تيسير الرياضيات لطلاب البكالوريا

الشعب الآدبية

شعبة آداب وفلسفة – شعبة آداب و لغات

للأستاذ: حيمان جمال

HIMANE DJAMEL

أستاذ مادة الرياضيات بمتقن بلقاسم الوزري البليدة

السنة الدراسية 2018 -2019

كلمة المؤلف

باسم الله الرحمن الرحيم و الحمد لله رب العالمين الذي و فقنا و يسّر لنّا من أمره رشدا ثم الصلاة و السلام على أشرف المرسلين محمد ابن عبد الله الذي هدى الله به الأمة و أنار به الظلمة و بعد:

يسّرنا التقدم بين أيديكم هذا الكتاب و هو قيد التأليف و لأول مرة نسعى إلى تيسير و تسهيل مادة الرياضيات لكل المستويات بمختلف الشعب و نخص منها الشعب الأدبية التي يعاني طلابها من التحكم في مادة الرياضيات رغم سهولتها و بساطتها و التي ترجع إلى عدة أسباب و عوامل و من أبرزها النظرة السّلبية للمادة من طرف منتسبي الشعب الأدبية و التحّجج بتخصصاتهم الأدبية دون أي محاولة لدراسة هذه المادة فهم يقنعون أنفسهم بالفشل و عدم الفهم لأشياء هم أصلا لم يسألوا عنها أي أنهم لم يدركوا ما فهموا وما لم يفهموا فهم يكتسبون غباوة و بلّادة يعمّم تأثيرها على بقية المواد الأدبية كاللغّات التي نخص بالذكر الجانب البلاغي و التركيبي على سبيل المثال الإعراب و ما يرافقه من كوارث ناتجة بالأساس عن فقدان الذكاء و الحنكة التي نلتمسها في المحتوى الرياضي. فأول سبب يجب أن يعالج هو الجانب النفسي اتجاه المادة و فائدتها و تأثيرها حتى و إن تنوعت و اختلفت تخصصاتهم المتفرعة عن الشعب الادبية لدى التحاقهم بمقاعد الجامعة إلا و نتلمس حضورا لهذه المادة بطريقة أو بأخرى.

ثانيا طرق تقديم دروس هذه المادة بما يتوافق مع الإمكانيات المادية و البشرية التي تنسجم مع مستوى الطلاب من دون إجهاد أو صراعا مع الزمن لإنهاء البرامج التي

تحتاج لمراجعات نوعا و كماّ و مدى نجاعتها و ملائمتها لخصوصيات التعليم في بلادنا.

كما ننّوه أن هذه الطبعة تعد الأولى و لا ريب في احتواءها على أخطاء سواء كانت مطبعية أو لغوية أو حتى عّلمية فعلى الفاعلين في هذا المجال مراسلتنا لتصحيح و تصويب هذه الأخطاء أو الإفادة بأفكار أو حتى بمؤلفات مماثلة لخدمة و تيسير الدراسة بمختلف المستويات و التخصصات و لما لّا تعميمها على باقي المواد كما نذّكر أن هذا المحتوى متّاح بإذن من المؤلف مجّانا بصيغته الإلكترونية سواء للطلبة أو الأساتذة لاستغلاله درّاسة أو تدريسّا أو في المجال البحثي فما على الطلّبة طبعه على شكل كتاب أو مذكرة قصد تسهيل قراءته بانتظام فهو أفضل من الحاسوب الذي يشغُل مستعمله عن التركيز المستمر كما نذّكر أنه على الطلبة الالتزام بالمقرر الدراسي الذي يحدده أستاذهم في الثّانوية التي يدرسون بها و يبقى حل التمارين و الحوليّات خيّارا أساسيا لا بديل عنه و وفقكم الله لكل ما هو فيه خير.

و في الاخير لا تنسونا من صالح دعائكم لنّا و لوالدينّا و لأئمة المسلمين و عامتهم و السّلام عليكم و رحمة الله و بركاته.

القسمة الإقليدية في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

تذكير و بناء المفاهيم

تعريف مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

نسمي مجموعة **الأعداد الطبيعية** $\mathbb{N}$ المجموعة المحّصل عليها **بإضافة العدد 1** إلى **العدد 0** ثم إضافة **1 باستمرار** إلى العدد الناتج و هكذا نحصل على مجموعة **غير منتهية** و **أصغر عنصر** فيها هو **0**.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, \dots \dots \dots\}$$

خواص مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

1. **محدودة من الأسفل أي لها أصغر عنصر و هو الصفر 0.**
2. **مجموعة غير منتهية أي ليس لها عنصر أكبر يحدها.**
3. **مجموع عددين طبيعيين هو دائما عدد طبيعي.**
4. **الفرق بين عددين طبيعيين ليس دائما عدد طبيعي.**
5. **جداء عددين طبيعيين هو دائما عدد طبيعي.**
6. **قسمة عدد طبيعي على عدد طبيعي غير معدوم ليس دائما عدد طبيعي.**

تطبيق 01: متى يكون الفرق بين العددين الطبيعيين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ أي: $\boldsymbol{a-b}$ عددا طبيعيا؟.

الجواب: يكون الفرق بين العددين الطبيعيين $\boldsymbol{a-b}$ عددا طبيعيا إذا وفقط إذا كان العدد a **أكبر أو يساوي** العدد b أي: $a \geq b$ مثال $10 - 7 = 3$.

ملاحظة: إذا كان الفرق بين العددين الطبيعيين $a - b$ **سالبا** نقول عنه هو عدد **صحيح نسبي سالب**. كذلك الأعداد الطبيعية هي أعداد **صحيحة نسبية موجبة**.

تطبيق 02: متى تكون قسمة طبيعي a على عدد طبيعي غير معدوم b أي: $\boldsymbol{a \div b}$ عددا طبيعيا؟.

الجواب: تكون قسمة عدد طبيعي a على عدد طبيعي غير معدوم b أي: $\boldsymbol{a \div b}$ عددا طبيعيا إذا وفقط إذا كان باقي قسمة العدد a على العدد b معدوما أي : $\boldsymbol{a = b \times k + 0}$ حيث k عدد طبيعي مثال العدد 10 يقبل القسمة على 5 لأن $10 = 5 \times 2 + 0$.

تعريف مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$:

نسمي مجموعة **الأعداد الصحيحة النسبية** $\mathbb{Z}$ المجموعة المحّصل عليها **بإضافة العدد 1 إلى العدد 0** ثم **إضافة 1 باستمرار** إلى العدد الناتج و كذلك بطرح العدد **1** باستمرار و هكذا نحصل على مجموعة **غير منتهية** و **متناظرة** بالنسبة إلى **0**.

$$\mathbb{Z} = \{\dots \dots ., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots .\}$$

خواص مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$:

1. **غير محدودة لا من الأسفل و لا من الأعلى** أي ليس لها أصغر عنصر أو أكبر عنصر.
2. **مجموعة غير منتهية و مركزها الصفر أي متناظرة بالنسبة إلى 0.**
3. **يسمى كل عدد صحيح نسبي a – نظير أو معاكس العدد الصحيح النسبي a.**
4. **مجموع و فرق و جداء عددين صحيحين هو دائما عدد صحيح نسبي.**
5. **قسمة عدد صحيح نسبي على عدد صحيح نسبي غير معدوم ليس دائما عدد صحيحا معدوما.**

تطبيق 03: متى تكون قسمة عدد صحيح نسبي a على عدد صحيح نسبي غير معدوم b أي: $\boldsymbol{a \div b}$ عددا صحيحا نسبيا ؟.

الجواب: تكون قسمة عدد صحيح نسبي a على عدد صحيح نسبي غير معدوم b أي: $\boldsymbol{a \div b}$ عددا صحيحا نسبيا إذا وفقط إذا كان باقي قسمة العدد a على العدد b معدوما أي : $\boldsymbol{a = b \times k + 0}$ حيث k عدد صحيح نسبي مثال العدد -35 يقبل القسمة على 7 لأن $-35 = 7 \times (-5) + 0$.

ملاحظة: نسمي قسمة عدد صحيح نسبي a على عدد صحيح نسبي غير معدوم b أي: $\boldsymbol{a/b}$ عددا ناطقا. و يمكننا تعريف مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ بمجموعة الأعداد التي تكتب على شكل نسبة أو كسر يكون فيه **البسط** و **المقام** عددين صحيحين نسبيين و نخص بالذكر المقام غير معدوم أي لا يساوي الصفر.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

تحذير: حذار المقام أبدا لا يكن معدوما أي لا يساوي الصفر لأن الصفر لا يقسم أي عدد فالكتابة $\boldsymbol{\frac{a}{0}}$ خاطئة مهما كانت قيمة العدد $\boldsymbol{a}$ بينما الكتابة $\boldsymbol{\frac{0}{b}}$ صحيحة و تساوي $\boldsymbol{0}$ مهما كانت قيمة العدد $\boldsymbol{b}$ المختلفة عن الصفر.

تذكير:

1. الرمز $\mathbb{N}^*$ يشير إلى مجموعة الأعداد **الطبيعية** الغير معدومة.
2. الرمز $\mathbb{Z}^*$ يشير إلى مجموعة الأعداد **الصحيحة النسبية** الغير معدومة.
3. الرمز $\mathbb{D}^*$ يشير إلى مجموعة الأعداد **العشرية** الغير معدومة.
4. الرمز $\mathbb{Q}^*$ يشير إلى مجموعة الأعداد **الناطقة** الغير معدومة.
5. الرمز $\mathbb{R}^*$ يشير إلى مجموعة الأعداد **الحقيقية** الغير معدومة.

6. الرمز $\in$ يشير إلى **الانتماء** و يستخدم لعنصر أو عدة عناصر منفردة تنتمي إلى مجموعة مثال $\mathbf{1} \in \mathbb{N}$ و نقرأ العدد $\mathbf{1}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية كذلك $\mathbf{5, -3, \frac{1}{2}} \in \mathbb{Q}$ و نقرأ الأعداد $\mathbf{5, -3, \frac{1}{2}}$ تنتمي إلى مجموعة الأعداد الناطقة.
7. يجب أن نفرق بين عنصر منفرد و مجموعة تحتوي على عنصر وحيد مثال: $\mathbf{1} \in \mathbb{N}$ و نقرأ العدد $\mathbf{1}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية بينما الكتابة $\{1\} \subset \mathbb{N}$ و نقرأ المجموعة المكونة من العدد $\mathbf{1}$ محتواة في مجموعة الأعداد الطبيعية.
8. نرمز إلى المجموعة الخالية بالرمز $\emptyset$ أو بالرمز $\{\ \}$ و هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر.
9. الرمز $\subset$ يشير إلى **الاحتواء** و يستخدم لمجموعة أو عدة مجموعات **محتواة** في مجموعة (أي توجد بداخلها) مثال $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ و نقرأ مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية كذلك لدينا

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

10. الرمز $\cap$ يشير إلى **التقاطع** و يستخدم لتقاطع مجموعتين أو عدة مجموعات و هي مجموعة **العناصر المشتركة** بين هذه المجموعات (أي تنتمي إلى تلك المجموعات في آن واحد) مثال $\mathbb{R}^{+} \cap \mathbb{R}^{-} = \{0\}$ و لدينا أيضا مجموعة قواسم العدد الطبيعي 21 هي $d_{21} = \{1,3,7,21\}$ و مجموعة قواسم العدد الطبيعي 15 هي $d_{15} = \{1,3,5,15\}$ و مجموعة قواسم العدد الطبيعي 3 هي $d_3 = \{1,3\}$ و عليه مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين 15 و 21 هو مجموعة قواسم قاسمهما المشترك 3 علما أن $pgcd(15,21) = 3$ أي $d_{15} \cap d_{21} = d_3$.

11.الرمز $\cup$ يشير إلى **الإتحاد** و يستخدم لإتحاد مجموعتين أو عدة مجموعات و هي مجموعة **العناصر المشتركة و الغير مشتركة مأخوذة مرة واحدة من دون تكرار** بين هذه المجموعات (أي تنتمي إلى إحدى هذه المجموعات و ليس بالضرورة كلها) مثال $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$ و لدينا أيضا مجموعة قواسم إحدى العددين الطبيعيين 15 أو 21 هي:

$$d_{15} \cup d_{21} = \{1,3,5,7,15,21\}$$

12. لغتّا نعبر عن التقاطع بحرف العطف "و" أو أي أداة تفيد المشاركة و نعبر عن الإتحاد بحرف العطف "أو" أو أي أداة تفيد الاختيار بين شيئين يمكن الجمع بينهما.

