سلسلة 1 ملخص النهايات السنة الدراسية 2012-2013

عمليات على النهايات

نهايات الدوال المرجعية

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad , \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad , \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad , \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad , \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad , \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad , \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad , \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad , \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a \quad , \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

1. المبرهنات الأولية على النهايات

. نقبل دون برهان المبرهنات التالية: $-\infty$ أو $+\infty$ يمثل عدد حقيقي أو a دالتان. g و f

- **نهاية مجموع دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in R$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

- **نهاية جداء دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in R$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

- **نهاية حاصل قسمة دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in R$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in R^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "**عدم التعيين**"

بعض النتائج

●نهاية كثير حدود هي نهاية الحد ذ و أعلى درجة

مثــــال

$$\lim_{x\to+\infty} \left(7x^3 - 2x^2 + 3\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(7x^3\right) = +\infty \quad , \lim_{x\to+\infty} \left(3x + 1 - 2x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-2x^2\right) = -\infty$$

●نهاية دالة ناطقة هي نهاية الحد أعلى درجة في البسط على الحد أعلى درجة في المقام

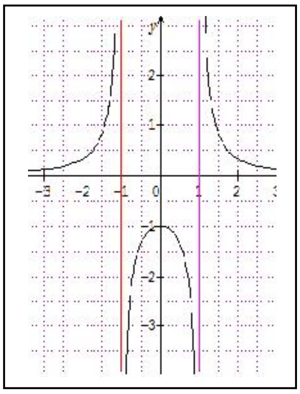
مثــــال:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x}{\left(X^2-1\right)^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x^4} = 0 \quad , \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+1}{3-x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{-x} = -1 \quad , \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

حالات عدم التعيين

حالات عدم التعين المقررة هي $\frac{0}{0} \quad , 0 \times \infty \quad , \frac{\infty}{\infty} \quad , +\infty - \infty$

إعداد: حجاج براهيم



المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن a عدد حقيقي.

إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$)

نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الموازي لمحور التراتيب.

المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن b عدد حقيقي.

ادا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$)

نقول أن المستقيم الدي معادلته $y=b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الموازي لمحور الفواصل عند $+\infty$

تمرين تطبيقي

أحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف و فسر هندسيا النتيجة

$$f(x)=\frac{2x-1}{3-x}\ Df=R-\{3\}\quad ,f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}\ Df=R-\{-1;1\}$$

الحل أولا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{3-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

نستنتج أن $y=-2$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الموازي لمحور الفواصل

$$\lim_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to3\\<}}\frac{2x-1}{3-x}=+\infty$$ لأن $\begin{cases}(2x-1)\to5\\(3-x)\to0^+\end{cases}$

إذا كان المقام من الدرجة الأولى فإن إشارة الصفر تكون عكس إشارة a معامل x ((حالة القيم صغرى))

$$\lim_{\substack{x\to3\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to3\\>}}\frac{2x-1}{3-x}=-\infty$$ لأن $\begin{cases}(2x-1)\to5\\(3-x)\to0^-\end{cases}$

إذا كان المقام من الدرجة الأولى فإن إشارة الصفر تكون مثل إشارة a معامل x ((حالة القيم كبرى))

نستنتج أن $x=3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الموازي لمحور التراتيب

ثانيا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

نستنتج أن $y=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الموازي ل $(x'x)$

بمأن $\begin{cases}(x+2)\to1\\(x^2-1)\to0^+\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{x+2}{x^2-1}=+\infty$ **ملاحظة**

بمأن $\begin{cases}(x+2)\to1\\(x^2-1)\to0^-\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{x+2}{x^2-1}=-\infty$

لمعرفة إشارة الصفر ندرس إشارة المقام لأنه من الدرجة الثانية

x		-1		1	
x^2-1	+ مثل إشارة a	0	- عكس إشارة a	0	+ مثل إشارة a

بمأن $\begin{cases}(x+2)\to1\\(x^2-1)\to0^-\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x+2}{x^2-1}=-\infty$

