2 < m < 3}$ المعادلة تقبل حلان مختلفين

❺ أ/ تبيين أنّ: $\int_0^1 xe^{-x+1}dx = e - 2$:

نضع: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = -(-e^{-x+1}) \end{cases}$ فنجد: $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x+1} \end{cases}$

وعليه:

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{-x+1}dx &= [-xe^{-x+1}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x+1}dx \\ &= [-xe^{-x+1}]_0^1 - [e^{-x+1}]_0^1 \\ &= [-(x+1)e^{-x+1}]_0^1 \\ &= -2d \\ &= \boxed{e-2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج $\mathcal{A}$:

لما $x \in [0;1]$، نجد: $f(x) \leq -2x + 3$ وعليه:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 xe^{-x+1}dx \\ &= \int_0^1 xe^{-x+1}dx \\ &= (e-2)u.a \\ &= (e-2) \times 2 \times 2cm^2 \\ &= \boxed{4(e-2)}cm^2 \end{aligned}$$

تابعوني على فيسبوك واليوتيوب

#الخليل للرياضيات

﴿لا تنسونا من صالح دعائكم﴾

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان: ....شهادة البكالوريا..............

اللقب: ...قويسم..............................

دورة: ....جوان 2024..............

الاسم: ...براهيم الخليل..............................

الشعبة: ....علوم تجريبية..............

تاريخ ومكان الميلاد: ......07 ماي 1996 الجلفة....

اختبار مادة: الرياضيات.................

رقم التسجيل: 39021695

يوم: ....10 جوان 2024..............

امضاء المترشح (ة):

اسم ولقب وتوقيع الحراس

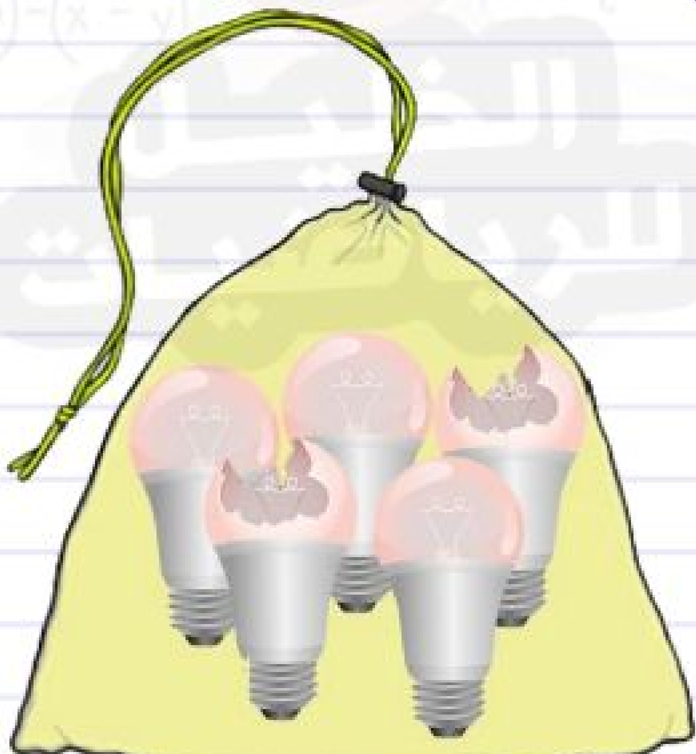
1. لعور عبد الكريم .... 2. .... 3. ....

لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة – ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

اختبار مـــادة: ....الرياضيـــــــــــــــــات...................