القسمة الإقلدية في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

تعريف العدد الطبيعي التام (عدد مثالي):

نسمي **عددا طبيعيا تاما** **كل عدد طبيعي** n مجموع كل قواسمه الأصغر منه تماما يساوي ذاك العدد n.

مثال 01: العدد 6 هو **عدد تام** لأن مجموع قواسمه المختلفة عنه هو 6

$d_6 = \{1,2,3,6\}$ و $1 + 2 + 3 = 6$

مثال 02: العدد 28 هو **عدد تام** لأن مجموع قواسمه المختلفة عنه هو 28

$d_{28} = \{1,2,4,7,14,28\}$ و $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

تطبيق 04: بإتباع نفس الطريقة بين أن العددين 496 و 8128 **عددين تامين**.

تعريف العددين الطبيعيين المتحابين (العددان المتراضيان):

نقول عن عددين أنهما **متحابان** إذا كان مجموع القواسم المختلفة لأي منهما يساوى العدد الآخر. مثال ذلك : العددان 220 و 284 **متحابان** حيث أن مجموع قواسم العدد 220 هو: $\mathbf{1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284}$

في حين أن مجموع قواسم العدد 284 هو : $\mathbf{1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220}$

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

تعريف: a و b عددان صحيحان نسبيان و b غير معدوم. القول أن العدد b يقسم العدد a يعني وجود عدد صحيح k حيث: $a = b \times k$ نقول كذلك أن b قاسم للعدد a أو أن a مضاعف للعدد .

نكتب $\boldsymbol{b \mid a}$ ونقرأ $\boldsymbol{b}$ يقسم .

أمثلة:

- $48 = 8 \times 6$ نقول أن 8 قاسم للعدد 48 أو أن 48 مضاعف للعدد 8 .
- $48 = (-8) \times (-6)$ نقول أن -6 قاسم للعدد 48 أو أن 48 مضاعف للعدد -6 .
- $-6 = (-3) \times 2$ نقول أن -3 قاسم للعدد -6 أو أن -6 مضاعف للعدد -3 .
- $n = n \times 1$ نقول أن **1 قاسم لجميع الأعداد و كل عدد يقسم نفسه.**
- $0 = n \times 0$ نقول أن كل الأعداد الصحيحة النسبية غير معدومة تقسم 0 .
- **حذار الصفر لا يقسم أي عدد.**

ملاحظة: للعددين الصحيحين النسبيين $\boldsymbol{a}$ و $-\boldsymbol{a}$ نفس القواسم في المجموعة $\mathbb{Z}$ أي

$a = b \times k$ و $-a = b \times (-k)$.

القسمة الإقلدية في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$:

سميت **بالقسمة الإقلدية** نسبة إلى عالم الرياضيات اليوناني **إقليدس** الذي ولد سنة 300 قبل الميلاد و عاش في مدينة الإسكندرية المصرية و تتألف عملية القسمة الإقليدية من العدد الصحيح النسبي $\mathbf{a}$ الذي يسمى **المقسوم** و العدد الصحيح النسبي الغير معدوم $\mathbf{b}$ و يسمى **القاسم** و عادة ما يكون طبيعيا و من العدد الصحيح النسبي $\mathbf{q}$ الذي يسمى **حاصل قسمة** و العدد الطبيعي $\mathbf{r}$ الذي يسمى **الباقي** و هو أصغر تماما من القيمة الموجبة للعدد b .

- نسمي الكتابة $\boldsymbol{a = b \times q + r}$ حيث : $\boldsymbol{|b| > r \geq 0}$ **بالكتابة الأفقية** للقسمة الإقلدية.
- نسمي الشكل الموافق **بالكتابة العمودية** للقسمة الإقلدية.

القاسم	**المقسوم**
حاصل القسمة	**الباقي**

مثال: القسمة الإقليدية للعدد **115** على **12** هي: $\mathbf{115 = 12 \times 9 + 7}$

$$\begin{array}{r|l} 115 & 12 \\ \cline{2-2} -\;108 & 9 \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

أي حاصل قسمة و باقي قسمة العدد **115** على **12** هما **9** و **7** على التوالي.

تطبيق 05: بإتباع نفس الطريقة عين حاصل قسمة و باقي قسمة العدد **89−** على **8** و العدد **220** على **10**.

ملاحظة: إذا كان باقي قسمة $\boldsymbol{a}$ على $\boldsymbol{b}$ يساوي الصفر نقول $\boldsymbol{b}$ يقسم $\boldsymbol{a}$.

خوارزمية أقليدس لتحديد القاسم المشترك الأكبر

تعريف : خوارزمية أقليدس هي تقنية تمكننا من تحديد القاسم المشترك الأكبر بين عددين صحيحين نسبيين طبيعيين.

الطريقة : نعتبر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عددين صحيحين نسبيين طبيعيين بحيث $\mathbf{a} < b$.
نقوم بقسمة $\mathbf{b}$ على $\mathbf{a}$ و ليكن الباقي هو $\mathbf{r_1}$ ثم نقوم بقسمة $\mathbf{a}$ على $\mathbf{r_1}$ و ليكن الباقي هو $\mathbf{r_2}$ ثم نقوم بقسمة $\mathbf{r_1}$ على $\mathbf{r_2}$ و لنعتبر أن الباقي هو $\mathbf{r_3}$ ثم نقسم $\mathbf{r_2}$ على $\mathbf{r_3}$ و نكرر العملية حتى يكون الباقي هو **0**.
القاسم المشترك الأكبر ل $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هو **اخر باقي غير معدوم**.

مثال: القاسم المشترك للعددين الطبيعيين 252 و 855 هو: **9**

$$855 = 3 \times 252 + 99$$

$$252 = 2 \times 99 + 54$$

$$99 = 1 \times 54 + 45$$

$$54 = 1 \times 45 + 9$$

$$45 = 5 \times 9 + 0$$

أخر باقي غير معدوم هو: 9 أي: $\boldsymbol{pgcd(855, 252) = 9}$

نتيجة: إذا كان العدد الطبيعي **a** يقسم العدد الطبيعي الغير معدوم **b** فإن القاسم المشترك الأكبر لهما هو العدد **a** لأن العدد **a** يمثل أخر باقي غير معدوم لخوارزمية إقليدس لقسمة العدد **b** على **a** أي: $\mathbf{b = a \times q + 0}$

مثال: القاسم المشترك الأكبر للعددين 322 و 966 هو: 322 لأن 322 يقسم 966.

الحصر بين عددين مضاعفين متعاقبين لعدد صحيح:

ليكن a عدد صحيح نسبي و b عدد صحيح نسبي غير معدوم و q حاصل قسمة a على b أي $a = b \times q + r$ نسمي حصرا للعدد الصحيح a بين مضاعفين متعاقبين للعدد الصحيح b الكتابة التالية

$$\boldsymbol{b \times q \leq a < b \times (q+1)}$$

مثال: $120 > 115 \leq 108$ هو حصر للعدد 115 بين مضاعفين متتاليين

للعدد الصحيح 12 لأن: $\mathbf{12 \times 9 = 108 \leq 115 < 120 = 12 \times 10}$

وهذا بأخذ $\boldsymbol{a = 115}$ و $\boldsymbol{b = 12}$ و $\boldsymbol{q = 9}$

تمرين محلول 01:

عين باقي قسمة العدد الصحيح a على العدد الطبيعي b ثم عين حصرا للعدد a بين مضاعفين متعاقبين للعدد b في كل حالة من الحالات الآتية:

i. $a = 8159$ و $b = 52$.

ii. $a = 725$ و $b = 91$.

iii. $a = -7361$ و $b = 47$.

الحل:

I. $8159 = 52 \times 156 + 47$ أي 156 هو حاصل قسمة 8159 على 52 و 47 هو باقي القسمة. إذن $52 \times 156 \leq 8159 < 52 \times 157$

أي $8112 \leq 8159 < 8164$.

II. $725 = 91 \times 7 + 88$ أي 7 هو حاصل قسمة 725 على 91 و 88 هو باقي القسمة. إذن $91 \times 7 \leq 725 < 91 \times 8$

أي $637 \leq 8159 < 728$.

III. $-7361 = 47 \times (-157) + 18$ أي (-157) هو حاصل قسمة -7361 على 47 و 18 هو باقي القسمة.

إذن $47 \times (-157) \leq -7361 < 47 \times (-156)$

أي $-7379 \leq -7361 < -7332$.

تمرين محلول 02:

ليكن a عدد الصحيح باقي قسمته على 21 هو 15.

i. ما هو باقي قسمة العدد على 7 ؟

ii. ما هو باقي قسمة العدد على 3 ؟

الحل: باقي قسمة العدد a على 21 هو 15 معناه يوجد عدد صحيح $\boldsymbol{q}$

(حاصل قسمة $\boldsymbol{a}$ على $\mathbf{21}$) حيث: $\boldsymbol{a} = \mathbf{21} \times \boldsymbol{q} + \mathbf{15}$

i. و عليه $\boldsymbol{a} = \mathbf{21} \times \boldsymbol{q} + \mathbf{15}$ تكافئ $\boldsymbol{a} = \mathbf{7} \times (\mathbf{3} \times \boldsymbol{q}) + \mathbf{7} \times \mathbf{2} + \mathbf{1}$ و

منه $\boldsymbol{a} = \mathbf{7} \times (\mathbf{3} \times \boldsymbol{q} + \mathbf{2}) + \mathbf{1}$ أي باقي قسمة $\boldsymbol{a}$ على $\mathbf{7}$ هو $\mathbf{1}$.

ii. و عليه $\boldsymbol{a} = \mathbf{21} \times \boldsymbol{q} + \mathbf{15}$ تكافئ $\boldsymbol{a} = \mathbf{3} \times (\mathbf{7} \times \boldsymbol{q}) + \mathbf{3} \times \mathbf{5}$ و

منه $\boldsymbol{a} = \mathbf{3} \times (\mathbf{7} \times \boldsymbol{q} + \mathbf{5}) + \mathbf{0}$ أي باقي قسمة $\boldsymbol{a}$ على $\mathbf{3}$ هو $\mathbf{0}$.

الأعداد الأولية و تطبيقاتها

التذكير بتعريف العدد الطبيعي الأولي: نسمي عددا طبيعيا أكبر تماما من **1** **بالعدد الأولي** إذا كان له قاسمان مختلفان فقط و هما العدد **1** و العدد نفسه.

ملاحظات:

1. أصغر عدد أولي هو **2**.
2. العدد **1** ليس أولي لأن له قاسم و حيد و هو نفسه.
3. العدد **0** ليس أوليا لأن له ما لا نهاية من القواسم.
4. العدد الذي ليس أوليا يسمى عددا **مركبا**.
5. يوجد عدد غير منتهي من الأعداد الأولية (مبرهنة إقليدس).
6. كل عدد طبيعي أكبر تماما من **1** إما هو عدد أولي أو جداء عوامل طبيعية أولية (النظرية الأساسية في الحساب).
7. الأعداد الأولية الأصغر من مئة هي: 2. 3 . 5 . 7 . 11 . 13. 17 . 19 . 23 . 29 . 31. 37 . 41 . 43 . 47 . 53 . 59 . 61. 67 . 71 . 73 . 79 . 83 . 89 . 97 .
8. لإثبات عدد طبيعي أنه **ليس أولي** يكفي إيجاد قاسم لهذا العدد مختلف تماما عن الواحد و العدد نفسه مثال العدد **21** ليس أولي لأنه يقبل **7** كقاسم مختلف عن **1** و **21** .
9. لإثبات عدد طبيعي أنه **أولي** يكفي إثبات أن لا يقبل قاسم أصغر من جذره التربيعي سوى العدد **1** مثال **19** عدد أولي لأن $\sqrt{19} \approx 4,36$ بينما الأعداد الأولية الأصغر منه و هي **2** و **3** لا تقسم **19** و عليه **19** عدد أولي (تسمى هذه الخاصية بخاصية **إيراطوستان**).

تطبيق 06: أدرس أولية الأعداد الطبيعية التالية: **109 ، 127 ، 201 ، 45 ،999.**

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل طبيعية أولية:

ليكن n عدد طبيعيا أكبر تماما من الواحد $(2 \leq n)$ فيكون حسب النظرية الأساسية في الحساب إما هو عدد أولي أو يفكك إلى جداء عوامل أولية طبيعية أي بعبارة أخرى إذا كان n عدد ليس أوليا فإن تفكيكه إلى جداء عوامل طبيعية أولية تسمى عملية التحليل إلى جداء عوامل أولية طبيعية ، و للقيام بهذه العملية نقوم بقسمة العدد الطبيعي n على مجموعة الأعداد الأولية مرتبة تصاعديا بدءا من العدد 2 إلى آخر عدد أولي يقسم العدد n فإذا قبل القسمة على العدد 2 نكرر العملية و إذا لم يقبل نمر إلى العدد الأولي الذي بعده و هو 3 ثم نكرر نفس الإجراء مع باقي الأعداد الأولية 5 ، 7، 11 ...... إلخ. إلى غاية حصولنا على العدد 1 و هنا تتوقف العملية.

