



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

دورة: 2023

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 5 كريات تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2، 3 ويحتوي صندوق U_2 على 4 كريات تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2 (كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس).
نختار عشوائيا أحد الصندوقين ونسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد.

1) نعتبر الحوادث: A " سحب كريتين تحملان رقمين فرديين " ، B " سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين " C " سحب كريتين إحداهما تحمل رقما فرديا والأخرى تحمل رقما زوجيا " (أ) أنجز الشجرة التي تُنمذج هذه التجربة.

(ب) بيّن أنّ $P(A) = \frac{23}{60}$ و $P(B) = \frac{1}{12}$ ثمّ احسب $P(C)$

2) نفرغ محتوى الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق جديد U_3 ثمّ نسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد.
 X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين جُداء الرقمين المسجلين عليهما.

(أ) برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{1; 2; 3; 4; 6\}$

(ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) حلّ المعادلة التفاضلية $y' = 2y + 6$ الذي يحقّق $y(\ln 2) = 25$ هو الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = 7e^{2x} - 3$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(e^x - 1)] = +\infty$

3) القيمة المتوسطة للدالة $x \mapsto x(x^2 + 1)^2$ على المجال $[0; 2]$ هي 31

4) (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \int_n^{n+1} e^{-x+3} dx$

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_0 + v_1 + \dots + v_n = e^3 - e^{-n+2}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = -1 + \frac{2}{2 - u_n}$

1) (أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$



(ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

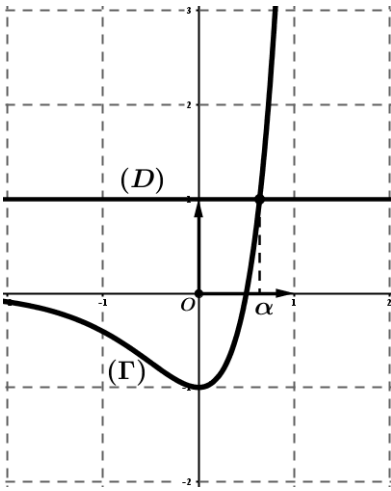
(2) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$

(أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

(ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{2^n + 1}$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

احسب S_n بدلالة n ثم بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $T_n = 2^{n+1} + n$



التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) (Γ) التمثيل البياني للدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $x \mapsto (2x-1)e^{2x}$

و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ ، α هي فاصلة نقطة

تقاطع (Γ) و (D) (لاحظ الشكل المقابل)

(1) بقراءة بيانية ، حدّد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D)

(2) $g(x) = (2x-1)e^{2x} - 1$ الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ:

استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ ثم تحقق أنّ: $0,6 < \alpha < 0,7$

(II) $f(x) = (x-1)(e^{2x} - 1)$ الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ:

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) (أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

(ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

(3) (أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$

(ب) استنتج أنّ f متناقصة تماما على $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة تماما على $[\alpha; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(ج) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له.

(4) (أ) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

(ب) ارسم (Δ) ، (T) و (C_f) (نأخذ : $f(1,4) = 6,2$ و $f(\alpha) = -0,9$)

(ج) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + m$

(5) (أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)e^{2x} dx = \frac{3-2e}{4}$

(ب) استنتج، بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها:

$$y = -x + 1 \text{ و } x = \frac{1}{2}, x = 0$$



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس، موزعة كما يلي: 3 كريات بيضاء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 3 كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 2، 2، 2، 4 كريات خضراء مرقمة بـ: 1، 2، 2، 2، نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس ونعتبر الحوادث A ، B ، C الآتية:
" A الحصول على كرتين من نفس اللون " ، " B الحصول على كرية خضراء على الأقل " " C الحصول على كرتين تحملان رقمين زوجيين "

(1) أ) بيّن أنّ احتمال الحدث A يساوي $\frac{4}{15}$ وأنّ احتمال الحدث B يساوي $\frac{2}{3}$

ب) احسب الاحتمالين $P(C)$ و $P(A \cap C)$. هل الحدثان A و C مستقلان؟

ج) استنتج احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون علما أنّهما تحملان رقمين زوجيين.

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.

أ) برّر أنّ مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{2; 3; 4\}$

ب) عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

(1) حلا المعادلة $8z^2 - 4z + 1 = 0$ ذات المجهول z في \mathbb{C} هما:

أ) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ و $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ ب) $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ و $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ ج) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ و $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

(2) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1 + \sqrt{3} + i}{1 - i}$ هو:

أ) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2} - i \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{-2 + \sqrt{3}}{2} \right)$

(3) الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8 + 6i$ هما:

أ) $1 + 3i$ و $-1 - 3i$ ب) $1 + 3i$ و $1 - 3i$ ج) $3 + i$ و $-3 - i$

(4) الشكل المثلثي للعدد المركب $\frac{1 + i}{\sqrt{3} - i}$ هو:

أ) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$ ج) $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1$

(1) أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n < 5$

ب) بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما.



(2) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 5$

(أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{4}{5}$ ، يطلب تعيين حدّها الأول v_0

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -5\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثم بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = 5n - 20\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = ((\ln x)^2 - 3) \ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) (أ) بين أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{3(-1 + \ln x)(1 + \ln x)}{x}$

(ب) حلّ في المجال $]0; +\infty[$ المتراجحة ذات المجهول x : $(-1 + \ln x)(1 + \ln x) > 0$

(ج) استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماماً على كلّ من المجالين $]0; e^{-1}[$ و $]e; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على

المجال $[e^{-1}; e]$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(3) (أ) عيّن معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

(ب) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

(ج) ارسم (T) و (C_f) على المجال $]0; e^2]$

(4) F الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $F(x) = x((\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 3\ln x - 3)$

(أ) تحقق أنّ F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$

(ب) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما:

$$x = e \text{ و } x = 1$$

(5) h الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $h(x) = ((\ln x)^2 - 3)|\ln x|$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم ارسمه على المجال $]0; e^2]$