الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي **دورة: 2023**

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات **المدة: 04 سا و30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس، منها كريتان حمراوان مرقمتان بـ: 2 ، -3

وخمس كريات بيضاء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، -2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 2

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس ونعتبر الحوادث A ، B ، C الآتية:

A " الحصول على 3 كريات من نفس اللون " ، B " الحصول على الألوان الثلاثة "

C " الحصول على 3 كريات مجموع أرقامها معدوم "

1) أ) احسب $P(A)$ و $P(B)$ ثمّ بيّن أنّ: $P(C)=\dfrac{3}{20}$

ب) احسب $P(A\cap C)$ ثم استنتج $P_C(A)$

2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكلّ عملية سحب لثلاث كريات عدد الألوان المتحصّل عليها.

عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

3) نسحب الآن عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي وبإرجاع.

احسب احتمال الحصول على ثلاث كريات جُداء أرقامها معدوم.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) f الدّالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x+4}{x+1}$

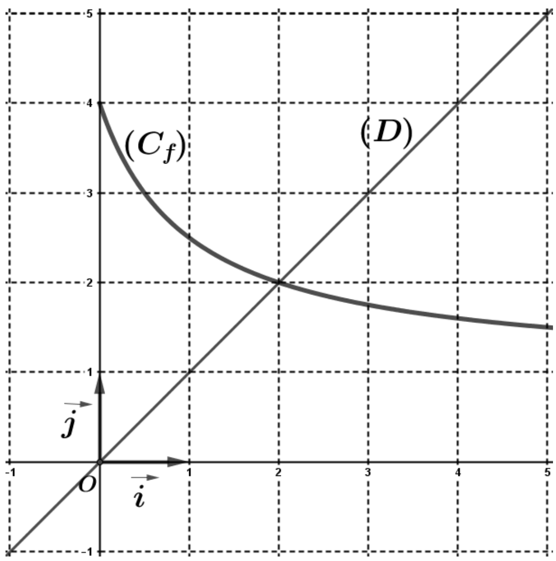
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ:

$u_0=0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

(دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل)



ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+2}$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\dfrac{1}{3}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=-2+\dfrac{4}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=\dfrac{1}{u_0+2}+\dfrac{1}{u_1+2}+\cdots+\dfrac{1}{u_n+2}$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n=\dfrac{1}{16}\left[4n+7+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ... $16x+361y=818$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ) تحقّق أنّ الثنائية $(6;2)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلولها.

ب) عيّن كلّ الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقّق: $|x+23y|\le 4$

2) P عدد طبيعي يُكتب $\overline{5\alpha\beta0}$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 ويُكتب $\overline{\beta\alpha87}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث α و β عددان طبيعيان.

عيّن α و β ثمّ اكتب P في النظام العشري.

3) أ) حلّل العدد 2023 إلى جُداء عوامل أوّلية ثمّ عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كلّ منها يقسم 2023

ب) نضع: $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

عيّن كلّ الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقّق: $m^2+3d^2=2023$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(6x-3)e^{-2x}$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}2<\alpha<0{,}3$

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+1-3xe^{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

جـ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(-x)$

ب) استنتج أنّ f متزايدة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[-\alpha;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) أثبت أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ب) ارسم (Δ)، (T) و (C_f) على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ (نأخذ : $f(0,25)\simeq 0$ ، $f(-1,3)\simeq 0$ و $f(-\alpha)\simeq 1,2$)

جـ) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين بالضبط.

4) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب العدد الحقيقي $\int_{-\alpha}^{0} xe^{2x}dx$

ب) استنتج بالسنتيمتر المربّع المساحة $\mathcal{A}$ للحيّز المستوي المحدّد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها

$y=x+1$ ، $x=-\alpha$ و $x=0$

جـ) تحقّق أنّ $\mathcal{A}=2\left(\frac{4\alpha-1}{2\alpha-1}\right)cm^2$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع على صفحتين (02) (من الصفحة 4 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U على كريتين حمراوين وكريتين خضراوين، ويحتوي صندوق V على كريتين حمراوين وثلاث كريات خضراء (كل الكريات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من أحد الصندوقين بالكيفية الآتية:

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس به 10 بطاقات متماثلة ومرقمة من 1 إلى 10

إذا تحصلنا على عدد أوّلي نسحب الكريتين من U وفي باقي الحالات نسحب الكريتين من V

1) نعتبر الحوادث A ، B و C الآتية:

A " سحب كريتين حمراوين " ، B " سحب كريتين خضراوين " و C " سحب كريتين من لونين مختلفين "

أ) أنجز شجرة الاحتمالات التي تُنمذج هذه التجربة.

ب) بيّن أنّ $P(A)=\frac{19}{150}$ و $P(B)=\frac{37}{150}$ ثمّ استنتج $P(C)$

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المتحصل عليها.

أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

ب) احسب احتمال الحدث: " $\ln X \leq 1$ "

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(\overline{z}-1+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B و C

التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث: $z_A=\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$

أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل المثلثي.

ب) استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

3) نضع: $K=\frac{z_C}{2z_A}$

أ) احسب طويلة العدد المركب K وعمدة له ثمّ اكتبه على الشكل الجبري.

ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

4) n عدد طبيعي، نضع: $L_n={z_A}^n+{z_B}^n$

بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، العدد المركب L_n حقيقي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1945^{2023} على 11

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق الجملة : $\begin{cases} n \equiv 2023[5] \\ 3n+9^n \equiv 1444[11] \end{cases}$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=\frac{3}{2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=9u_n-16n+6$

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=4u_n-8n+2$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 9 يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=2\times 9^n+2n-\frac{1}{2}$

3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n=\frac{1}{4}\left(9^{n+1}+4n^2+2n-3\right)$

4) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $4T_{5n}-n^2+n+5\equiv 0[11]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدّالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x-3)\ln x+x$

1) أ) احسب من أجل كلّ x من المجال $]0\,;+\infty[$: $g'(x)$ و $g''(x)$

ب) بيّن أنّ الدّالة g' متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}3<\alpha<1{,}4$

ب) علما أنّ $g(\alpha)\simeq 0{,}85$ ، استنتج أنّه: من أجل كلّ x من $]0\,;+\infty[$ ، $g(x)>0$

II) f الدّالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\ln x\right)\ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0\,;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

3) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي 1 ، يُطلب تعيين معادلة لكل منهما.

4) أ) ارسم (T) ، (T') و (C_f) (نأخذ : $f(6)\simeq 5{,}9$)

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ ثلاثة حلول بالضبط.

5) F الدّالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $F(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\ln x-\frac{3}{2}x(\ln x)^2-\frac{1}{4}x^2-3x$

أ) تحقّق أنّ F أصلية للدّالة f على المجال $]0\,;+\infty[$

ب) استنتج بالسنتيمتر المربّع مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=1$ و $x=e$

انتهى الموضوع الثاني