تطبيق 07: حلل إلى جداء عوامل طبيعية أولية العدد 720.

الحل:

نستعين بالكتابة العمودية لإجراء عمليات القسمة المتتابعة على الأعداد الأولية كما في الشكل المقابل حيث نقوم بقسمة **720** على **2** نحصل على **360** و بقسمة **360** على **2** نحصل على **180** و بقسمة **180** على **2** نحصل على **90** و بقسمة **90** على **2** نحصل على **45** و بما أن **45** لا يقبل القسمة على **2** نمر للعدد الأولي الذي بعده و هو **3** و بقسمة **45** على **3** نحصل على **15** و بقسمة **15** على **3** نحصل على **5** و بما أن **5** لا يقبل القسمة على **3** نمر للعدد الأولي الذي بعده و هو **5** و بقسمة **5** على **5** نحصل على **1** و هنا تتوقف عملية القسمة لحصولنا على العدد **واحد.**

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

كما يمكننا كتابة التحليل أفقيا كما يلي: $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

أي المعامل 2 أربع مرات و المعامل 3 مرتين و المعامل 5 مرة واحدة.

تطبيق 08: بنفس الطريقة حلل إلى جداء عوامل طبيعية أولية الأعداد 25000 و 257 و 1024 و 510510.

تطبيقات التحليل إلى جداء عوامل طبيعية أولية:

I. تعين عدد قواسم عدد طبيعي :

ليكن n عدد طبيعيا أكبر تماما من الواحد $(2 \leq n)$ فيكون تحليله حسب النظرية الأساسية في الحساب من الشكل:

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_r^{a_r}$$

حيث: p_1 ، p_2 ، ...... p_r أعداد طبيعية أولية متمايزة مثنى مثنى (مختلفة عن بعضها البعض) و a_1 ، a_2 ، ...... a_r أعداد طبيعية علما أن r عدد طبيعي غير معدوم. فيكون **عدد قواسم** العدد الطبيعي n **هو بالضبط الجداء**

$$(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \dots \times (a_r + 1)$$

مثال: تحليل العدد 720 هو كما يلي: $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

وعليه عدد قواسم العدد 720 هو الجداء $(4+1) \times (2+1) \times (1+1)$

و يساوي الجداء $30 = 5 \times 3 \times 2$

تطبيق 09: بنفس الطريقة عين عدد قواسم الأعداد الطبيعية 25000 و 257 و 1024 و 510510.

حل مختصر للتطبيق 09:

عدد قواسم العدد الطبيعي 25000 هو بالضبط 24.

عدد قواسم العدد الطبيعي 257 هو بالضبط 2.

عدد قواسم العدد الطبيعي 1024 هو بالضبط 11.

عدد قواسم العدد الطبيعي 510510 هو بالضبط 128.

II. تعين مجموعة قواسم عدد طبيعي :

ليكن n عدد طبيعيا أكبر تماما من الواحد $(2 \leq n)$ فيكون تحليله حسب النظرية الأساسية في الحساب من الشكل:

$$n = p_1{}^{a_1} \times p_2{}^{a_2} \times \dots . \times p_r{}^{a_r}$$

عند قيامنا بتعويض a_1 بأي عدد طبيعي محصور بين 0 و a_1 في الجداء السابق نتحصل على قاسم طبيعي للعدد n و بتكرار العملية مع جميع الأعداد $a_1, a_2, \dots, a_r$ في آن واحد نجد كل قواسم العدد الطبيعي n و التي عددها بالضبط

$$(a_1+1) \times (a_2+1) \times \dots . \times (a_r+1)$$

مثال: تحليل العدد 720 هو كما يلي: $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

وعليه عدد قواسم العدد 720 هو الجداء $(4+1) \times (2+1) \times (1+1)$

و يساوي الجداء $30 = 5 \times 3 \times 2$ و هي كتالي:

$$d_1 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 = 1$$

$$d_2 = 2^0 \times 3^0 \times 5^1 = 5$$

$$d_3 = 2^0 \times 3^1 \times 5^0 = 3$$
$$d_4 = 2^0 \times 3^1 \times 5^1 = 15$$
$$d_5 = 2^0 \times 3^2 \times 5^0 = 9$$
$$d_6 = 2^0 \times 3^2 \times 5^1 = 45$$
$$d_7 = 2^1 \times 3^0 \times 5^0 = 2$$
$$d_8 = 2^1 \times 3^0 \times 5^1 = 10$$
$$d_9 = 2^1 \times 3^1 \times 5^0 = 6$$
$$d_{10} = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 = 30$$
$$d_{11} = 2^1 \times 3^2 \times 5^0 = 18$$
$$d_{12} = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 90$$
$$d_{13} = 2^2 \times 3^0 \times 5^0 = 4$$
$$d_{14} = 2^2 \times 3^0 \times 5^1 = 20$$
$$d_{15} = 2^2 \times 3^1 \times 5^0 = 12$$
$$d_{16} = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$$
$$d_{17} = 2^2 \times 3^2 \times 5^0 = 36$$
$$d_{18} = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 180$$
$$d_{19} = 2^3 \times 3^0 \times 5^0 = 8$$
$$d_{20} = 2^3 \times 3^0 \times 5^1 = 40$$
$$d_{21} = 2^3 \times 3^1 \times 5^0 = 24$$
$$d_{22} = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 = 120$$
$$d_{23} = 2^3 \times 3^2 \times 5^0 = 72$$
$$d_{24} = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$$
$$d_{25} = 2^4 \times 3^0 \times 5^0 = 16$$
$$d_{26} = 2^4 \times 3^0 \times 5^1 = 80$$
$$d_{27} = 2^4 \times 3^1 \times 5^0 = 48$$
$$d_{28} = 2^4 \times 3^1 \times 5^1 = 240$$
$$d_{29} = 2^4 \times 3^2 \times 5^0 = 144$$

$$d_{30} = 2^{4} \times 3^{2} \times 5^{1} = 720$$

و بترتيبها نحصل على كل قواسم 720 و هي:

d(720)={1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,20,24,30,36,40

,45,48,60,72,80,90,120,144,180,240,360,720}.

تطبيق 10: بنفس الطريقة عين قواسم العدد الطبيعي 126.

حل تطبيق 10: لدينا تحليل العدد 126 إلى جداء عوامل أولية طبيعية هو:

$$126 = 2^{1} \times 3^{2} \times 7^{1}$$

وعليه عدد قواسم العدد 126 هو الجداء $(1+1) \times (2+1) \times (1+1)$

و يساوي الجداء $2 \times 3 \times 2 = 12$ و هي كتالي:

$$d_1 = 2^{0} \times 3^{0} \times 7^{0} = 1$$
$$d_2 = 2^{0} \times 3^{0} \times 7^{1} = 7$$
$$d_3 = 2^{0} \times 3^{1} \times 7^{0} = 3$$
$$d_4 = 2^{0} \times 3^{1} \times 7^{1} = 21$$
$$d_5 = 2^{0} \times 3^{2} \times 7^{0} = 9$$
$$d_6 = 2^{0} \times 3^{2} \times 7^{1} = 63$$
$$d_7 = 2^{1} \times 3^{0} \times 7^{0} = 2$$
$$d_8 = 2^{1} \times 3^{0} \times 7^{1} = 14$$
$$d_9 = 2^{1} \times 3^{1} \times 7^{0} = 6$$
$$d_{10} = 2^{1} \times 3^{1} \times 7^{1} = 42$$
$$d_{11} = 2^{1} \times 3^{2} \times 7^{0} = 18$$
$$d_{12} = 2^{1} \times 3^{2} \times 7^{1} = 126$$

و بترتيبها نتحصل على كل قواسم **126** و هي:

$$d(126)=\{1,2,3,6,7,9,14,18,21,42,63,126\}.$$

تطبيق 11: بنفس الطريقة عين قواسم الأعداد الطبيعية 78125 و 9999 و 1024 و 5491.

III. تعين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

التذكير بتعريف القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين. نسمي مجموعة القواسم المشتركة لهذين العددين هي مجموعة كل الأعداد الطبيعية التي تقسم العددين a و b في آن واحد و عليه هذه المجموعة ليست خالية (فارغة) لأن العدد **1** دائما قاسم مشترك للعددين a و b و نسمي أكبر عنصر في هذه المجموعة **بالقاسم المشترك الأكبر** للعددين a و b ونرمز له بالرمز $pgcd(a,b)$.

ملاحظات:

1. إذا كان $pgcd(a,b)=1$ نقول عن العددين الطبيعيين a و b أنهما **أوليان فيما بينهما** **مثال:** 17 و 19 أوليان فيما بينهما لأن $pgcd(17,19)=1$.
2. **حذار ! القاسم المشترك الأصغر** للعددين الطبيعيين a و b هو دائما العدد **1**.
3. مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.
4. يمكننا تعيين **القاسم المشترك الأكبر** للعددين a و b بواسطة **خوارزمية إقليدس** (بالقسمة أو بالطرح المتتالي) و كذلك بالتحليل إلى جداء عوامل أولية طبيعية.
5. $pgcd(b,a)=pgcd(a,b)$ (تبديلي أي ترتيب العددين غير مهم)
6. إذا كان العدد الطبيعي a يقسم العدد الطبيعي b فإن $pgcd(a,b)=a$.

تطبيق 12: عين مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين الكيفيين x و y

علما أن قاسمهما المشترك الأكبر هو **24**.

الحل : نحن نعلم أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين x و y هي

مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر و عليه هي مجموعة قواسم **24** .

$$d(24)=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

تعين القاسم المشترك الأكبر باستخدام التحليل :

ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين حيث تحليلهما إلى جداء عوامل أولية

يعطى من الشكل:

$$b = q_1^{b_1} \times q_2^{b_2} \times \ldots \times q_s^{b_s} \quad \text{و} \quad a = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_r^{a_r}$$

حيث: p_1 ، p_2 ، ...... p_r (q_1 ، q_2 ، ...... q_s على التوالي) أعداد طبيعية أولية

متمايزة مثنى مثنى (مختلفة عن بعضها البعض) و a_1 ، a_2 ، ...... a_r (b_1 ، b_2 ، ......

b_s على التوالي) أعداد طبيعية علما أن r و s عددين طبيعيين غير معدومين.

و عليه

القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين a و b هو جداء كل عواملها المشتركة المأخوذة بأصغر أس و من دون تكرار.

مثال: القاسم المشترك الأكبر للعددين **3500** و **7500** هو **500**.

تحليل العدد 7500 هو $7500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^4$

تحليل العدد 3500 هو $3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7^1$

نلاحظ جداء العوامل المشتركة المأخوذة بأصغر أس هو $500 = 2^2 \times 5^3$

تطبيق 13: عين القاسم المشترك الأكبر للعددين **2040** و **6500** بثلاث طرق مختلفة.

الحل : **الطريقة الأولى: (التحليل إلى جداء عوامل أولية)**

تحليل العدد 6500 هو $6500 = 2^2 \times 5^3 \times 13^1$

تحليل العدد 2040 هو $2040 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1$

نلاحظ جداء العوامل المشتركة المأخوذة بأصغر أس هو $20 = 2^2 \times 5^1$

وعليه القاسم المشترك الأكبر للعددين **6500** و **2040** هو **20**.

الطريقة الثانية: (خوارزمية إقليدس " القسمة ")

$$6500 = 3 \times 2040 + 380$$

$$2040 = 5 \times 380 + 140$$

$$380 = 2 \times 140 + 100$$

$$140 = 1 \times 100 + 40$$

$$100 = 2 \times 40 + 20$$

$$40 = 2 \times 20 + 0$$

أخر باقي غير معدوم هو : 20 أي: $\boldsymbol{pgcd(2040, 6500) = 20}$

الطريقة الثالثة: (خوارزمية إقليدس " الطرح المتتالي ")

$$6500 - 2040 = 4460$$

$$4460 - 2040 = 2420$$

$$2420 - 2040 = 380$$

$$2040 - 380 = 1660$$

$$1660 - 380 = 1280$$

$$1280 - 380 = 900$$

$$900 - 380 = 520$$

$$520 - 380 = 140$$

$$380 - 140 = 240$$

$$240 - 140 = 100$$

$$140 - 100 = 40$$

$$100 - 40 = 60$$

$$60 - 40 = 20$$

$$40 - 20 = 20$$

$$20 - 20 = 0$$

أخر باقي غير معدوم هو: 20 أي: $\boldsymbol{pgcd(2040, 6500) = 20}$

IV. تعين المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين :

التذكير بتعريف المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين :

ليكن $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ عددين طبيعيين غير معدومين. نسمي مجموعة المضاعفات المشتركة لهذين العددين هي مجموعة كل الأعداد الطبيعية التي يقسمها العددين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ في آن واحد و عليه هذه المجموعة ليست منتهية (ما لا نهاية) لأن مضاعفات العدد $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ دائما هي مضاعفات مشتركة للعددين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ و نسمي أصغر عنصر غير معدوم في هذه المجموعة **بالمضاعف المشترك الأصغر** للعددين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ و نرمز له بالرمز $\boldsymbol{ppcm(a,b)}$.

