دورة: 2023

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: تسيير واقتصاد

المدة: 03 سا و30

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n - \frac{6}{5}$

1) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n > -3$

2) بيّن أنّ (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنها متقاربة.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 3$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n - 3$

جـ) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n = \frac{19}{2} - 3n - \frac{15}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) أ) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $(1-x)(10x^2 + 9x - 1) = 0$

ب) تحقّق أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $10x^2 + 9x - 1 = (x+1)(10x-1)$

2) أ) استنتج في المجال $]0;+\infty[$ مجموعة حلول المعادلة $(1-\ln x)\left(10(\ln x)^2 + 9(\ln x) - 1\right) = 0$

ب) استنتج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المتراجحة $(1-e^x)(10e^{2x} + 9e^x - 1) \leq 0$

3) حلّ في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة $\ln(10x^2 + 9x) \geq 0$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

1) (u_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول 3 وأساسها -4 . من أجل كل عدد طبيعي n:

أ) $u_n = 3\times(-4)^n$ ب) $u_n = 3-4n$ جـ) $u_n = 3-4(n-1)$

2) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+\ln(x+1)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي:

أ) $y=x+1$ ب) $y=x$ جـ) $y=x-1$

3) g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x-\dfrac{1}{x}$

دالتها الأصلية G على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1 معرّفة بـ:

أ) $G(x)=x^2+1-\ln x$ ب) $G(x)=-x^2+1-\ln x$ جـ) $G(x)=x^2-1-\ln x$

4) القيمة المتوسطة للدالة $x\longmapsto 3(x+1)^2$ على المجال $[0;1]$ تساوي:

أ) 7 ب) 14 جـ) 21

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+1-\dfrac{3}{e^x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$)

1) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

3) أ) بيّن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)=1+\dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2}$

ب) استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}28<\alpha<0{,}29$

5) ارسم (Δ) و (C_f)

6) F الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $F(x)=3x-3\ln(e^x+1)$

أ) تحقق أنّ F أصلية للدالة $x\longmapsto\dfrac{3}{e^x+1}$ على المجال $[0;+\infty[$

ب) احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\ln 2$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

1) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 4$

2) بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 4$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

جـ) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = 4n + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

1) مجموعة الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة $e^{2x} + 4e^{x} - 5 = 0$ هي:

أ) $\{0\}$ ب) $\{1;0\}$ جـ) $\{-5;0\}$

2) α عدد حقيقي و (u_n) المتتالية المعرّفة بـ: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 5u_n - 4$

تكون المتتالية (u_n) ثابتة من أجل:

أ) $\alpha = 5$ ب) $\alpha = -4$ جـ) $\alpha = 1$

3) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$

الدالة الأصلية F على $\mathbb{R}$ للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 معرّفة بـ:

أ) $F(x) = -2\ln(e^x + 1) + \ln 4$ ب) $F(x) = 2\ln(e^x + 1) - \ln 4$ جـ) $F(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1 - e^x)$ تساوي:

أ) $-\infty$ ب) $+\infty$ جـ) 0

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ) تحقق أنه: من أجل كل عدد حقيقي x، $x^3-6x^2+11x-6=(x-2)(x^2-4x+3)$.

ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^3-6x^2+11x-6=0$

2) أ) استنتج في المجال $]0;+\infty[$ مجموعة حلول المعادلة $(\ln x)^3-6(\ln x)^2+11(\ln x)-6=0$

ب) استنتج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المعادلة $e^{3x}-6e^{2x}+11e^x-6=0$

3) حل في المجال $]2;+\infty[$ المتراجحة $\ln(x^3-6x^2+11x-5)\geq 0$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2-x-\ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) أ) بيّن أنه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$

ب) استنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) عيّن معادلة لـ (T) المماس للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2

4) احسب $f(3)$ ثمّ ارسم (T) و (C_f)

5) F الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-x\ln x$

أ) تحقّق أنّ F أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$

ب) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل

والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$

انتهى الموضوع الثاني