البرهان بالتراجع

الكفاءات المستهدفة

- إثبات خاصية بالتراجع.
- حل مشكلات توظف فيها المتتاليات والبرهان بالتراجع.
- حل مشكلات يوظف فيها البرهان بالتراجع.

البرهان بالتراجع

نشاط 1 الغرض من هذا النشاط هو إبراز أهمية الاستدلال بالتراجع

① حساب مجموع مكعبات الأعداد الأولى الطبيعية غير المعدومة :

لدينا : $1^3 = 1$

$1^3 + 2^3 = 9$ ونلاحظ أن : $9 = (1+2)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ ونلاحظ أن : $36 = (1+2+3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$ ونلاحظ أن : $100 = (1+2+3+4)^2$

ومنه فكرة التعميم التالية : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+4+\dots+n)^2$$

نسمي p_n الخاصية " $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+4+\dots+n)^2$ "

يمكننا التحقق أن : p_1 صحيحة لأن $1^3 = 1^2 = 1$

p_2 صحيحة لأن $1^3 + 2^3 = (1+2)^2 = 9$

p_3 صحيحة لأن $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2 = 36$

p_4 صحيحة لأن $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^2 = (1+2+3+4)^2 = 100$

لكن هل أن الخاصية p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم ؟ وإذا كان الجواب نعم ، كيف نبرهن ذلك ؟ (لأنه يوجد عدد غير منته من التحققات) .

الاستدلال الذي يسمح بالبرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن الخاصية p_n صحيحة يسمى الاستدلال (البرهان) بالتراجع .

② p_n خاصية تتعلق بالعدد الطبيعي n معرفة كما يلي : المقدار $(4^n + 5)$ يقبل القسمة على 3 .

من أجل $n = 0$ فإن p_0 صحيحة لأن $4^0 + 5 = 6$ ، العدد 6 يقبل القسمة على 3 .

من أجل $n = 1$ فإن p_1 صحيحة لأن $4^1 + 5 = 9$ ، العدد 9 يقبل القسمة على 3 .

من أجل $n = 2$ فإن p_2 صحيحة لأن $4^2 + 5 = 21$ ، 21 يقبل القسمة على 3 .

لكن من الواضح أنه لا يمكننا التحقق بالتتابع من أن p_n صحيحة من أجل كل قيمة للعدد الطبيعي n (يوجد عدد غير منته من التحققات) ، يسمح الاستدلال

بالتراجع بالبرهان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $\left(4^n+5\right)$ يقبل القسمة على 3 .

نشاط 2

الغرض من هذا النشاط هو إدخال نمط جديد للاستدلال الرياضي

(u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي :

$u_0 = 2$ وَ $u_{n+1} = 2u_n - 3$ من أجل كل عدد طبيعي n .

نفرض أن المطلوب هو مقارنة u_n وَ $3-2^n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

نسمي p_n الخاصية ″ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3-2^n$ ″

نبحث إن كانت الخاصية p_n صحيحة أو خاطئة .

1 أ- أكمل الجدول التالي :

n	0	1	2	3	4
u_n					
$3-2^n$					

ب- ما هو التخمين الذي يمكن وضعه انطلاقا من ملاحظة النتائج المتعلقة بالحالات :
$n=0$ ، $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ وَ $n=4$.

2 للبرهان أن الخاصية p_n صحيحة ، نعمل على مرحلتين :

- نتحقق أن p_n صحيحة من أجل $n=0$.
- نفرض أن p_n صحيحة ، واعتمادا على هذه الفرضية ، نبرهن صحة p_{n+1} .

يمكن أن نستخلص عندئذ أن الخاصية p_n صحيحة .

يسمى هذا النمط من البرهان الاستدلال بالتراجع

الحل :

1 أ- إكمال الجدول :

n	0	1	2	3	4
u_n	2	1	-1	-5	-13
$3-2^n$	2	1	-1	-5	-13

ب- وضع تخمين:
انطلاقا من ملاحظة النتائج المتعلقة بالحالات $n=0$ ، $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ و $n=4$ يمكن أن نستخلص أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=3-2^n$.

② البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=3-2^n$:

نسمي p_n الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=3-2^n$ "

- التحقق من صحة p_0 :

الطرف الأول هو : $u_0=2$ ، الطرف الثاني هو : $3-2^0=2$

وبالتالي فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني . إذن : p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n=3-2^n$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1}=3-2^{n+1}$

لدينا : $u_{n+1}=2u_n-3$ ، ومن فرضية التراجع $u_n=3-2^n$

وبالتالي : $u_{n+1}=2u_n-3=2\left(3-2^n\right)-3=6-2\times2^n-3=3-2^{n+1}$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

- إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=3-2^n$

الاستدلال بالتراجع :

الاستدلال بالتراجع هو نوع من الاستدلالات يسمح بالبرهنة على صحة خاصية تتعلق بعدد طبيعي ، يعتمد هذا الاستدلال على المبدأ التالي :

مبدأ الاستدلال بالتراجع :

p_n خاصية تتعلق بالعدد الطبيعي n ، يمكن أن تكون صحيحة أو خاطئة ، لكي نبرهن بالتراجع على صحة الخاصية p_n من أجل كل عدد طبيعي n ، نتبع المراحل التالية :

- المرحلة الأولى : نتحقق من صحة p_0 .
- المرحلة الثانية : نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن الخاصية p_n صحيحة واعتمادا على هذه الفرضية ، نبرهن صحة الخاصية p_{n+1} .
- المرحلة الثالثة (الاستنتاج) : إذا تحقق الشرطان السابقان معا نستنتج أن الخاصية p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

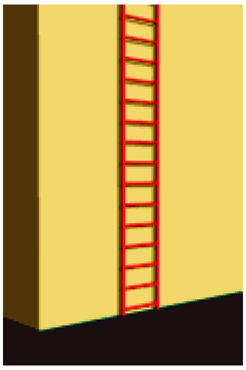
ملاحظة : في المرحلة الثانية ، الفرضية " p_n صحيحة " تسمى فرضية التراجع

صيغة أخرى لهذا المبدأ :

لإثبات أن خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n صحيحة ، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ ، نحقق الشرطين التاليين معا :

- نبيّن أن الخاصية محققة من أجل المرتبة الابتدائية n_0 .
- نبيّن أن الخاصية وراثية ، بمعنى :

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل مرتبة كيفية p ، و نبيّن أنها صحيحة من أجل المرتبة $p+1$.



فكرة الاستدلال بالتراجع :

فكرة الاستدلال بالتراجع بسيطة ويمكن تصورها كما يلي :
عند الصعود في سلم ، إذا استطعنا وضع الرجل على اللوحة الأولى لهذا السلم واستطعنا بعد ذلك الانتقال من لوحة كيفية إلى اللوحة التي فوقها ، فإننا بذلك نستطيع الصعود على جميع لوحات هذا السلم .

مثال 1 :

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن المقدار $\left(9^n-1\right)$ يقبل القسمة على 8

نسمي p_n الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n ، المقدار $\left(9^n-1\right)$ يقبل القسمة على 8 "

- التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $9^0-1=1-1=0$ ، العدد 0 يقبل القسمة على 8 ومنه p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $\left(9^n-1\right)$ يقبل القسمة على 8 أي : يوجد عدد صحيح k بحيث $9^n-1=8k$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $\left(9^{n+1}-1\right)$ يقبل القسمة على 8

أي : يوجد عدد صحيح K بحيث $9^{n+1}-1=8K$

لدينا : $9^{n+1}-1=9\times 9^n-1$ ،

ومن فرضية التراجع : $9^n-1=8k$ ومنه : $9^n=8k+1$

وبالتالي : $9^{n+1}-1=9\times 9^n-1=9(8k+1)-1$

$$=9\times 8k+8=8(9k+1)=8K$$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل n من $\mathbb{N}$ فإن المقدار $\left(9^n-1\right)$ يقبل القسمة على 8
(الشكل رقم 1 يفسّر المثال رقم 1)