بمأن $\begin{cases}(x+2)\to1\\(x^2-1)\to0^+\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x+2}{x^2-1}=+\infty$

نستنتج أن $x=-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الموازي لمحور التراتيب $(y'y)$

نستنتج أن $x=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الموازي لمحور التراتيب $(y'y)$

إعداد: حجاج براهيم

المستقيم المقارب المائل

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = ax+b$

القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن:

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (على الترتيب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$)

مثال f دالة عددية معرفة على R^* كمايلي $f(x)=\dfrac{x^2+2x-4}{x}$

بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

الحل يكون (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) اذا و فقط اذا تحقق $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^2+2x-4}{x}-(x+2)\right]$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+2x-4}{x}-(x+2)\right]$

$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{-4}{x}\right]=0$ $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-4}{x}\right]=0$

إذا المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ملاحظة: إذا كانت f دالة بحيث: $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

فإنه من الواضح أن: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ لأن $f(x)-(ax+b)=g(x)$ و بالتالي فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة:

$y = ax+b$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$. (نفس الملاحظة لما يؤول x إلى $-\infty$)

دراسة وضعية المنحنى والمستقيم المقارب

لدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$ ونميز

إذاكان $f(x)-(ax+b)<0$ المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)

إذاكان $f(x)-(ax+b)>0$ المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)

إذاكان $f(x)-(ax+b)=0$ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $A(x_0,f(x_0))$ أو $A(x_0,y(x_0))$

مثال نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{2x^2-3x+3}{x-1}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم

1. عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون من أجل كل x يختلف عن 1 : $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$
2. استنتج أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته. أدرس وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ)

حل:

/1 لدينا من أجل كل x يختلف عن 1 : $ax+b+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{ax^2+(-a+b)x-b+c}{x-1}$

و منه بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a=2 \\ -a+b=-3 \\ -b+c=3 \end{cases}$ وبتالي نجد $a=2$، $b=-1$ و $c=2$

و منه فإن من أجل كل x يختلف عن 1 : $g(x)=2x-1+\dfrac{2}{x-1}$

/2 بما أن $\lim_{|x|\to+\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$ و فإن المستقيم $(\Delta): y=2x-1$ مستقيم مقارب لـِ (C_g) **عند** $-\infty$ **و عند** $+\infty$.

/3 لدينا من أجل كل x يختلف عن 1: $g(x)-(2x-1)=\dfrac{2}{x-1}$

- من أجل $x\in]-\infty;1[$، $g(x)-(2x-1)<0$ و منه يقع المنحنى (C_g) تحت المستقيم (Δ)
- من أجل $x\in]1;+\infty[$، $g(x)-(2x-1)>0$ و منه يقع المنحنى (C_g) فوق المستقيم (Δ)

إعداد: حجاج براهيم

نتعلم لنغير حاضرنا و نبني مستقبلنا

تعاريف:

نهاية مركب دالتين

مبرهنة 01:

a,b,c تمثل أعداد حقيقية أو $+\infty,-\infty$ ، u,v,f دوال حيث : $f=v\circ u$

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ وإذا كانت $\lim\limits_{x\to b}v(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$

مثـــال 01:

***أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ حيث $f(x)=\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2+2x}}\right)$

نلاحظ أن f مركب دالتين هما : $u(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$ و $v(x)=\sqrt{x}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}v(x)=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

مبرهنة 02:

f,g,h دوال و l عدد حقيقي إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=l$ ومن اجل x كبير بالقدر الكافي

$g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$

ملاحظة يمكن تمديد المبرهنة الى حالة $-\infty$ و عند عدد حقيقي .

مثـــال 02:

أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ حيث $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

بمأن من اجل كل x من R $-1\le\sin x\le 1$ ومنه من اجل كل x من R^* فإن : $-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le+\dfrac{1}{x}$

وبمأن $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ومنه نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

مبرهنة 03:

f,g دوال و l عدد حقيقي إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ ومن اجل x كبير بالقدر الكافي $g(x)\le f(x)$ فإن

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ملاحظة يمكن تمديد المبرهنة الى حالة $-\infty$ و عند عدد حقيقي .