ملاحظات:

1. إذا كان $ppcm(a,b) = a \times b$ نقول عن العددين الطبيعيين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ أنهما **أوليان فيما بينهما** مثال: 17 و 19 أوليان فيما بينهما لأن بالرمز $ppcm(17,19) = 17 \times 19 = 323$.
2. **حذار ! المضاعف المشترك الأصغر** للعددين الطبيعيين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ مختلف تماما عن العدد $\boldsymbol{0}$.
3. مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ هي مجموعة مضاعفات مضاعفهما المشترك الأصغر.
4. يمكننا تعيين **المضاعف المشترك الأصغر** للعددين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ بواسطة **تعيين أول تقاطع لمجموعتي مضاعفات كل من** $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ (هذه الطريقة غير فعالة مع الأعداد الكبيرة) و كذلك بالتحليل إلى جداء عوامل أولية طبيعية كما يمكننا استنتاجه بدلالة القاسم المشترك الأكبر.
5. $ppcm(b,a) = ppcm(a,b)$ (تبديلي أي ترتيب العددين غير مهم)
6. إذا كان العدد الطبيعي a يقسم العدد الطبيعي b فإن $\boldsymbol{ppcm(a,b) = b}$.

تطبيق 14: عين مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين الكيفيين x و y

علما أن مضاعفهما المشترك الأصغر هو 15.

الحل : نحن نعلم أن مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين الطبيعيين x و y هي

مجموعة مضاعفات مضاعفهما المشترك الأصغر و عليه هي مجموعة مضاعفات 15

$$M(15)=\{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, \ldots\ldots\ldots\}.$$

تعين المضاعف المشترك الأصغر باستخدام التحليل :

ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين حيث تحليلهما إلى جداء عوامل أولية

يعطى من الشكل:

$a = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_r^{a_r}$ و $b = q_1^{b_1} \times q_2^{b_2} \times \ldots \times q_s^{b_s}$

حيث: p_1 ، p_2 ، ...... p_r (q_1 ، q_2 ، ...... q_s على التوالي) أعداد طبيعية أولية

متمايزة مثنى مثنى (مختلفة عن بعضها البعض) و a_1 ، a_2 ، ...... a_r (b_1 ، b_2 ، ......

b_s على التوالي) أعداد طبيعية علما أن r و s عددين طبيعيين غير معدومين.

و عليه

المضاعف المشترك الأصغر للعددين الطبيعيين a و b هو جداء كل عواملهما المشتركة و الغير مشتركة المأخوذة بأكبر أس و من دون تكرار.

مثال: المضاعف المشترك الأصغر للعددين **3500** و **7500** هو **52500**.

تحليل العدد 7500 هو $7500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^4$

تحليل العدد 3500 هو $3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7^1$

نلاحظ جداء العوامل المشتركة و الغير مشتركة المأخوذة بأكبر أس هو

$$52500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^4 \times 7^1$$

تطبيق 15: عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين **2040** و **6500** بثلاث طرق مختلفة.

الحل : **الطريقة الأولى: (التحليل إلى جداء عوامل أولية)**

تحليل العدد 6500 هو $6500 = 2^2 \times 5^3 \times 13^1$

تحليل العدد 2040 هو $2040 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1$

نلاحظ جداء العوامل المشتركة و الغير مشتركة المأخوذة بأكبر أس هو

$$663000 = 2^3 \times 3^1 \times 5^3 \times 13^1 \times 17^1$$

وعليه المضاعف المشترك الأصغر للعددين **6500** و **2040** هو 663000.

الطريقة الثانية: (تعيين أول تقاطع لمجموعتي مضاعفات كل من 6500 و 2040)

مجموعة مضاعفات العدد الطبيعي **2040** هي:

M(2040)= {0, 2040, 4080, 6120, …… , 660960, 663000, 669500, ….. }.

مجموعة مضاعفات العدد الطبيعي **6500** هي:

M(6500)= {0, 6500, 13000, 19500, …… , 656500, 663000, 665040, ….. }.

أول تقاطع غير معدوم هو : 663000 أي:

$$ppcm(2040, 6500) = 663000$$

الطريقة الثالثة: (إستنتاجه بدلالة القاسم المشترك الأكبر)

نعلم أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 6500 و 2040 هو 20 و عليه

$$ppcm(2040, 6500) = \frac{2040 \times 6500}{20}$$

أي:

$$ppcm(2040, 6500) = 663000$$

العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

مبرهنة (نظرية): ليكن $pgcd(a, b)$ و $ppcm(a, b)$ هما القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر على التوالي للعددين الطبيعيين a و b إذن جداءهما يساوي جداء هذين العددين أي يحققان العلاقة:

$$\boxed{pgcd(a, b) \times ppcm(a, b) = a \times b}$$

تمرين محلول 03:

1. عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين **120** و 75 إذا علمت أن قاسمهما المشترك الأكبر هو **15**.
2. عين القاسم المشترك الأكبر للعددين **1530** و 255 إذا علمت أن مضاعفهما المشترك الأصغر هو **1530**.
3. أدرس قيم العددين الطبيعيين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ إذا علمت أن مضاعفهما المشترك الأصغر هو **12** و قاسمهما المشترك الأكبر هو **3**.

الحل :

1. تعين المضاعف المشترك الأصغر للعددين **120** و **75**

$$\boldsymbol{ppcm(120,75) = \frac{120\times 75}{pgcd(120,75)} = \frac{120\times 75}{15} = 600}$$

2. عين القاسم المشترك الأكبر للعددين **1530** و **255**

$$\boldsymbol{pgcd(255,1530) = \frac{255\times 1530}{ppcm(255,1530)} = \frac{255\times 1530}{1530} = 255}$$

3. دراسة قيم العددين الطبيعيين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ علما أن مضاعفهما المشترك الأصغر هو **12** و قاسمهما المشترك الأكبر هو **3**. نحن نعلم أن:

$$\boldsymbol{pgcd(a,b)\times ppcm(a,b) = a\times b = 3\times 12 = 36}$$

إذن نبحث الأعداد الطبيعية التي جداءها يساوي 36 أي: $a \times b =$

36 وعليه $a = \frac{36}{b}$ معناه a و b قاسمان للعدد 36 وتعطى مجموعة

قواسم 36 من الشكل:

$$d(36) = \{1, 2, 3, 4, 6\ , 9, 12, 18, 36\}.$$

يكون عندئذ قيم a و b تنتمي مجموعة الثنائيات التالية:

$$(a, b) \in \{(1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6)\ , (9, 4), (12, 3), (18, 2), (36, 1)\}.$$

وبما أن $pgcd(a, b) = 3$ و $ppcm(a, b) = 12$ فإن الثنائيات

الوحيدة التي تحقق المطلوب هي:

$$(a, b) \in \{(3, 12), (12, 3)\}.$$

القوى الصحيحة و خواصها

التذكير بتعريف القوى الصحيحة :

ليكن a عدد حقيقي كيفي و n عدد طبيعي غير معدوم. نسمي القوة ذات الرتبة n للعدد الحقيقي a العدد a^n حيث:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \dots . \times a}_{n \text{ عاملا}}$$

ملاحظة: من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a و n عدد طبيعي غير معدوم.

لدينا $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

اصطلاح: من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $a^0 = 1$

أمثلة:

1. $$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000$$
2. $$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$$
3. $$10^{100} = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \dots . \times 10}_{100 \text{ عامل}}$$

نسمي العدد 10^{100} بالعدد جوجول " **gogol** " و منه أشتق اسم محرك البحث العالمي **Google** للانترنت و يعني العدد 1 متبوع ب 100 صفر.

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين غير معدومين a و b و من أجل كل عددين طبيعيين n و m لدينا:

1. $$a^{n+m} = a^n \times a^m$$

2. $$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$$

3. $$(a^n)^m = a^{n\times m} = a^{m\times n} = (a^m)^n$$

4. $$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

5. $$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

6. $$1^n = 1$$

لازمة 01: من أجل كل عدد حقيقي a و من أجل كل عددين طبيعيين r و n (n غير معدوم) و كل عدد صحيح نسبي q لدينا:

$$a^{n\times q+r} = (a^n)^q \times a^r = (a^q)^n \times a^r$$

البرهان: من الخاصية رقم 1 لدينا:

$$a^{n\times q+r} = a^{n\times q} \times a^r$$

و من الخاصية رقم 3 لدينا:

$$a^{n\times q+r} = (a^n)^q \times a^r = (a^q)^n \times a^r$$

لازمة 02: من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } n \text{ عدد زوجي} \\ -1 & \text{إذا كان } n \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

البرهان:

- إذا كان n عددا زوجيا فإن n يكتب من الشكل $k \times 2 = n$ عندئذ من الخواص السابقة يكون:

$$(-1)^n = \left((-1)^2\right)^k = (1)^k = 1$$

- إذا كان n عددا فرديا فإن n يكتب من الشكل $n = 2 \times k + 1$ عندئذ من اللازمة السابقة يكون:

$$(-1)^n = \left((-1)^2\right)^k \times (-1)^1 = (1)^k \times (-1) = -1$$

الموافقات في $\mathbb{Z}$

توافق عددين صحيحين نسبيين بترديد عدد طبيعي غير معدوم:

ليكن a و b عددين صحيحين نسبيين و n عدد طبيعي غير معدوم ، نقول عن العددين a و b متوافقان بترديد العدد n إذا كان لهما نفس باقي القسمة الإقلدية على n و نكتب : $a \equiv b[n]$ و نقرأ a يوافق b بترديد n أي: a و b لهما نفس الباقي عند قسمتهما على n.

أمثلة:

- $28 \equiv 13[5]$ و نقرأ 28 يوافق 13 بترديد 5 و معناه 28 و 13 لهما نفس الباقي عند قسمتهما على 5 و هو العدد 3.
- $57 \equiv -13[10]$ و نقرأ 57 يوافق -13 بترديد 10 و معناه 57 و -13 لهما نفس الباقي عند قسمتهما على 10 و هو العدد 7.
- $77 \equiv 0[11]$ و نقرأ 77 يوافق 0 بترديد 11 و معناه 77 و 0 لهما نفس الباقي عند قسمتهما على 11 و هو العدد 0.
- من أجل كل عدد صحيح x لدينا $x \equiv 0[1]$

مبرهنة: ليكن a و b عددان صحيحان نسبيان و n عدد طبيعي غير معدوم يكون لـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقلدية على إذا وفقط إذا كان $a - b$ مضاعفا للعدد n .

نتيجة: ليكن a و b عددان صحيحان نسبيان و n عدد طبيعي غير معدوم يكون لـ a و b متوافقان بترديد n إذا وفقط إذا كان $a-b$ مضاعفا للعدد n .

تمرين محلول 04:

i. عين باقي قسمة كل من العددين 660 و 366 على 7 . ماذا تلاحظ؟

ii. هل العددان 274 و 69 متوافقان بترديد 3 ؟

iii. بين أن العددين $a = 234$ و $b = 146$ متوافقان بترديد $n = 11$.

ما هو باقي قسمة $a-b$ على n.

iv. بين أن العددين $a = 174$ و $b = 109$ متوافقان بترديد $n = 13$.

ما هو باقي قسمة $a-b$ على n.

الحل:

i. باقي قسمة كل من العددين 660 و 366 على 7 هو 2 نلاحظ أن لهما نفس الباقي و هو 2 و نقول أن العددين 660 و 366 متوافقان بترديد العدد 7 و نكتب :

$660 \equiv 366[7]$.

ii. العددان 274 و 69 ليس متوافقان بترديد 3 لأن ليس لهما نفس باقي القسمة على 3 و هما على الترتيب 1 و 0.

iii. بما أن العددين $a = 234$ و $b = 146$ لهما نفس باقي قسمة على 11 و هو 3 فهما متوافقان بترديد $n = 11$ و عليه باقي قسمة $a-b$ على n هو 0 .

iv. بما أن العددين $a = 174$ و $b = 109$ لهما نفس باقي قسمة على 13 و هو 5 فهما متوافقان بترديد $n = 13$ و عليه باقي قسمة $a-b$ على n هو 0 .