مثال 2 :

نسمي R_n الخاصية ″ من أجل كل عدد طبيعي n فإن المقدار $\left(4^n-1\right)$ يقبل القسمة على 5 ″

• التحقق من صحة R_0 :

لدينا : $4^0-1=1-1=0$ ، وبما أن العدد 0 يقبل القسمة على 5 فإن R_0 صحيحة

• نفرض أن R_n صحيحة أي : $\left(4^n-1\right)$ يقبل القسمة على 5

أي : يوجد عدد صحيح k بحيث $4^n-1=5k$

ونبرهن أن R_{n+1} صحيحة أي : $\left(4^{n+1}-1\right)$ يقبل القسمة على 5 أي : يوجد عدد صحيح K بحيث $4^{n+1}-1=5K$

لدينا : $4^{n+1}-1=4\times4^n-1$ ،

ومن فرضية التراجع : $4^n-1=5k$ أي : $4^n=5k+1$

وبالتالي : $4^{n+1}-1=4\times4^n-1=4(5k+1)-1$

$=5\times(4k)+3=5K+3$

ومنه : R_{n+1} غير صحيحة أي أن الخاصية R_n غير وراثية .

• إذن : الخاصية R_n غير صحيحة (R_0 صحيحة وَ R_n غير وراثية)

(الشكل رقم 2 يفسّر المثال رقم 2)

مثال 3 :

نسمي Q_n الخاصية ″ من أجل كل عدد طبيعي n فإن المقدار $\left(9^n+1\right)$ يقبل القسمة على 8 ″

• نفرض أن Q_n صحيحة أي : $\left(9^n+1\right)$ يقبل القسمة على 8 أي : يوجد عدد صحيح k بحيث $9^n+1=8k$

ونبرهن أن Q_{n+1} صحيحة أي : $\left(9^{n+1}+1\right)$ يقبل القسمة على 8

أي : يوجد عدد صحيح K بحيث $9^{n+1}+1=8K$

لدينا : $9^{n+1}+1=9\times9^n+1$ ،

ومن فرضية التراجع : $9^n+1=8k$ أي : $9^n=8k-1$

وبالتالي : $9^{n+1}+1=9\times 9^{n}+1=9(8k-1)-1$

$$=9\times 8k-8=8(9k-1)=8K$$

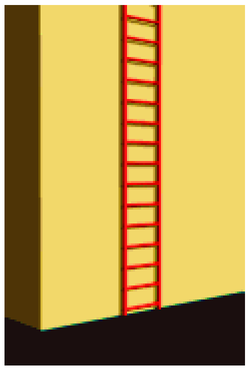
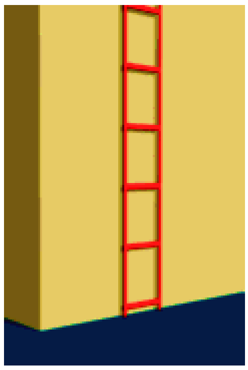
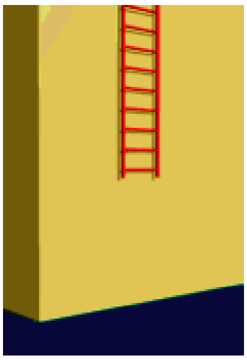
ومنه : Q_{n+1} صحيحة أي أن الخاصية Q_n وراثية .

• التحقق من صحة Q_0:

لدينا : $9^{0}+1=1+1=2$ ، العدد 2 لا يقبل القسمة على 8 ومنه Q_0 غير صحيحة

• إذن : الخاصية Q_n غير صحيحة (Q_0 غير صحيحة وَ Q_n وراثية)

(الشكل رقم 3 يفسّر المثال رقم 3)

الشكل - 1 -	الشكل - 2 -	الشكل - 3 -
		
• p_0 صحيحة • p_n وراثية	• R_0 صحيحة • R_n غير وراثية	• Q_0 غير صحيحة • Q_n وراثية
الخاصية p_n صحيحة	الخاصية R_n خاطئة	الخاصية Q_n خاطئة

الخاصيات التي يستعمل فيها البرهان بالتراجع : توجد ثلاث خاصيات أساسية هي :

• البرهان على صحة مساواة .