الموضوع الثاني

التمرين الأول: 04 نقاط



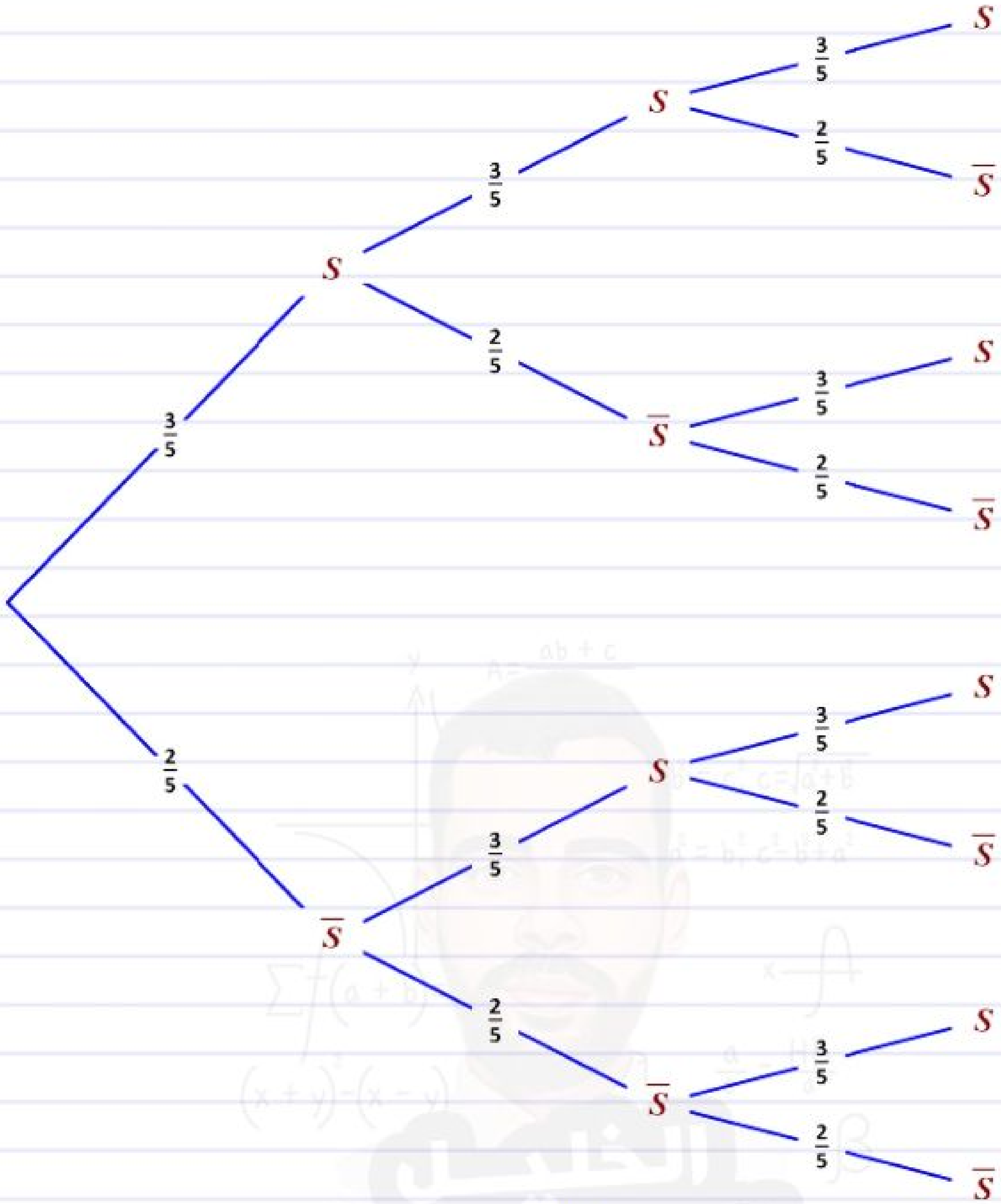
1. تشكيل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة:

لدينا:

$$P(S) = \frac{3}{5}$$

$$P(\overline{S}) = \frac{2}{5}$$

وعليه:



❷ حساب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمال الحادثتين A و B، وتبيين أن $P(C)=\frac{3}{5}$:

- $P(A)=P(S)=\boxed{\frac{3}{5}}$
- $P(B)=P(S\cap\overline{S}\cap\overline{S})+P(\overline{S}\cap S\cap\overline{S})+P(\overline{S}\cap\overline{S}\cap S)=\left(\frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\frac{2}{5}\frac{3}{5}\right)=\boxed{\frac{36}{125}}$
- $P(C)=P(S\cap S\cap S)+P(S\cap\overline{S}\cap S)+P(\overline{S}\cap S\cap S)+P(\overline{S}\cap\overline{S}\cap S)=\frac{75}{125}=\boxed{\frac{3}{5}}$

❸ حساب الاحتمال الشرطي $P_C(A)$:

$$P_C(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{P(S\cap S\cap S)+P(S\cap\overline{S}\cap S)}{\frac{3}{5}}=\frac{\left(\frac{3}{5}\frac{3}{5}\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{3}{5}\right)}{\frac{3}{5}}=\frac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{5}}=\boxed{\frac{3}{5}}$$

- تبيين إذا الحدثان A و C مستقلان ام لا:

لدينا : $\begin{cases} P(A)\times P(C)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\boxed{\frac{9}{25}} \\ P(A\cap C)=\boxed{\frac{9}{25}} \end{cases}$

ومنه الحدثان A و C مستقلان

❹ أ/ تبرير أنّ قيم المتغير العشوائي X هي $\{30; 10; -10; -30\}$:

- عندما نسحب 3 قطع سليمة نجد: $X = 30$
- عندما نسحب قطعتان سليمتان وقطعة غير سليمة نجد: $X = 10$
- عندما نسحب قطعة سليمة وقطعتان غير سليمتان نجد: $X = -10$
- عندما نسحب 3 قطع غير سليمة نجد: $X = -30$

وعليه: $X(\Omega) = \{30; 10; -10; -30\}$

ب/ تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$:

- $P(X = -20) = P(\overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S}) = \boxed{\dfrac{8}{125}}$
- $P(X = -10) = P(S \cap \overline{S} \cap \overline{S}) + P(\overline{S} \cap S \cap \overline{S}) + P(\overline{S} \cap \overline{S} \cap S) = \boxed{\dfrac{36}{125}}$
- $P(X = 10) = P(S \cap S \cap \overline{S}) + P(S \cap \overline{S} \cap S) + P(\overline{S} \cap S \cap S) = \boxed{\dfrac{54}{125}}$
- $P(X = 30) = P(S \cap S \cap S) = \boxed{\dfrac{27}{125}}$

وعليه:

$X = x_i$	-30	-10	10	30
$P(X = x_i)$	$\dfrac{8}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{27}{125}$

ومنه:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = \frac{750}{125} = \boxed{6}$$

◀ التمرين الثاني: (04.00)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير

❶ الاقتراح الصحيح هو: أ/ $\overline{z} - i$

$$\begin{aligned}\overline{z + i} &= \overline{z} + \overline{i}\\ &= \boxed{\overline{z} - i}\end{aligned}$$

❷ الاقتراح الصحيح هو: أ/ 1

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2024} &= \left(\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\right)^{2024}\\ &= (i)^{2024}\\ &= (i^2)^{1012}\\ &= (-1)^{1012}\\ &= \boxed{1}\end{aligned}$$

❸ الاقتراح الصحيح هو: ب/ $S_n = n(n+1)\ln 2$

لدينا: $|z| = \left|2(1 + i\sqrt{2})\right| = 4$

وعليه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا

$$\begin{aligned}S_n &= \ln|z| + \ln|z|^2 + \cdots + \ln|z|^n\\ &= \ln 4 + \ln 4^2 + \cdots + \ln 4^n\\ &= \ln(4 \times 4^2 \times \ldots \times 4^n)\\ &= \ln 4^{1+2+\cdots+n}\\ &= (1 + 2 + \cdots + n)\ln 4\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\ln 2^2\end{aligned}$$

$$= 2\frac{n(n+1)}{2}\ln 2$$
$$= \boxed{n(n+1)\ln 2}$$

❹ الاقتراح الصحيح هو: $\boxed{\text{ج/ } z = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}}$

$$z = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$
$$= \boxed{\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}}$$

