الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2023

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 5 كريات تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 3 ويحتوي صندوق U_2 على 4 كريات تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 (كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس).

نختار عشوائيا أحد الصندوقين ونسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد.

1) نعتبر الحوادث : A " سحب كريتين تحملان رقمين فرديين " ، B " سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين"

C " سحب كريتين إحداهما تحمل رقما فرديا والأخرى تحمل رقما زوجيا "

أ) أنجز الشجرة التي تُنمذج هذه التجربة.

ب) بيّن أنّ $P(A)=\frac{23}{60}$ و $P(B)=\frac{1}{12}$ ثم احسب $P(C)$

2) نفرغ محتوى الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق جديد U_3 ثم نسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد.

X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين جُداء الرقمين المسجلين عليهما.

أ) برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{1;2;3;4;6\}$

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) حلّ المعادلة التفاضلية $y'=2y+6$ الذي يحقّق $y(\ln 2)=25$ هو الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=7e^{2x}-3$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln(e^{x}-1)\right]=+\infty$

3) القيمة المتوسطة للدالة $x\mapsto x\left(x^2+1\right)^2$ على المجال $[0;2]$ هي 31

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\int_n^{n+1}e^{-x+3}\,dx$

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_0+v_1+\cdots+v_n=e^3-e^{-n+2}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بـ: $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=-1+\frac{2}{2-u_n}$

1) أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $0<u_n\le\frac{1}{2}$

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

2) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$

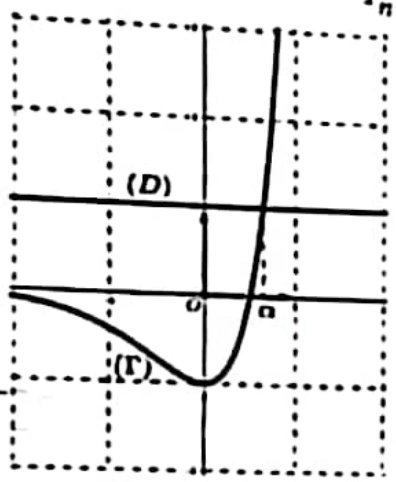
أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثمّ اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{2^n + 1}$ ثمّ احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n = 2^{n+1} + n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I) (Γ) التمثيل البياني للدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \longmapsto (2x-1)e^{2x}$

و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (Γ) و (D) (لاحظ الشكل المقابل)

1) بقراءة بيانية ، حدّد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D)

2) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2x-1)e^{2x} - 1$

استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ ثمّ تحقق أنّ: $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)(e^{2x} - 1)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2\ cm$)

1) احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ(C_f) عند $-\infty$

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

3) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$

ب) استنتج أنّ f متناقصة تماما على $]-\infty; \alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

جـ) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له.

4) أ) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب) ارسم (Δ) ، (T) و (C_f) (نأخذ : $f(1{,}4) = 6{,}2$ و $f(\alpha) = -0{,}9$)

جـ) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + m$

5) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)\, e^{2x}\, dx = \frac{3-2e}{4}$

ب) استنتج، بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 0$ ، $x = \frac{1}{2}$ و $y = -x + 1$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللّمس، موزعة كما يلي: 3 كريات بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 و 3 كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 و 4 كريات خضراء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 ، 2

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس ونعتبر الحوادث A ، B ، C الآتية:

A " الحصول على كريتين من نفس اللون " ، B " الحصول على كرية خضراء على الأقل "

C " الحصول على كريتين تحملان رقمين زوجيين "

1) أ) بيّن أنّ احتمال الحدث A يساوي $\frac{4}{15}$ وأنّ احتمال الحدث B يساوي $\frac{2}{3}$

ب) احسب الاحتمالين $P(C)$ و $P(A\cap C)$. هل الحدثان A و C مستقلان؟

جـ) استنتج احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون علما أنهما تحملان رقمين زوجيين.

2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.

أ) برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{2;3;4\}$

ب) عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

1) حلا المعادلة $8z^2-4z+1=0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هما:

أ) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ و $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ ب) $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ و $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ جـ) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ و $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

2) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو:

أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ جـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$

3) الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8+6i$ هما:

أ) $1+3i$ و $-1-3i$ ب) $1+3i$ و $1-3i$ جـ) $3+i$ و $-3-i$

4) الشكل المثلثي للعدد المركب $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ هو:

أ) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ جـ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـــ: $u_0=0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{4}{5}u_n+1$

1) أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n<5$

ب) بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما.

2) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 5$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{4}{5}$، يطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = -5\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$

جـ) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n = 5n - 20\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \left((\ln x)^2 - 3\right)\ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x) = \frac{3(-1+\ln x)(1+\ln x)}{x}$

ب) حلّ في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة ذات المجهول x : $(-1+\ln x)(1+\ln x) > 0$

جـ) استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على كلّ من المجالين $\left]0;e^{-1}\right]$ و $[e;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[e^{-1};e\right]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) عيّن معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

ب) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

جـ) ارسم (T) و (C_f) على المجال $\left]0;e^2\right]$

4) F الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x) = x\left((\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 3\ln x - 3\right)$

أ) تحقق أنّ F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$

ب) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = 1$ و $x = e$

5) h الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = \left((\ln x)^2 - 3\right)|\ln x|$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه على المجال $\left]0;e^2\right]$

انتهى الموضوع الثاني