خاصية: ليكن n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n \geq 2)$.

كل عدد صحيح يوافق بترديد n باقي قسمته على n .

البرهان:

ليكن a عدد صحيح و r باقي قسمته على n نعلم أن يوجد عدد صحيح q حيث:

$a = n \times q + r$ و $0 \leq r < n$ ومنه $a - r = n \times q$ و بتالي r مضاعف لـ n.

ملاحظة: نقول أن r هو الباقي إلا إذا كان $0 \leq r < n$ فمثلا $27 \equiv 7[5]$ و 7 ليس باقي قسمة 27 على 5 لأن $7 \geq 5$ أما الباقي هو 2 لأن $27 \equiv 2[5]$ و $0 \leq 2 < 5$

تمرين محلول 05: (الكتاب المدرسي صفحة 13)

من بين الموافقات الآتية أذكر الصحيحة و الخاطئة:

1) $26 \equiv 11[5]$

2) $-32 \equiv 18[10]$

3) $478 \equiv 32[5]$

4) $58 \equiv -5[7]$

5) $63^2 \equiv 14[5]$

6) $144 \equiv 11[19]$

7) $131^2 \equiv 25[12]$

8) $48^3 \equiv 36[7]$

طريقة: للبرهان على أن $a \equiv b[n]$ يمكن البرهان على أن $\mathbf{a-b}$ مضاعف لـ $\mathbf{n}$

أو البرهان على أن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على $\mathbf{n}$.

الحل:

1) $\mathbf{26-11=15}$ و $\mathbf{15=3\times 5}$. إذن $\mathbf{26\equiv 11[5]}$ صحيحة.

2) $\mathbf{-32-18=-50}$ و $\mathbf{-50=(-5)\times 10}$. إذن $\mathbf{-32\equiv 18[10]}$ صحيحة.

3) $\mathbf{478-32=446}$ و $\mathbf{446=89\times 5+1}$. إذن $\mathbf{478\equiv 32[5]}$ خاطئة.

ونكتب $\mathbf{478\not\equiv 32[5]}$.

4) $\mathbf{58+5=63}$ و $\mathbf{63=9\times 7}$. إذن $\mathbf{58\equiv -[7]}$ صحيحة.

5) $\mathbf{63^2=3969}$. باقي قسمة $\mathbf{63^2}$ على $\mathbf{5}$ هو إذن $\mathbf{4}$ و بما أن باقي قسمة العدد $\mathbf{14}$ على $\mathbf{5}$ هو كذلك $\mathbf{4}$ فإن $\mathbf{63^2\equiv 14[5]}$ صحيحة.

6) $\mathbf{144=19\times 7+11}$ و بما أن العدد $\mathbf{144}$ يوافق بترديد $\mathbf{19}$ باقي قسمته على $\mathbf{19}$ نستنتج أن $\mathbf{144\equiv 11[19]}$ صحيحة.

7) $\mathbf{131^2=1430\times 12+1}$ و $\mathbf{25=2\times 12+1}$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على $\mathbf{21}$ إذن $\mathbf{131^2\equiv 25[12]}$ صحيحة.

8) $\mathbf{48^3=15799\times 7+6}$ و $\mathbf{36=5\times 7+1}$ لم نحصل على نفس الباقي في القسمة على $\mathbf{7}$ إذن $\mathbf{48^3\equiv 36[7]}$ خاطئة. و نكتب $\mathbf{48^3\not\equiv 36[7]}$.

تمرين محلول 06: (الكتاب المدرسي صفحة 13)

عين في كل حالة من الحالات الآتية $a \equiv b[n]$ باقي قسمة **a** على **n** و باقي قسمة b على **n**. ثم أذكر صحة أو خطأ الموافقة.

1) $262 \equiv 927[5]$
2) $-322 \equiv 78[4]$
3) $471 \equiv 30[8]$
4) $158 \equiv 39[17]$

الحل:

1) $262 = 5 \times 52 + 2$ و $927 = 5 \times 185 + 2$. إذن باقي 262 على 5 هو 2 و باقي 927 على 5 هو 2 و منه 262 و 927 لهما نفس الباقي في القسمة على 5 إذن $262 \equiv [5]$ صحيحة.

2) $-322 = 4 \times (-81) + 2$ و $78 = 4 \times 19 + 2$. إذن باقي -322 على 4 هو 2 و باقي 78 على 4 هو 2 و منه -322 و 78 لهما نفس الباقي في القسمة على 4 إذن $-322 \equiv 78[4]$ صحيحة.

3) $471 = 8 \times 58 + 7$ و $30 = 8 \times 3 + 6$. إذن باقي 471 على 8 هو 7 و باقي 30 على 8 هو 6 و منه 471 و 30 ليس لهما نفس الباقي في القسمة على 8 إذن $471 \equiv 30[8]$ خاطئة. و نكتب $471 \not\equiv 30[8]$.

4) $158 = 17 \times 9 + 5$ و $39 = 17 \times 2 + 5$. إذن باقي 158 على 17 هو 5 و باقي 39 على 17 هو 5 و منه 158 و 39 لهما نفس الباقي في القسمة على 17 إذن $158 \equiv 39[17]$ صحيحة.

خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$

الخاصية 01: " الخاصية الانعكاسية "

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و من أجل كل عدد صحيح a

لدينا : $a \equiv a[n]$

البرهان: لدينا $a - a = 0 \times n$ و منه $a - a$ مضاعف للعدد n.

الخاصية 02: " الخاصية التبديلية "

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم .

إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن: $b \equiv a\ [n]$

البرهان: إذا كان لـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n فإن لـ b و a نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

الخاصية 03: " الخاصية المتعدية "

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم. a , b و c أعداد صحيحة .

إذا كان $(a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n])$ فإن: $a \equiv c[n]$

البرهان: a, b و c أعداد صحيحة حيث: $(a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n])$

$(a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n])$ يعني $(a - b = k \times n$ و $b - c = \acute{k} \times n)$

(k و $\acute{k}$ عددان صحيحان) بالجمع طرف إلى طرف نجد

$b - c = (\acute{k} + k) \times n$ بما أن $\acute{k} + k$ عدد صحيح فإن $a \equiv c[n]$.

الخاصية 04: " خاصية التلاؤم مع الجمع"

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم. a , b , c و d أعداد صحيحة .

إذا كان $(a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n])$ فإن: $a + c \equiv b + d \ [n]$

البرهان: a, b, c و d أعداد صحيحة حيث: $(a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n])$

$(a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n])$ يعني $(a - b = k \times n$ و $c - d = \acute{k} \times n)$

(k و $\acute{k}$ عددان صحيحان) بالجمع طرف إلى طرف نجد

$$(a + c) - (b + d) = (\acute{k} + k) \times n$$

بما أن $\acute{k} + k$ عدد صحيح فإن $a + c \equiv b + d[n]$.

الخاصية 05: " خاصية التلاؤم مع الضرب"

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم. a , b , c و d أعداد صحيحة .

إذا كان $(a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n])$ فإن: $a \times c \equiv b \times d \ [n]$

البرهان: a, b, c و d أعداد صحيحة حيث: $(a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n])$

$(a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n])$ يعني $(a - b = k \times n$ و $c - d = \acute{k} \times n)$

(k و $\acute{k}$ عددان صحيحان) لدينا

$$ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c + d) + d(a - b) =$$
$$a\acute{k}n + dkn = (a\acute{k} + dk) \times n$$

بما أن $a\acute{k} + dk$ عدد صحيح فإن $a \times c \equiv b \times d[n]$.

الخاصية 06: " خاصية التلاؤم مع القوى الصحيحة"

من أجل كل عددان طبيعيان غير معدومان n و p . و من أجل كل عددان صحيحان a و b .

إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن: $a^p \equiv b^p \ [n]$

تمرين محلول 07: (الكتاب المدرسي صفحة 15)

لتكن الأعداد الصحيحة التالية : $a = 255$ ، $\mathbf{b} = 837$ و $\mathbf{c} = 3691$.

1) عين باقي قسمة الأعداد a ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ على العدد 11.

2) باستعمال الموافقات عين باقي قسمة كل من $a + b$ ، $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ، $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ، $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ، $(5 \times a)^{2019}$ ، $(5 \times a)^{1440}$.

الحل:

1. باستعمال حاسبة نجد أن بواقي الأعداد عين باقي قسمة الأعداد a ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ على العدد 11 هي 2، 1 ، 6 على الترتيب.

$255 = 11 \times 23 + 2$ ، $837 = 11 \times 76 + 1$ و $3691 = 11 \times 335 + 6$

2. لدينا: $\begin{cases} a \equiv 2[11] \\ \mathbf{b} \equiv 1[11] \end{cases}$ بتطبيق خاصية الجمع نجد $a + \mathbf{b} \equiv 3[11]$ و منه الباقي هو 3.

- لدينا: $\begin{cases} a \equiv 2[11] \\ \mathbf{c} \equiv 6[11] \end{cases}$ بتطبيق خاصية الضرب نجد $a \times \mathbf{c} \equiv 12[11]$ و بما أن $12 \equiv 1[11]$ بتطبيق خاصية التعدي نجد $a \times \mathbf{c} \equiv 1[11]$ و منه الباقي هو 1.
- لدينا: $\begin{cases} a \equiv 2[11] \\ \mathbf{b} \equiv 1[11] \\ \mathbf{c} \equiv 6[11] \end{cases}$ بتطبيق خاصية الجمع نجد $a + \mathbf{b} + \mathbf{c} \equiv 9[11]$ و منه الباقي هو 9.
- لدينا: $a \equiv 2[11]$ بتطبيق خاصية القوى نجد $a^2 \equiv 2^2[11]$ أي $a^2 \equiv 4[11]$ و منه الباقي هو 4.
- لدينا: $\begin{cases} a \equiv 2[11] \\ \mathbf{b} \equiv 1[11] \\ \mathbf{c} \equiv 6[11] \end{cases}$ بتطبيق خاصية الضرب نجد $a \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} \equiv 12[11]$ و بما أن $12 \equiv 1[11]$ بتطبيق خاصية التعدي نجد $a \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} \equiv 1[11]$ و منه الباقي هو 1.

- لدينا : $a \equiv 2[11]$ بتطبيق خاصية الضرب نجد $5 \times a \equiv 10[11]$ و بما أن $10 \equiv -1[11]$ بتطبيق خاصية التعدي نجد $5 \times a \equiv -1[11]$ بتطبيق خاصية القوى نجد $(5 \times a)^{2019} \equiv (-1)^{2019}[11]$ بما أن $(-1)^{2019} = -1$ تكافئ $(5 \times a)^{2019} \equiv -1[11]$ و تكافئ أيضا $(5 \times a)^{2019} \equiv 10[11]$ و منه الباقي هو 10.
- بنفس الطريقة السابقة نجد $(5 \times a)^{1440} \equiv 1[11]$ و منه الباقي هو 1.

تمرين محلول 08: (الكتاب المدرسي صفحة 15)

a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv 3[5]$ و $b \equiv 4[5]$.

i. بين أن العدد $2a + b$ يقبل القسمة على العدد 5.

ii. عين باقي قسمة العدد $2a^2 + b^2$ على العدد 5.

iii. تحقق أن $b \equiv -1[5]$. استنتج باقي قسمة b^{2019} و b^{1440} على العدد 5.

الحل:

I. لدينا: $\begin{cases} a \equiv 3[5] \\ b \equiv 4[5] \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2a \equiv 6[5] \\ b \equiv 4[5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a \equiv 1[5] \\ b \equiv 4[5] \end{cases}$ بتطبيق خاصية الجمع نحصل على $2a + b \equiv 5[5]$ و بما أن $5 \equiv 0[5]$ فإن $2a + b \equiv 0[5]$ و منه باقي قسمة $2a + b$ على 5 هو 0. نستنتج هكذا أن العدد $2a + b$ يقبل القسمة على 5.

II. لدينا: $\begin{cases} a \equiv 3[5] \\ b \equiv 4[5] \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2a^2 \equiv 2 \times 9[5] \\ b^2 \equiv 16[5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a^2 \equiv 3[5] \\ b^2 \equiv 1[5] \end{cases}$ لأن $\begin{cases} 18 \equiv 3[5] \\ 16 \equiv 1[5] \end{cases}$ بتطبيق خاصية الجمع نحصل على $2a^2 + b^2 \equiv 4[5]$ و منه باقي قسمة $2a^2 + b^2$ على 5 هو 4.