◀ التمرين الثالث: (05.00)

❶ تشكيل جدول تغيرات الدالة f، واستنتاج أنه من اجل كل x من $]2;+\infty[$ فإنّ: $\frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{3}{4}$

لدينا:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x}\right) = \frac{1}{2}$
- $f(2) = \frac{2+1}{2\times 2} = \frac{3}{4}$

ولدينا f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ حيث:

$$f'(x) = \frac{2x - 2(x+1)}{4x^2} = \frac{-2}{4x^2} < 0$$

إذن f متناقصة تماما على $]2;+\infty[$

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{4}$ ↘	$\frac{1}{2}$

من جدول التغيرات نجد أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$ فإنّ: $\boxed{\frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{3}{4}}$

❷ أ/ تبيين أنه: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $n \geq 2$ فإنّ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $n \geq 2$، لدينا:

$$u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{3}{4}\left(\frac{n}{2^n}\right)$$
$$= \frac{2}{2}\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{2n + 2 - 3n}{2^{n+2}}$$
$$= \frac{2-n}{2^{n+2}}$$

لدينا: $2^{n+2} > 0$

ولدينا: $n \geq 2$ ومنه: $0 \geq 2 - n$

وعليه : $\frac{2-n}{2^{n+2}} \leq 0$

أي : $u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n \leq 0$

أي : $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$

أي : $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{3}{4}}$

ب/ اثبات أنه: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $n \ge 2$ فإنّ $u_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $n \ge 2$

لدينا : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{3}{4}$

ومنه : $u_{n+1} \le \dfrac{3}{4} u_n$

وعليه:

$$\begin{cases} u_3 \le \dfrac{3}{4} u_2 \\ u_4 \le \dfrac{3}{4} u_3 \\ \vdots \\ u_n \le \dfrac{3}{4} u_{n-1} \end{cases}$$

بضرب المتراجحات طرفا لطرف:

نجد : $u_n \le \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1-2+1} u_2$

ومنه : $\boxed{u_n \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}}$

- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا : $\dfrac{n}{2^n} > 0$

ومنه : $u_n > 0 \ge 0$

لدينا : $\begin{cases} 0 \le u_n \\ u_n \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2} \end{cases}$

ومنه : $0 \le u_n \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$

ومنه : $0 \le \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}\right]$

ومنه : $0 \le \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le 0$

ومنه : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

ج/ تبيين أنّ $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $n \ge 2$، لدينا:

$$\frac{u_n}{n} = \frac{\frac{n}{2^n}}{n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

وعليه:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \cdots + \frac{u_n}{n} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}$$

- تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = \frac{511}{1024}$:

لدينا : $S_n = \frac{511}{1024}$

معناه : $\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{511}{1024}$

ومنه : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{515}$

ومنه : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^9}$

ومنه : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{9}$

ومنه : $n-1=9$

إذن: $\boxed{n=10}$

التمرين الرابع: (07.00)

I) تعيين إشارة $g(x)$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$

II)

❶ أ/ حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x-\frac{\ln x}{x^2}\right)$$
$$= \boxed{-\infty}$$

لأنّ : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = 0$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(-x-\frac{\ln x}{x^2}\right)$$
$$= \boxed{+\infty}$$

لأنّ: $\lim_{\substack{x\to0\\>}}(\ln x) = -\infty$

أ/ تبيين أنه: من أجل كل x مِن $]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x) = \frac{-2g(x)}{x^3}$:

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، حيث:

$$f'(x) = -1-\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}$$
$$= -1-\frac{1-2\ln x}{x^3}$$
$$= \frac{-x^3-1+2\ln x}{x^3}$$
$$= -2\frac{\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}\ln x}{x^3}$$
$$= \boxed{-\frac{2g(x)}{x^3}}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x) = -\frac{2g(x)}{x^3}$$

لدينا: $x^3 > 0$ على المجال $]0;+\infty[$

ومنه: إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$g(x)$	$+$
$f'(x)$	$-$