مبرهنة 04:

f,g دوال و l عدد حقيقي إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ ومن اجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\le g(x)$ فإن

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

ملاحظة يمكن تمديد المبرهنة الى حالة $-\infty$ و عند عدد حقيقي

مثـــال03:

أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ حيث $f(x)=\sin x+x$

الحل

لدينا من اجل كل x من R لدينا $\sin x\ge-1$ ومنه $\sin x+x\ge-1+x$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x+x)\ge\lim\limits_{x\to+\infty}(-1+x)$

وبمأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(-1+x)=+\infty$ وبتالى $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x+x)=+\infty$

لدينا من اجل كل x من R لدينا $\sin x\le 1$ ومنه $\sin x+x\le 1+x$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sin x+x)\le\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)$

وبمأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)=-\infty$ وبتالى $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sin x+x)=-\infty$

إعداد :حجاج براهيم

تمرين تطبيقي 01

لتكن f الدالة المعرفة على : $\left]-\infty,-2\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ب: $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

الحل:

نلاحظ أن f مركب دالتين هما : $u(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ و $v(x)=\sqrt{x}$

** بما أن $\lim_{x\to-\infty}u(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=2$ و $\lim_{x\to2}v(x)=\lim_{x\to2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$ فإن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\sqrt{2}$

بنفس الطريقة نجد كذلك $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{2}$

** بما أن $\lim_{x\overset{<}{\to}-2}u(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}-2}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}v(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ فإن $\lim_{x\overset{<}{\to}-2}f(x)=+\infty$

** بما أن $\lim_{x\overset{>}{\to}-\frac{1}{2}}u(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}-\frac{1}{2}}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=0$ و $\lim_{x\to0}v(x)=\lim_{x\to0}\sqrt{x}=0$ فإن $\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}}f(x)=0$

تمرين تطبيقي 02:

لتكن f الدالة المعرفة على : R^* ب: $f(x)=1+\frac{\cos x}{x^2}$

1) أثبت أن من أجل كل x من R^* : $1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le1+\frac{1}{x^2}$

2) استنتج نهايتي الدالة f عند $-\infty,+\infty$

الحل:

1- نعلم أنه من أجل كل x من R^* : $-1\le\cos x\le1$ ومنه من أجل كل x من R^* : $-\frac{1}{x^2}\le\frac{\cos x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$

وبالتالي من أجل كل x من R^* : $1-\frac{1}{x^2}\le\frac{\cos x}{x^2}+1\le1+\frac{1}{x^2}$ أي من أجل كل x من R^* :

$$1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le1+\frac{1}{x^2}$$

2- بما أن $\lim_{|x|\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$ فإن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=1$

تمرين تطبيقي 03:http://hadjadjbrahim.allahmuntada.com

لتكن f الدالة المعرفة على : R ب: $f(x)=\frac{x}{2+\sin x}$

1- أثبت أن من أجل كل x من R : $\frac{1}{3}\le\frac{f(x)}{x}\le1$

2- استنتج نهايتي الدالة f عند $-\infty,+\infty$

الحل:

1-نعلم أنه من أجل كل x من R : $-1\le\sin x\le1$ ومنه من أجل كل x من R : $1\le1+\sin x\le3$ أي من أجل كل x من R : $\frac{1}{3}\le\frac{1}{\sin+2}\le1$ ومنه $\frac{1}{3}\le\frac{f(x)}{x}\le1$

2- لدينا : $\frac{1}{3}\le\frac{f(x)}{x}$ ومنه من أجل كل x من $[0,+\infty[$ $\frac{x}{3}\le f(x)$ وبما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لدينا : $\frac{f(x)}{x}\le1$ ومنه من أجل كل x من $]-\infty,0]$ $f(x)\le x$ وبما أن $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$