III. من الواضح أن $4 \equiv -1[5]$ و منه باستخدام خاصية التعدي نحصل على $b \equiv -1[5]$. بتطبيق خاصية القوى نحصل على $b^{2019} \equiv (-1)^{2019}[5]$ و $b^{1440} \equiv (-1)^{1440}[5]$ أي $b^{2019} \equiv -1[5]$ و $b^{1440} \equiv 1[5]$ و بما أن $4 \equiv -1[5]$ فإن $b^{2019} \equiv 4[5]$. نستنتج أن باقي قسمة b^{2019} على 5 هو 4 و باقي قسمة b^{1440} على 5 هو 1.

دراسة بواقي قوى عدد طبيعي

دراسة بواقي قوى عدد طبيعي حسب القيم الطبيعية للأس:

ليكن p و m عددان طبيعيان ثابتان غير معدومان أوليان فيما بينهما أي $pgcd(p,m)=1$ و ليكن n عدد طبيعي. الهدف هو معرفة بواقي القسمة الإقليدية للعدد p^n على العدد m حسب القيم العدد الطبيعي n. نقوم بدراسة البواقي للقسمة الإقليدية على m للأعداد $p^1, p^2, p^3, \dots \dots, p^{n_0}$ حيث: n_0 هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم يحقق العلاقة $p^{n_0} \equiv 1[m]$

يسمى الدور فبإجراء القسمة الإقليدية للعدد n على العدد n_0 نجد: $n = n_0 \times q + r$ و بتطبيق خواص القوى و الموافقات نحصل على

$$p^n \equiv p^{n_0 \times q + r} = (p^{n_0})^q \times p^r \equiv (1)^q \times p^r \equiv p^r \equiv t[m]$$

حيث t هو باقي قسمة p^r على m. و عليه $t_1, t_2, t_3, \dots \dots, t_{n_0}$ هي بواقي قسمة الأعداد $p^1, p^2, p^3, \dots \dots, p^{n_0}$ على m وفقا لهذا الترتيب.

و عليه بواقي قسمة العدد p^n على m حسب قيم العدد الطبيعي n هي:

- ❖ t_1 إذا كان باقي قسمة n على n_0 هو 1.
- ❖ t_2 إذا كان باقي قسمة n على n_0 هو 2.
- ❖ t_3 إذا كان باقي قسمة n على n_0 هو 3.

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- ❖ t_{n_0-1} إذا كان باقي قسمة n على n_0 هو n_0-1.
- ❖ t_{n_0} إذا كان باقي قسمة n على n_0 هو 0.

مبرهنة: ليكن p و m عددان طبيعيان ثابتان غير معدومان أوليان فيما بينهما أي $pgcd(p,m) = 1$ فإنه يوجد على الأقل عدد طبيعي غير معدوم n_0 يحقق العلاقة $p^{n_0} \equiv 1[m]$ و $1 \leq n_0 < m$ و أصغر عدد طبيعي غير معدوم يحقق هذه الخاصية يسمى الدور.

ملاحظة: هذه المبرهنة نتيجة حتمية لنظرية **Euler-Fermat**

تحذير ! p و m عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما يعني $pgcd(p,m) = 1$ و ليس بالضرورة أنهما أعداد أولية.

علينا أن نفرق بين مفهوم **العدد الأولي و العددان الأوليان فيما بينهما.**

على سبيل المثال: العددان **8** و **9** أوليان فيما بينهما لكن كلاهما ليس أولي.

تمرين محلول 09: (بكالوريا 2018)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5 .

2) عين العدد الطبيعي a بحيث يكون : $2018 = 4 \times a + 2$.

3) بين أن العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5.

4) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $12^n \equiv 2^n[5]$ و $(-3)^n \equiv 2^n[5]$.

5) ب) عين قيم العدد طبيعي n بحيث: $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5]$.

الحل:

1) دراسة بواقي قسمة العدد 2^n على 5 حسب قيم العدد الطبيعي n.

$2^0 = 1 \equiv 1[5]$ ، $2^1 = 2 \equiv 2[5]$، $2^2 = 4 \equiv 4[5]$،

$2^3 = 8 \equiv 3[5]$ ، $2^4 = 16 \equiv 1[5]$.

نلاحظ أن $n_0 = 4$ هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم حيث: $2^{n_0} \equiv 1[5]$

يسمى الدور و عليه الكتابة الأفقية للقسمة الإقليدية للعدد الطبيعي n على 4 هي :

$n = 4 \times q + r$ و بتطبيق خواص الموافقات السابقة نحصل على

$$2^n \equiv 2^{4\times q+r} = (2^4)^q \times 2^r \equiv (1)^q \times 2^r \equiv 2^r[5]$$

و عليه بواقي قسمة العدد 2^n على 5 حسب قيم العدد الطبيعي n هي:

- ❖ 1 إذا كان باقي قسمة n على 4 هو 0.
- ❖ 2 إذا كان باقي قسمة n على 4 هو 1.
- ❖ 4 إذا كان باقي قسمة n على 4 هو 2.
- ❖ 3 إذا كان باقي قسمة n على 4 هو 3.

2) تعين العدد الطبيعي a بحيث يكون : $2018 = 4 \times a + 2$.

$2018 = 4 \times a + 2$ تكافئ $a = \frac{(2018-2)}{4}$ و منه $a = 504$

3) إثبات أن العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5.

لدينا: $2^{2018} \equiv (2^4)^{504} \times 2^2 \equiv 4[5]$ لأن $2018 = 4 \times 504 + 2$

و $2017^8 \equiv (2)^8 \equiv (2^4)^2 \equiv 1^2 \equiv 1[5]$ لأن $2017 \equiv 2[5]$

فيكون إذن $2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 4 + 1 - 5 \equiv 0[5]$ أي أن

العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5.

4) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

بما أن $12 \equiv 2[5]$ فإن $12^n \equiv 2^n[5]$ (يمكننا إثبات ذلك بالاستدلال بالتراجع).

بما أن $-3 \equiv 2[5]$ فإن $(-3)^n \equiv 2^n[5]$ (يمكننا إثبات ذلك بالاستدلال بالتراجع).

ب) تعين قيم العدد طبيعي n بحيث: $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5]$

من السؤال السابق نستنتج أن:

$12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5]$ تكافئ $2^n + 2^n - 4 \equiv 0[5]$ و تكافئ أيضا $2^n \equiv 2[5]$ و يكافئ من السؤال الأول باقي قسمة العدد الطبيعي n على 4 هو 1.

أي $n = 4 \times k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

تمرين محلول 10: (بكالوريا 2018)

a و b عددان صحيحان حيث $a = 4 \times b + 6$.

1) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4 .

2) بين أن العددين a و b متوافقان بترديد 3 .

3) نضع $b = 489$

أ) تحقق أن : $a \equiv -1[13]$.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13 .

ج) عين قيم العدد طبيعي n حتى يكون العدد $a^{2n} + n + 3$ قابلا للقسمة على 13.

الحل:

1. تعين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4 .

لدينا: $a = 4 \times b + 6$ تكافئ $a = 4 \times b + 4 + 2$ تكافئ $a = 4 \times (b + 1) + 2$

أي تكافئ $a \equiv 2[4]$ و $0 \leq 2 < 4$ و عليه نستنتج أن باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4 هو 2.

2. إثبات أن العددان a و b متوافقان بترديد 3.

لدينا: $a = 4 \times b + 6$ تكافئ $a = 3 \times b + b + 2 \times 3$ تكافئ

$\boldsymbol{a} = 3 \times (b + 2) + \mathbf{b}$ أي تكافئ $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ مضاعف للعدد 3 أي $a \equiv b[3]$.

3. من أجل $b = 489$ لدينا:

أ) $a = 4 \times b + 6 = 4 \times 489 + 6 = 1962$ وعليه

$a + 1 = 13 \times 151 \equiv 0[13]$ و منه $a \equiv -1[13]$.

ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13 .

لدينا $a^{2018} \equiv (-1)^{2018} \equiv 1[13]$ و $40^{2968} \equiv (1)^{2968} \equiv 1[13]$

لأن $40 \equiv 1[13]$

ج) تعين قيم العدد طبيعي n حتى يكون العدد $a^{2n} + n + 3$ قابلا للقسمة على 13

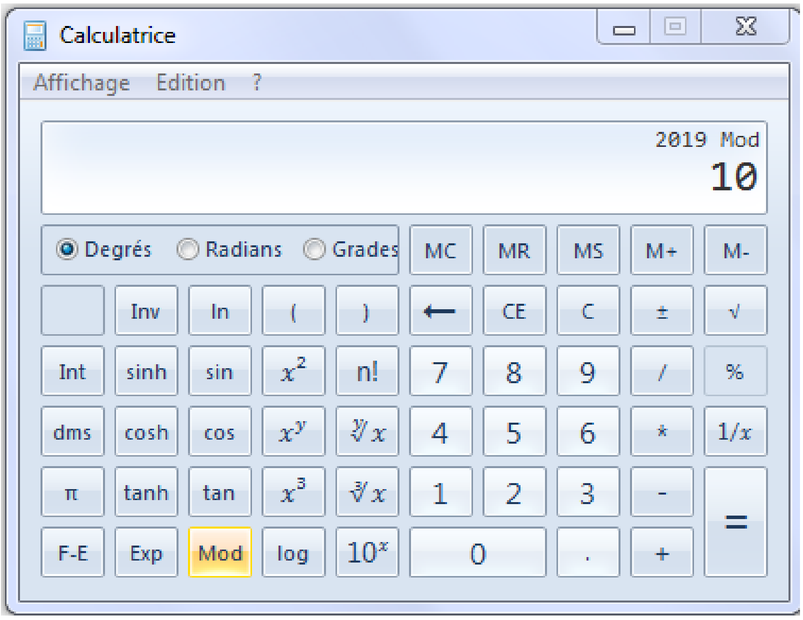
لدينا $a^{2n} \equiv ((-1)^2)^n \equiv 1[13]$ فعليه $a^{2n} + n + 3 \equiv 0[13]$ تكافئ

$n \equiv 9[13]$ أي يوجد عدد طبيعي k حيث: $n = 13 \times k + 9$.

حساب الباقي بالآلة الحاسبة

توجد عدة آلات و برمجيات تسمح لنا بحساب باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي a على العدد الطبيعي b نذكر منها الحاسبة العلمية و الحاسبة البيانية و الحاسوب من خلال برنامجي **المجدول Excel** و **المابل Maple** و غيرها كما لا ننسى أن هنالك مواقع متخصصة على شبكة إنترنت تسمح لنا بإجراء مختلف العمليات الحسابية و بأعداد كبيرة نسبيا.

فعلى سبيل المثال توجد اللمسة **Mod** الملونة بالأصفر على حاسبة الكومبيوتر المحمول تسمح بحساب الباقي مثلا : ندخل الرقم 2019 على الحاسبة ثم نضغط على الزر **Mod** ثم ندخل الرقم 10 ثم نضغط على الزر = فنحصل على العدد 9 و الذي هو باقي قسمة 2019 على 10 كما هو موضح في الصورة المرفقة.



تـــنــويـــه:

اللمسة Mod ليست متوفرة في كل الحاسبات العلمية و القياسية لكن مع هذا يمكننا حساب باقي قسمة العدد a على العدد b باتباع الطريقة التالية: نقوم بقسمة العدد a على العدد b فنتحصل على عدد ناطق q,t يتكون من جزئين جزء صحيح و يمثل حاصل القسمة العدد q و جزء عشري و هو إما عدد عشري و إما عدد مقرب إلى عدد عشري. فعند طرحنا الجزء الصحيح q من حاصل قسمة العدد a على العدد b نتحصل على الجزء العشري فقط $0,t$ و عند قيامنا بضرب هذا الأخير في العدد b نحصل على الباقي r.

المرحلة الأولى:	$a \div b = q,t$
المرحلة الثانية:	$q,t - q = 0,t$
المرحلة الثالثة:	$0,t \times b = r$

مثال تطبيقي: **احسب باقي قسمة 2019 على 81.**

الحل:

المرحلة الأولى: $2019 \div 81 = 24,925925925\ldots$

المرحلة الثانية: $24,925\ldots - 24 = 0,925\ldots$

المرحلة الثالثة: $0,925\ldots \times 81 = 75$

الخلاصة: باقي القسمة الإقليدية للعدد 2019 على العدد 81 هو 75.

الاستدلال بالتراجع

مبدأ الاستدلال بالتراجع (البرهان بالتراجع):

مسلمة: $\mathcal{P}(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n و n_0 عدد طبيعي. للبرهان على صحة الخاصية $\mathcal{P}(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن :

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $\mathcal{P}(n_0)$
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي n أكبر أو يساوي n_0 أي $\mathcal{P}(n_0)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $\mathcal{P}(n+1)$.