إذن f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

- وجدول تغيراتها كما يلي:

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

ج/ اثبات أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.7 < \alpha < 0.71$:

لدينا: f مستمرة ومتناقصة تماما على $]0;+\infty[$

ولدينا: $\begin{cases} f(0.7) \approx 0.03 > 0 \\ f(0.71) \approx -0.03 < 0 \end{cases}$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.7 < \alpha < 0.71$

❷ أ/ تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) :

لدينا:

$$\begin{cases} f(x) = -x + h(x) \\ h(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0 \end{cases}$$

ومنه $(\Delta): y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

من أجل كل x حقيقي، لدينا:

$$f(x) - (-x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$ إذن إشارة $\big(f(x) - (-x)\big)$ من إشارة $(-\ln x)$

لدينا: $-\ln x = 0$ معناه: $x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - (-x)$	$+$	0	$-$

- (C_f) فوق (Δ) لما $0 < x < 1$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x > 1$
- (C_f) يقطع (Δ) في $A(1;-1)$

❸ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -1 :

(C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -1 معناه يوجد عدد حقيقي a يحقق: $f'(a) = -1$

لدينا: $f'(a) = -1$

ومنه : $-1 - \dfrac{1 - 2\ln a}{a^3} = -1$

ومنه : $-\dfrac{1 - 2\ln a}{a^3} = 0$

ومنه: $1 - 2\ln a = 0$

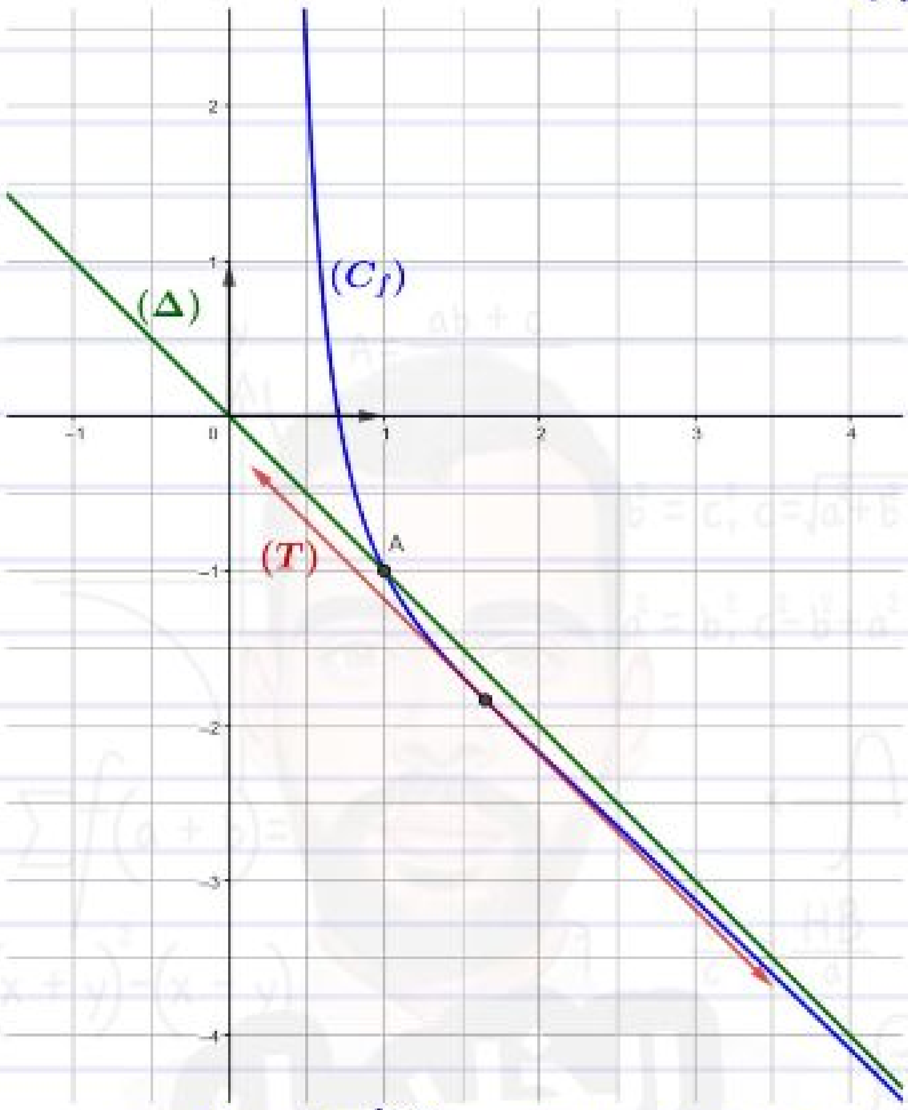
ومنه : $\ln a = \dfrac{1}{2}$

ومنه : $\boxed{a = e^{\frac{1}{2}}}$

- إذن $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -1 عند النقطة ذات الفاصلة $a = e^{\frac{1}{2}}$ معادلته:

$$\begin{aligned}(T): y &= f'\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\left(x - e^{\frac{1}{2}}\right) + f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= -\left(x - e^{\frac{1}{2}}\right) - e^{\frac{1}{2}} - \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2}\\ &= \boxed{-x - \frac{1}{2e}}\end{aligned}$$