• البرهان على صحة متباينة .

• البرهان أن مقدار يقبل القسمة على عدد (أو مضاعف لعدد) .

طرائق :

• إذا كانت الخاصية p_n مساواة ، نبدأ من الطرف الأكثر تعقيدا للمساواة p_{n+1} وباستعمال فرضية التراجع نصل إلى الطرف الآخر .

• إذا كانت الخاصية p_n متباينة ، نبدأ من فرضية التراجع للحصول على p_{n+1} .

تمارين محلولة

تمرين محلول 1 :

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

(1) احسب s_1 ، s_2 ، s_3 وَ s_4 ثم اكتب s_{n+1} بدلالة s_n .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

الحل :

(1) حساب s_1 : $s_1 = 1^2 = 1$

- حساب s_2 : $s_2 = 1^2 + 2^2 = 5$
- حساب s_3 : $s_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
- حساب s_4 : $s_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
- كتابة s_{n+1} بدلالة s_n :

$$s_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = s_n + (n+1)^2$$

إذن : $s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن: $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

نسمي p_n الخاصية " $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ "

- التحقق من صحة p_1 :

الطرف الأول هو $s_1 = 1$ ، الطرف الثاني هو $\frac{1}{6}\times 1(1+1)(2\times 1+1) = \frac{1}{6}\times 2\times 3 = 1$

وبالتالي فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني . إذن : p_1 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $s_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

لدينا :

$$s_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = s_n + (n+1)^2$$

$$= \left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right] + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + 7n + 6\right] = \frac{1}{6}(n+1)[(n+2)(2n+3)]$$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن $s_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

تمرين محلول 2 :

برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $2^n \geq n+1$.

الحل :

نسمي p_n الخاصية " $2^n \geq n+1$ "

• التحقق من صحة p_0 :

من أجل $n=0$ لدينا : $2^0 \geq 0+1$ أي : $1\geq 1$ وهي محققة. إذن : p_0 صحيحة

• نفرض صحة p_n أي : $2^n \geq n+1$ ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $2^{n+1}\geq n+2$

من فرضية التراجع لدينا : $2^n \geq n+1$ ومنه : $2^n+2^n \geq (n+1)+2^n$

أي : $2\times 2^n \geq (n+1)+2^n$ ومنه : $2^{n+1}\geq (n+1)+2^n$

وبما أن $n\in \mathbb{N}$ فإن $n\geq 0$ وبالتالي $2^n\geq 2^0$ أي $2^n\geq 1$

من العلاقة $2^{n+1}\geq (n+1)+2^n$ والعلاقة $2^n\geq 1$ نستنتج أن

$2^{n+1}\geq (n+1)+1$ أي : $2^{n+1}\geq n+2$ ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $2^n \geq n+1$.

تمرين محلول 3 :

نعتبر المتتالية (u_n) ، ذات الحدود الموجبة ، المعرفة بما يلي :

$u_0=1$ وَ $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة .

الحل :

تذكير : (المتتالية (u_n) متزايدة) يكافئ (من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}\geq u_n$)

للبرهان أن (u_n) متزايدة يكفي أن نبرهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}\geq u_n$

نسمي p_n الخاصية " $u_{n+1}\geq u_n$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_1=\sqrt{1+u_0}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_1 \geq u_0$ أي : $\sqrt{2} \geq 1$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_{n+1} \geq u_n$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

لدينا $u_{n+1} \geq u_n$ ومنه $u_{n+1}+1 \geq u_n+1$. بما أن الدالة " الجذر التربيعي " متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومن التعريف كل حدود المتتالية(u_n)موجبة

نستنتج أن : $\sqrt{u_{n+1}+1} \geq \sqrt{u_n+1}$ أي : $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

إذن : p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ، وبالتالي المتتالية(u_n)متزايدة .