المرحلة الأولى

$P(n_0)$ صحيحة

المرحلة الثانية

إذا كانت $P(n)$ صحيحة

فإن

$P(n+1)$ صحيحة

الخلاصة

من أجل كل طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0

$P(n)$ صحيحة

ملاحظة: بصفة عامة المرحلة الأولى تتمثل في عملية تحقق بسيطة لا تطرح أي مشكل إلا أنها تبقى ضرورية لأنه يمكن لخاصية أن تكون وراثية لكن خاطئة.

مثال: الخاصية: " **من أجل كل عدد طبيعي n ، 3^n مضاعف للعدد 2** " **خاطئة رغم أنها وراثية**. بالفعل إذا كان 3^n مضاعفا للعدد 2 فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث: $3^n = 2k$ لدينا إذن:

$3^{n+1} = 3(2k) = 2(3k)$ و منه 3^{n+1} هو الآخر مضاعف للعدد 2.

مثال توضيحي: لنثبت صحة الخاصية التالية:

" من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$ غير معدوم، $1 + 2 + 3 + \cdots + \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{2}$ "

المرحلة الأولى: من أجل $\mathbf{n = 1}$ لدينا: $\mathbf{1 = \frac{1\times 2}{2}}$ و منه الخاصية صحيحة من أجل $\mathbf{n = 1}$

المرحلة الثانية(الوراثة):

- ✓ نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$ أي:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{2}$$

- ✓ لنبرهن صحة الخاصية من أجل $\boldsymbol{n} + \mathbf{1}$ أي:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (\boldsymbol{n} + \mathbf{1}) = \frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})}{2}$$

لدينا:

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} = +(n + 1)}$$

و منه $\mathbf{1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$ غير معدوم، $1+2+3+\cdots+\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+1)}{2}$

تمرين محلول 11: (الكتاب المدرسي صفحة 17)

أثبت، باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد

n^3-n مضاعف للعدد **3**.

الحل: الخاصية " n^3-n مضاعف للعدد **3** " متعلقة بالعدد الطبيعي n.

نستعمل الاستدلال بالتراجع.

المرحلة الأولى: من أجل $\boldsymbol{n}=\mathbf{0}$ لدينا: $0^3-0=0=3\times 0$ و منه 0^3-0 مضاعف للعدد **3** . و منه نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $\boldsymbol{n}=\mathbf{0}$.

المرحلة الثانية(الوراثة):

- ✓ نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $\boldsymbol{n}\geq\mathbf{0}$ أي: n^3-n مضاعف للعدد **3** .

نضع $n^3-n=3k$ حيث k عدد طبيعي . و منه $n^3=3k+n$

- ✓ لنبرهن صحة الخاصية من أجل $\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$ أي: $[(n+1)^3-(n+1)]$ مضاعف للعدد **3** .

لدينا:

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=(3k+n)+3n^2+2n$$

و منه $$(n+1)^3-(n+1)=3k+3n^2+3n=3(k+n^2+n)$$

و بما أن $3(k+n^2+n)$ مضاعف للعدد 3 نستنتج أن $(n+1)^3-(n+1)$ مضاعف للعدد 3.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n،العدد n^3-n مضاعف للعدد **3** .

ملاحظة: شرح كيفية الحصول على المساواة $\boldsymbol{(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1}$

لدينا: $\boldsymbol{(n+1)^3}=(n+1)\,(n+1)^2=(n+1)(n^2+2n+1)$

و منه $\boldsymbol{(n+1)^3}=n^3+2n^2+n+n^2+2n+1=\boldsymbol{n^3+3n^2+3n+1}$

تعميم: يمكننا تعميم المتطابقات الشهيرة من أجل عددين حقيقين x و y

لدينا:

- $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
- $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
- $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$
- $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
- $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
- $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$

تمرين محلول 12: (الكتاب المدرسي صفحة 17)

نرمز بـ $\mathcal{P}(n)$ إلى الخاصية التالية: "العدد **3** يقسم العدد n^2+1 حيث n عدد طبيعي".

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n إذا كانت $\mathcal{P}(n)$ صحيحة تكون $\mathcal{P}(n+1)$ صحيحة.
2. هل يمكننا استنتاج أن الخاصية $\mathcal{P}(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n؟ اشرح.

الحل:

1. نفرض أن $\mathcal{P}(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي n،أي أن العدد 3 يقسم العدد 4^n+1 و يمكننا أن نعبر عن ذلك بوضع $4^n+1=3k$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم.

لنبرهن أن $\mathcal{P}(n+1)$ صحيحة أي أن العدد 3 يقسم العدد $4^{n+1}+1$.

لدينا: $4^{n+1}+1=4\times4^n+1$ و بما أن $4^n=3k-1$ (من الفرضية السابقة) نستنتج أن : $4^{n+1}+1=4\times(3k-1)+\ 1$

لدينا إذن: $4^{n+1}+1=4\times3k-4+\ 1=3\times4k-3$

و منه $4^{n+1}+1=3\times(4k-1)$

لدينا إذن: $4^{n+1}+1=3\times\acute{k}$ مع $\acute{k}=4k-1$ و هو عدد طبيعي غير معدوم. نستنتج أن العدد 3 يقسم العدد $4^{n+1}+1$. و منه فالخاصية $\mathcal{P}(n+1)$ صحيحة.

2. لا يمكننا استنتاج الخاصية $\mathcal{P}(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n فلابد من التحقق من صحتها من أجل $n=0$ لأن وراثية الخاصية تبقى غير كافية.

نلاحظ أن الخاصية ليست صحيحة من أجل $n=0$ لأن العدد 3 لا يقسم العدد 2 و بتالي فهي غير صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

تمرين محلول 13: (خاصية تلاؤم الموافقات مع القوى الصحيحة)

ليكن m عددا طبيعيا ثابتا غير معدوم معطى. أثبت باستخدام الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. و مهما يكن العددان الصحيحان a و b حيث: إذا كان $a \equiv b[m]$ فإن: $a^n \equiv b^n \ [m]$

الحل: الخاصية " إذا كان $a \equiv b[m]$ فإن: $a^n \equiv b^n \ [m]$ " متعلقة بالعدد الطبيعي n. نستعمل الاستدلال بالتراجع.

المرحلة الأولى: من أجل $\boldsymbol{n = 1}$ لدينا: $a^1 \equiv b^1 \ [m]$ (شرط الفرضية). و منه نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $\boldsymbol{n = 1}$.

المرحلة الثانية(الوراثة):

- ✓ نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $\boldsymbol{n \geq 1}$ أي: $a^n \equiv b^n \ [m]$.
- ✓ لنبرهن صحة الخاصية من أجل $\boldsymbol{n + 1}$ أي: $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \ [m]$.

لدينا: $a \equiv b[m]$ و $a^n \equiv b^n \ [m]$ (فرضية التراجع) و حسب خاصية التلاؤم مع الضرب للموافقات نحصل على $a \times a^n \equiv b \times b^n \ [m]$

و منه حسب خواص القوى نجد: $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \ [m]$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. و مهما يكن العددان الصحيحان a و b حيث: إذا كان $a \equiv b[m]$ فإن: $a^n \equiv b^n \ [m]$

علما أن m عددا طبيعيا ثابتا غير معدوم معطى.

معجم مصطلحات رياضية ملحقة بالدرس

الإنجليزية	الفرنسية	العربية
Natural numbers	Nombres Naturels	الأعداد الطبيعية
Integers	Les entiers	الأعداد الصحيحة
Rational Numbers	Les nombres Rationnels	الأعداد الناطقة
Irrational Numbers	Les nombres Irrationnels	الأعداد الصماء
The Real Numbers	Les nombres Réels	الأعداد الحقيقية
Set	Ensemble	مجموعة
Element	Elément	عنصر
Sum	Somme	مجموع
Product	Produit	جداء
Addition	Addition	إضافة(الجمع)
Substraction	Soustraction	الطرح
Multiplication	Multiplication	الضرب
The Division	La Division	القسمة
Divisor	Diviseur	قاسم
Remainder	Reste	الباقي
Quotient	Quotient	حاصل قسمة
Greatest **C**ommon **D**ivisor **GCD**(a,b)	**P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur **PGCD**(a,b)	القاسم المشترك الأكبر
Least **C**ommon **M**ultiple **LCM**(a,b)	**P**lus **P**'tite **C**ommun **M**ultiple **PPCM**(a,b)	المضاعف المشترك الأصغر
Perfect Number	Nombre Parfait	عدد تام (مثالي)
Amicable Numbers	Nombres Amiables	عددان متحابان (متراضيان)

Power	Puissance	القوى
Prime Number	Nombre Premier	عدد أولي
Composite Number	Nombre Composé	عدد مركب (ليس أولي)
Relatively Prime	Premier Entre Eux	عددان أوليان فيما بينهما
Factorization	Factorisation	التحليل
Coefficient	Coefficient	العوامل
Euclidean Division	Division Euclidienne	القسمة الإقليدية
Theorem	Théorème	نظرية (مبرهنة)
Proof	Preuve	البرهان
Congruence	Congruence	الموافقات
Modular	Modulaire	الترديد
The Reasoning By Induction	Le Raisonnement Par Récurrence	الاستلال بالتراجع (البرهان بالتراجع)
Genetic property	Propriété Génétique	خاصية وراثية
Hypothesis	Hypothèse	الفرضية
Definition	Définition	تعريف
Result	Résultat	نتيجة
Conclusion	Conclusion	الخلاصة
Associative Property	Propriété Associative	خاصية تجميعية
Commutative Property	Propriété Commutative	خاصية تبديلية
Distributive Property	Propriété Distributive	خاصية توزيعية
Transitive Property	Propriété Transitive	خاصية متعدية
Solutions	Des solutions	الحلول
Exercise	Exercice	تمرين
Application	Application	تطبيق
The lesson	Leçon	الدرس

أخطاء شائعة و طرق تصويبها

في هذا الجزء نسعى إلى إبراز أهم الأخطاء التي تتكرر من طرف غالبية التلاميذ أو يتوقع حدوثها و طرق معالجتها قصد تفاديها أو التقليل من الوقوع فيها مستقبلا.

فعلى التلاميذ أخذها بعين الاعتبار للاستفادة و التعلم من أخطاء و تجربة الآخرين فالسّعيد من أتّعظ بغيره فالواجب الاستماع لنصائح الأساتذة أثناء الدروس و خاصة الاستفادة من المعالجة اثناء تصحيح الفروض و الاختبارات لما لها من أهمية بالغة قصد تدارك الأخطاء و السّعي لتصويبها و تفاديها مجددا و هو ما يتغافل عنه الأغلبية نظرا لاشتغالهم بالعلامات دون فهم المقصد الفعلي للتقويم أساسا أو اعتقادهم أنه من غير جدوى الاهتمام بالمعالجة سواء أكانت نتائجهم سلبية أم إيجابية و من هنا يجب التخلي عن العادات السيئة التي صارت طبعا من الواقع التعليمي في بلادنا كالمراجعة للاختبارات أو الدراسة من أجل إرضاء الأولياء و نحو ذلك دون السّعي لكسب و بناء ثقافة علمية قائمة بحد ذاتها و ذلك بإتباع أسس علمية صحيحة كالرغبة الصادقة و الصريحة لحب التعلم متبوعة بالعزيمة و الاجتهاد و المثابرة و الصحبة التي تعين على تحديات الدراسة و التحضير الجيد للدرس و المشاركة فيه أثناء تقديمه بطرح استفسارات أو تبسيط مفاهيم و نحوها ليتم في الأخير مراجعة الدروس السابقة في المنزل من دون ملل أو كلل مدعمة بحل التمارين و التطبيقات و التقويمات السابقة للسنوات الماضية للدفعات السابقة للاستفادة من تجاربهم كما ننّوه إلى ضرورة بناء المفاهيم خطوة بخطوة و درسا بدرس و عدم الوقوع في فخ التسّاهل و تخطي مراحل الدرس و ما ينتج عنه في تشّوه و تشابك المفاهيم من دون رابط بينها تؤدي إلى خلل أو تأخر دراسي يعرقل التعليم لدى الطالب و الأستاذ معا و نحّذر بشدة من التكّبر أو الحيّاء الزائد اللذّان يعيقان المتعلم بصفة عامة.

و كذلك ندعو أساتذتنا الافاضل ممن لهم تجربة وخبرة السنين لإفادتنا في هذا الصدد بما ينفع طلبتنا و يوفقهم لكل ما هو خير.