❹ أ/ رسم كلا من (Δ) ، (T) و $\left(C_f\right)$:



ب/ تعيين بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة $\frac{\ln x}{x^2} = m$ حلّين مختلفين:

لدينا : $\frac{\ln x}{x^2} = m$

تكافئ : $-\frac{\ln x}{x^2} = -m$

تكافئ : $-x - \frac{\ln x}{x^2} = -x - m$

تكافئ : $f(x) = -x - m$

ومنه: حلول المعادلة $\frac{\ln x}{x^2} = m$ هي فواصل نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y = -x - m$، وهي:

ونجد أنه لما $-\frac{1}{2e} < -m < 0$ أي لما: $\boxed{0 < m < \frac{1}{2e}}$ للمعادلة حلين مختلفين

❺ أ/ اثبات أنّ الدالة $H: x \mapsto \frac{-1-\ln x}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على $]0; +\infty[$:

لدينا: H قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث:

$$\begin{aligned}H'(x) &= \frac{-\frac{1}{x}x - (-1 - \ln x)}{x^2}\\ &= \frac{-1 + 1 + \ln x}{x^2}\\ &= \boxed{h(x)}\end{aligned}$$

ب/ تبيين أنّ $\mathcal{A}(\alpha)=4\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}+1\right)$

لما: $\alpha<x<1$ نجد أنّ $\left(C_f\right)$ فوق (Δ) ، وعليه:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha)&=\int_{\alpha}^{1}[f(x)-(-x)]\,dx\\&=-\int_{\alpha}^{1}\left[\frac{\ln x}{x^2}\right]dx\\&=-\left[\frac{-1-\ln x}{x}\right]_{\alpha}^{1}\\&=\left[\frac{1+\ln x}{x}\right]_{\alpha}^{1}\\&=1-\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}\\&=\left(\frac{\alpha-1-\ln\alpha}{\alpha}\right)u.a\\&=\frac{4}{\alpha}(\alpha-1-\ln\alpha)cm^2\end{aligned}$$

لدينا : $f(\alpha)=0$

ومنه : $-\alpha-\frac{\ln\alpha}{\alpha}=0$

ومنه : $\frac{\ln\alpha}{\alpha}=-\alpha$

ومنه : $\ln\alpha=-\alpha^2$

وعليه:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha)&=\frac{4}{\alpha}(\alpha-1-\ln\alpha)\\&=\frac{4}{\alpha}(\alpha-1--\alpha^2)\\&=\boxed{4\left(1-\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)}\end{aligned}$$

تابعوني على فيسبوك واليوتيوب

#الخليل_للرياضيات

﴿لا تنسونا من صالح دعائكم﴾