تمرين محلول 4 : استعمال قاعدة العكس النقيض مع البرهان بالتراجع

(u_n)متتالية عددية معرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+2}{2u_n+1} \end{cases}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \neq 1$.

الحل : نسمي p_n الخاصية " $u_n \neq 1$ "

• التحقق من صحة p_0 :

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 \neq 1$ أي : $2 \neq 1$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n \neq 1$ ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $u_{n+1} \neq 1$

تذكير بقاعدة العكس النقيض :

(إذا كان $u_n \neq 1$ فإن $u_{n+1} \neq 1$) يكافئ (إذا كان $u_{n+1} = 1$ فإن $u_n = 1$)

وبالتالي بدل أن نبرهن أنه : إذا كان $u_n \neq 1$ فإن $u_{n+1} \neq 1$

يكفي أن نبيّن أنه : إذا كان $u_{n+1} = 1$ فإن $u_n = 1$

إذا كان : $u_{n+1} = 1$ أي : $\dfrac{u_n+2}{2u_n+1} = 1$ فإن : $u_n+2 = 2u_n+1$ ومنه : $u_n = 1$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \neq 1$.

تمرين محلول 5 :

(u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

أثبت أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن $0 \le u_n \le 2$.

الحل : نسمي p_n الخاصية " $0 \le u_n \le 2$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $0 \le u_0 \le 2$ أي : $0 \le 1 \le 2$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $0 \le u_n \le 2$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $0 \le u_{n+1} \le 2$

لدينا : $0 \le u_n \le 2$ ومنه : $2 + 0 \le 2 + u_n \le 2 + 2$ أي : $2 \le 2 + u_n \le 4$

وبما أن الدالة " الجذر التربيعي " متزايدة تماما على المجال $[0 ; +\infty[$ فإن

$0 \le \sqrt{2} \le \sqrt{2 + u_n} \le \sqrt{4}$ ومنه : $0 \le \sqrt{2 + u_n} \le 2$ أي : $0 \le u_{n+1} \le 2$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 \le u_n \le 2$.

ملاحظة : [من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $0 \le u_n \le 2$] يعني [المتتالية (u_n) محدودة]

تمرين محلول 6 :

(u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + u_n} \end{cases}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

أثبت أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن $1 \le u_n \le 2$.

الحل : نسمي p_n الخاصية " $1 \le u_n \le 2$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $1 \le u_0 \le 2$ أي : $1 \le 2 \le 2$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $1 \le u_n \le 2$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $1 \le u_{n+1} \le 2$

لدينا : $1 \le u_n \le 2$ ومنه : $1 + 1 \le 1 + u_n \le 1 + 2$ أي : $2 \le 1 + u_n \le 3$

وبما أن الدالة " مقلوب " متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$ فإن $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{2}$

وبإضافة العدد 1 نجد : $1+\frac{1}{3} \leq 1+\frac{1}{1+u_n} \leq 1+\frac{1}{2}$

ومنه : $1 \leq \frac{4}{3} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2} \leq 2$ أي : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \leq u_n \leq 2$.

تمرين محلول 7 :

أثبت بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $2^{n+2}+3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 7 .

الحل :

نسمي p_n الخاصية " $2^{n+2}+3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 7 "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $2^{0+2}+3^{2\times 0+1}=2^2+3^1=7$ ، و 7 مضاعف للعدد 7 . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $2^{n+2}+3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 7 ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $2^{(n+1)+2}+3^{2(n+1)+1}$ مضاعف للعدد 7

لدينا : $2^{(n+1)+2}+3^{2(n+1)+1}=2^{n+1+2}+3^{2n+2+1}=2^{(n+2)+1}+3^{(2n+1)+2}$

$$=2^1\times 2^{n+2}+3^2\times 3^{2n+1}$$

$$=2\times 2^{n+2}+(2+7)\times 3^{2n+1}$$

$$=2\times 2^{n+2}+2\times 3^{2n+1}+7\times 3^{2n+1}$$

$$=2\times\left[2^{n+2}+3^{2n+1}\right]+7\times 3^{2n+1}$$

وبما أن $2^{n+2}+3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 7 (من فرضية التراجع)

و $7\times 3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 7 (واضح أن العدد 7 مضاعف للعدد 7) ،

فإن المجموع $2\times\left(2^{n+2}+3^{2n+1}\right)+7\times 3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 7 .

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2^{n+2}+3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 7 .

تمرين محلول 8 :

a ، b ، x وَ y أعداد صحيحة ، n عدد طبيعي غير معدوم .

1. أثبت أنه إذا كان $a \equiv b\,[n]$ وَ $x \equiv y\,[n]$ فإن $ax \equiv by\,[n]$.
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي k :

إذا كان $x \equiv y\,[n]$ فإن $x^k \equiv y^k\,[n]$

الحل :

تذكير : ($x \equiv y\,[n]$) يكافئ ($x - y$ مضاعف للعدد n)

1. إثبات أنه إذا كان $a \equiv b\,[n]$ وَ $x \equiv y\,[n]$ فإن $ax \equiv by\,[n]$:

إذا كان $a \equiv b\,[n]$ فإنه يوجد عدد صحيح k_1 يحقق $a - b = k_1 n$

إذا كان $x \equiv y\,[n]$ فإنه يوجد عدد صحيح k_2 يحقق $x - y = k_2 n$

لدينا : $ax - by = (ax - by) + bx - bx = (a-b)x + (x-y)b$

$= (k_1 n)x + (k_2 n)b = (k_1 x + k_2 b)n$

ومنه : $ax - by$ مضاعف للعدد n أي : $ax \equiv by\,[n]$

إذن : إذا كان $a \equiv b\,[n]$ وَ كان $x \equiv y\,[n]$ فإن $ax \equiv by\,[n]$.

2. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي k :

إذا كان $x \equiv y\,[n]$ فإن $x^k \equiv y^k\,[n]$

- الخاصة صحيحة من أجل $k = 0$.
- نفرض أن p_k صحيحة أي : إذا كان $x \equiv y\,[n]$ فإن $x^k \equiv y^k\,[n]$ ،

ونبرهن أن p_{k+1} صحيحة أي : إذا كان $x \equiv y\,[n]$ فإن $x^{k+1} \equiv y^{k+1}\,[n]$

من $x \equiv y\,[n]$ وَ $x^k \equiv y^k\,[n]$ و حسب السؤال الأول نستنتج أن

$x \times x^k \equiv y \times y^k\,[n]$ أي : $x^{k+1} \equiv y^{k+1}\,[n]$. ومنه : p_{k+1} صحيحة .

- إذن : من أجل كل عدد طبيعي k : إذا كان $x \equiv y\,[n]$ فإن $x^k \equiv y^k\,[n]$

تمرين محلول 9 :

z عدد مركب طويلته 1 وَ θ عمدة له : $z=\cos\theta+i\sin\theta$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

الحل :

نسمي p_n الخاصية " $z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ "

- التحقق من صحة p_0 :

الطرف الأول هو $z^0=1$ ، الطرف الثاني هو $\cos(0\times\theta)+i\sin(0\times\theta)=1$

وبالتالي فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني . إذن : p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $z^{n+1}=\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta$.

لدينا :
$$z^{n+1}=z^n\times z=(\cos n\theta+i\sin n\theta).(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\cos n\theta.\cos\theta+\cos n\theta.i\sin\theta+i\sin n\theta.\cos\theta+i\sin n\theta.i\sin\theta$$
$$=(\cos n\theta.\cos\theta-\sin n\theta.\sin\theta)+i(\cos n\theta.\sin\theta+\sin n\theta.\cos\theta)$$

ونعلم أن :
$$\begin{cases}\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b\\ \sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b\end{cases}$$

وبالتالي : $z^{n+1}=\cos(n\theta+\theta)+i\sin(n\theta+\theta)$
$$=\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta$$

ومنه : p_{n+1} صحيحة .

- إذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

تمرين محلول 10 :

z وَ z' عددان مركبان غير معدومين حيث : $z=[r\ ;\ \theta]$ ، $z'=[r'\ ;\ \theta']$

1. أثبت أن : $|z\times z'|=|z|\times|z'|$ وَ $\arg(z\times z')\equiv\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$|z^n|=|z|^n$ وَ $\arg(z^n)\equiv n\times\arg(z)[2\pi]$

الحل :

1. إثبات أن $|z\times z'|=|z|\times|z'|$ وَ $\arg(z\times z')\equiv\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$:

لدينا : $z=[r\ ;\ \theta]$ أي : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

ولدينا : $z'=[r'\ ;\ \theta']$ أي : $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$

ومنه :

$$z\times z'=[r(\cos\theta+i\sin\theta)][r'(\cos\theta'+i\sin\theta')]$$
$$=rr'(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')$$
$$=rr'[\cos\theta.\cos\theta'+\cos\theta.i\sin\theta'+i\sin\theta.\cos\theta'+i\sin\theta.i\sin\theta']$$
$$=rr'[(\cos\theta.\cos\theta'-\sin\theta.\sin\theta')+i(\cos\theta.\sin\theta'+\sin\theta.\cos\theta')]$$

ونعلم أن : $\begin{cases}\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b\\ \sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b\end{cases}$

وبالتالي : $z\times z'=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$

الكتابة $rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$ هي الشكل المثلثي للعدد المركب $z\times z'$

نستنتج أن : $z\times z'=[r\times r';\ \theta+\theta']$

إذن : $|z\times z'|=|z|\times|z'|$ وَ $\arg(z\times z')\equiv\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

2 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $|z^n|=|z|^n$:

• التحقق من صحة p_0 :

الطرف الأول هو $|z^0|=|1|=1$ ، الطرف الثاني هو $|z|^0=1$. إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $|z^n|=|z|^n$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $|z^{n+1}|=|z|^{n+1}$.

لدينا : $|z^{n+1}|=|z^n\times z|=|z^n|\times|z|$ ، ومن فرضية التراجع $|z^n|=|z|^n$

وبالتالي : $|z^{n+1}|=|z^n|\times|z|=|z|^n\times|z|=|z|^{n+1}$. ومنه : p_{n+1} صحيحة .

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $|z^n|=|z|^n$

البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\arg(z^n)\equiv n\times\arg(z)[2\pi]$:

• التحقق من صحة p_0 :

الطرف الأول هو $\arg(z^0)\equiv\arg(1)\equiv 0\,[2\pi]$ ،

الطرف الثاني هو $0\times\arg(z)\equiv 0\,[2\pi]$. إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $\arg(z^n)\equiv n\times\arg(z)[2\pi]$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $\arg(z^{n+1})\equiv(n+1)\times\arg(z)[2\pi]$

لدينا : $\arg(z^{n+1})\equiv\arg(z^n\times z)\equiv\arg(z^n)+\arg(z)[2\pi]$ (حسب السؤال 1)

ومن فرضية التراجع $\arg(z^n)\equiv n\times\arg(z)[2\pi]$

وبالتالي : $\arg(z^{n+1})\equiv n\times\arg(z)+\arg(z)\equiv(n+1)\arg(z)[2\pi]$

ومنه : p_{n+1} صحيحة .

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\arg(z^n)\equiv n\times\arg(z)[2\pi]$

تمرين محلول 11 :

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}$.

1. احسب كلا من الدوال المشتقة المتتابعة التالية : f' ، f'' ، $f^{(3)}$ و $f^{(4)}$.
2. استنتج مما سبق عبارة الدالة المشتقة النونية $f^{(n)}$ ، ثم تحقق من صحة هذه العبارة باستعمال البرهان بالتراجع .

الحل :

1. حساب f' ، f'' ، $f^{(3)}$ و $f^{(4)}$:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ ،\ f''(x)=\frac{2}{x^3}\ ،\ f^{(3)}(x)=-\frac{6}{x^4}\ \text{و}\ f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}$$

2. استنتاج عبارة $f^{(n)}(x)$: $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\times n!}{x^{n+1}}$

نسمي p_n الخاصية " $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\times n!}{x^{n+1}}$ "

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن p_n صحيحة :

• التحقق من صحة p_1 :

الطرف الأول هو : $f^{(1)}(x)=f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

الطرف الثاني هو : $\frac{(-1)^1\times 1!}{x^{1+1}}=-\frac{1}{x^2}$

وبالتالي فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني . إذن : p_1 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n\times n!}{x^{n+1}}$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}\times(n+1)!}{x^{n+2}}$

لدينا : $f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]'=\left[\dfrac{(-1)^n\times n!}{x^{n+1}}\right]'=\dots=\dfrac{(-1)^{n+1}\times(n+1)!}{x^{n+2}}$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

- إذن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n\times n!}{x^{n+1}}$.

تمارين غير محلولة

تمرين 1:

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

① $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

② $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

③ $1\times1!+2\times2!+3\times3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$

④ $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

⑤ $2^n[1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)]=\dfrac{(2n)!}{n!}$

تمرين 2 :

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

① $2^{n+1}+3^{3n+1}$ يقبل القسمة على 5 .

② $3^{2n+2}-2^{n+1}$ مضاعف للعدد 7 .

③ $3^{2n}+2^{6n-5}$ يقبل القسمة على 11 .

④ n^3-n مضاعف للعدد 3 .

تمرين 3 :

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq5$: $2^n>n^2$

② برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq4$: $3^n>n^3$

③ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$(1+\alpha)^n\geq1+\alpha n$ ، α عدد طبيعي .

④ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$(\alpha+1)^n-\alpha n-1$ يقبل القسمة على α^2 ، α عدد طبيعي غير معدوم .

تمرين 4 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=a \text{ ، } a\in\mathbb{R} \\ u_{n+1}=2u_n-1 \text{ من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} \end{cases}$$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

1. إذا كان $a=1$ ، المتتالية (u_n) ثابتة .
2. إذا كان $a=2$ ، المتتالية (u_n) متزايدة تماما .
3. إذا كان $a=0$ ، المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

تمرين 5 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=2u_n+1-n \end{cases}$$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \geq n$

تمرين 6 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2+u_n^2} \end{cases}$$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \geq 0$

تمرين 7 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{1+u_n^2}{2u_n} \end{cases}$$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>0$.
2. برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 .
3. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها .

تمرين 8 :

θ عدد حقيقي من المجال $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ ، (u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=2\cos\theta \\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n} \end{cases}$$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

1 احسب u_1 ، u_2 .

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

تمرين 9 :

1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\cos(\theta)\times\cos(2\theta)\times\cos(2^2\theta)\times\ldots\times\cos(2^n\theta) = \frac{\sin(2^{n+1}\times\theta)}{2^{n+1}.\sin\theta}$$

حيث $\theta \neq 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$\sin(\theta)+\sin(2\theta)+\sin(3\theta)+\ldots+\sin(n\theta) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\sin\frac{n}{2}\theta$$

حيث $\theta \neq 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

تمرين 10 :

a و b عددان حقيقيان ، n عدد طبيعي .

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n-1}{1}a^{n-1}b + \binom{n-2}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

تذكير : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ، $n! = n(n-1)(n-2)\times\ldots\times 1$

تمرين 11 :

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

1 احسب $f'(x)$ و $f''(x)$. (f' و f'' هما على الترتيب الدالة المشتقة الأولى و الدالة المشتقة الثانية للدالة f)

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}$. ($f^{(n)}$ هي الدالة المشتقة النونية للدالة f)