تمرين استقصائي :

1. أكتب العددين 1500 و 3500 على شكل جداء عوامل طبيعية أولية.
2. استنتج قيمة كل من القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر لهذين العددين.
3. استنتج الكسر الغير قابل للاختزال الذي يمثل العدد $\frac{1500}{3500}$.
4. عين قواسم الأعداد الطبيعة $0 , 12 , 50$.
5. عين بواقي قسمة العدد 3^n على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n .

الإجابات المختلفة لبعض التلاميذ (عيّنات):

1. تحليل العددين 1500 و 3500 إلى جداء عوامل طبيعية أولية.

التلميذ الأول	التلميذ الثاني
$\begin{array}{r\|l} 3500 & 2 \\ 1750 & 2 \\ 875 & 5 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 0 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 1500 & 2 \\ 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 0 & \end{array}$ $3500 = 2^2 . 5^3 . 7$ $1500 = 2^2 . 3 . 5^3$	$\begin{array}{r\|l} 3500 & 100 \\ 35 & 7 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 1500 & 4 \\ 375 & 15 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $3500 = 100 . 5 . 7$ $1500 = 4 . 5 . 5 . 15$
التلميذ الثالث	**التلميذ الرابع**
$\begin{array}{r\|l} 3500 & 2 \\ 1750 & 2 \\ 875 & 5 \\ 175 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 1500 & 2 \\ 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & \end{array}$ $3500 = 2 . 2 . 5 . 175$ $1500 = 2 . 2 . 3 . 5 . 25$	$3500 = 2^2 . 5^3 . 7$ $1500 = 2^2 . 3 . 5^3$

2. استنتاج القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر للعددين 1500 و 3500 .

التلميذ الأول	التلميذ الثاني
بإستخدام خوارزمية إقليدس للقسمة الإقليدية نتحصل على آخر باقي غير معدوم هو 500 أي: $pgcd(3500,1500)=500$ كما يمكننا إستنتاج ppcm بدلالة pgcd أي: $ppcm(3500,1500)=\frac{3500\ .\ 1500}{500}$ أي: $ppcm(3500,1500)=10500$	بإستخدام خوارزمية الطرح المتتالي لأقليدس نتحصل على آخر باقي غير معدوم هو 500 أي: $pgcd(3500,1500)=500$ " أي إجابة خاطئة حول حساب المضاعف المشترك الأصغر للعددين 3500 و1500"
التلميذ الثالث	**التلميذ الرابع**
من السؤال الأول نستنتج أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 3500 و 1500 هو جداء تحليل عواملها المشتركة و بأصغر أس من دون تكرار أي: $pgcd(3500,1500)=500$ بنفس الطريقة نستنتج أن المضاعف المشترك الأصغر للعددين 3500 و 1500 هو جداء تحليل العوامل المشتركة و بأكبر أس من دون تكرار و العوامل الغير مشتركة لهذين العددين أي: $ppcm(3500,1500)=10500$	" أي إجابة خاطئة حول حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 3500 و 1500" نقوم بحساب مضاعفات 1500 ثم حساب مضاعفات 3500 ثم نبحث عن أصغر مضاعف مشترك و هو 10500 و عليه $ppcm(3500,1500)=10500$

3. استنتاج الكسر الغير قابل للاختزال الذي يمثل العدد $\frac{1500}{3500}$.

التلميذ الأول	التلميذ الثاني
لدينا من السؤال الأول تحليل العددين 3500 و 1500 ثم نقوم بشطب العوامل المتشابهة في كلا من البسط و المقام $\frac{1500}{3500} = \frac{\cancel{2^2} \cdot 3 \cdot \cancel{5^3}}{\cancel{2^2} \cdot \cancel{5^3} \cdot 7} = \frac{3}{7}$	للحصول على كسر غير قابل للإختزال نقسم كل من البسط و المقام على قاسمهما المشترك الأكبر أي: $\frac{1500}{3500} = \frac{1500 \div 500}{3500 \div 500} = \frac{3}{7}$
التلميذ الثالث	**التلميذ الرابع**
$\frac{1500}{3500} = \frac{1500 \div 100}{3500 \div 100} = \frac{15}{35}$	$\frac{1500}{3500} = 0.4285$

4. تعين قواسم الأعداد الطبيعة 0 ,12 , 50.
5. تعين بواقي قسمة العدد 3^n على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n.

التلميذ الأول	التلميذ الثاني
لا توجد قواسم للعدد 0 قواسم العدد 12 هي: 1, 3,4,6 قواسم العدد 50 هي: 2,5,10,25	كل الأعداد الطبعية غير معدومة تقسم العدد 0 إذن يوجد ما لانهاية من القواسم قواسم العدد 12 هي: 1,2,3,4,6,12 قواسم العدد 50 هي: 1,2,4,20,50

التلميذ الثالث	التلميذ الرابع
إذا كان $n = 0\ [7]$ فإن $3^n \equiv 1\ [7]$ إذا كان $n = 1\ [7]$ فإن $3^n \equiv 3\ [7]$ إذا كان $n = 2\ [7]$ فإن $3^n \equiv 2\ [7]$ إذا كان $n = 3\ [7]$ فإن $3^n \equiv 6\ [7]$ إذا كان $n = 4\ [7]$ فإن $3^n \equiv 4\ [7]$ إذا كان $n = 5\ [7]$ فإن $3^n \equiv 5\ [7]$ إذا كان $n = 6\ [7]$ فإن $3^n \equiv 1\ [7]$	بما أن 6 هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم يحقق العلاقة $3^n \equiv 1\ [7]$ فإن إذا كان $n = 0\ [6]$ فإن $3^n \equiv 1\ [7]$ إذا كان $n = 1\ [6]$ فإن $3^n \equiv 3\ [7]$ إذا كان $n = 2\ [6]$ فإن $3^n \equiv 2\ [7]$ إذا كان $n = 3\ [6]$ فإن $3^n \equiv 6\ [7]$ إذا كان $n = 4\ [6]$ فإن $3^n \equiv 4\ [7]$ إذا كان $n = 5\ [6]$ فإن $3^n \equiv 5\ [7]$

التعليق و التعقيب على إجابات التلاميذ

بالنسبة لسؤال الاول تحليل الأعداد 3500 و 1500 إلى جداء عوامل أولية طبيعية.

التلميذ الأول: رغم أن إجابته كانت صائبة و نموذجية إلا أنه أخطأ في الخطوة الأخيرة بدل أن يضع العدد **1** (أخر حاصل قسمة) وضع العدد **0** (أخر باقي القسمة) فكثيرا ما تتكرر هذه الأخطاء و هو عدم التفرقة بين حاصل القسمة و الباقي.

التلميذ الثاني: لا يفرق بين القسمة على العدد الأولي و العدد غير أولي (وجوب أن تكون العوامل أولية) فكثيرا ما تتكرر هذه الأخطاء و هو عدم إدراك أو استيعاب مفهوم الأعداد الأولية.

التلميذ الثالث: رغم أن إجابته كانت صائبة و نموذجية إلا أنه لا يدرك متى ينهي عملية التحليل أو إنهاء عمليات القسمة المتتالية .

التلميذ الرابع: رغم أن إجابته كانت صائبة إلا أنها غير كافية لعدم توضيح كيفية الحصول عنها سواء كانت عن طريق الغش أو بالحساب الذهني فالتبرير الكتابي مطلوب في كل الأسئلة المشابهة التي تتطلب تعليلا و هنا هي عمليات القسمة المتتابعة العمودية.

بالنسبة لسؤال الثاني استنتاج القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر للعددين 1500 و 3500 .

التلميذ الأول: رغم أن إجابته كانت صائبة إلا أنها لا تتوافق مع طبيعة السؤال الاستنتاجية و ليست الحسابية فيما يخص القاسم المشترك الأكبر و تبقى مقبولة فيما يخص المضاعف المشترك الأصغر.

التلميذ الثاني: نفس الملاحظة فيما يخص التلميذ الأول.

التلميذ الثالث: إجابته كانت صائبة و نموذجية.

التلميذ الرابع: نفس الملاحظة فيما يخص التلميذ الأول بالنسبة لاستنتاج المضاعف المشترك الأصغر.

بالنسبة لسؤال الثالث استنتاج الكسر الغير قابل للاختزال الذي يمثل العدد $\frac{1500}{3500}$.

التلميذ الأول: رغم أن إجابته كانت صائبة و نموذجية إلا أنها ليست الإجابة المثالية.

التلميذ الثاني: إجابته كانت صائبة و نموذجية و هي الإجابة المثالية.

التلميذ الثالث: إجابته كانت خاطئة و تدل على عدم استيعابه للدرس.

التلميذ الرابع: إجابته كانت خاطئة و تدل على عدم تمكنه من فهم السؤال نتيجة تأخر دراسي قد يمتد إلى عدة سنوات أي هو في حالة يرثى لها.

بالنسبة لسؤال الرابع تعين قواسم الأعداد الطبيعة 0 ,12 , 50.

التلميذ الأول: إجابته كانت خاطئة بينما التلميذ الثاني إجابته كانت صائبة و نموذجية فيما يخص قواسم العدد 0 و هذا الأمر ناتج عن عدم التفرقة بين أن كل الأعداد الطبيعية الغير معدومة تقسم العدد 0 بينما الصفر لا يقسم أي عدد .

بينما العددان 12 و 50 فيظهران لنا تجاهل بعض التلاميذ أول قاسمين معروفين وهما العدد 1 و العدد نفسه إضافة لعدم فهم درس القواسم لعدد صحيح على عدد طبيعي فيكون حاصل القسمة هو عدد صحيح و ليس كما يظن بعض التلاميذ أن فاصلته منتهية(عدد عشري).

بالنسبة لسؤال الرابع تعين بواقي قسمة العدد 3^n على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n .

التلميذ الثالث: إجابته كانت خاطئة بينما التلميذ الرابع إجابته كانت صائبة و نموذجية فيما يخص التلميذ الثالث يبدو أن له فهم سطحي لدرس بواقي قسمة قوى عدد طبيعي على عدد طبيعي غير معدوم و لم يستوعبه كاملا فعليه مراجعته و حل مزيدا من التمارين المشابهة و التي تطرح أفكارا جديدة.

بإذن الله

انتظروا بقية

الدروس في

قادم الأيام

قابلية القسمة على الأعداد 3 و 9

قابلية القسمة على 2:

ليكن n عددا طبيعيا كيفيا. نقول أن العدد n يقبل القسمة على **2** إذا و فقط إذا كان رقم أحادة ينتهي بأحد الأعداد **0** أو **2** أو **4** أو **6** أو **8**.

مثال: الأعداد **1024** ، **822** ، **1000** ، **96** ، **98658** تقبل القسمة على **2**

بينما الأعداد **1079** ، **811** ، **1493** ، **97** ، **94655** لا تقبل القسمة على **2**.

قابلية القسمة على 5:

ليكن n عددا طبيعيا كيفيا. نقول أن العدد n يقبل القسمة على **5** إذا و فقط إذا كان رقم أحادة ينتهي بأحد الأعداد **0** أو **5**.

مثال: الأعداد **1020** ، **825** ، **1000** ، **95** ، **98655** تقبل القسمة على **5**

بينما الأعداد **1079** ، **811** ، **1493** ، **97** ، **94658** لا تقبل القسمة على **5**.

قابلية القسمة على 3:

مبرهنة: ليكن n عددا طبيعيا كيفيا. نقول أن العدد n يقبل القسمة على **3** إذا و فقط إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على **3**.

البرهان:

نحن نعلم أن كل عدد طبيعي n يكتب في النظّام العّشري على الشكل:

$$n = a_m \dots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$$

حيث: a_0 هو رقم الآحاد و a_1 هو رقم العشّرات و a_2 هو رقم المئات و a_3 هو رقم الآلاف و هكذا باقي الأرقام .... أي أن:

$$n = a_m 10^m + \cdots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

بما أن : $10 \equiv 1[3]$ بتطبيق خاصية القوى للموافقات فإن $10^m \equiv 1[3]$ و بتطبيق خاصية الضرب نحصل على $a_m 10^m \equiv a_m[3]$

مهما تكن قيمة العدد m و بتطبيق خاصيتي الجمع و الضرب مع جميع الحدود نجد:

$$n \equiv a_m + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \ [3]$$

و عليه العدد الطبيعي العدد n يقبل القسمة على **3** إذا و فقط إذا كان **مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3**.

و بإتباع نفس البرهان مع العدد **9** نبرهن أن العدد n يقبل القسمة على **9** إذا و فقط إذا كان **مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9**.

قابلية القسمة على 9:

مبرهنة: ليكن n عددا طبيعيا كيفيا. نقول أن العدد n يقبل القسمة على **9** إذا و فقط إذا كان **مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9**.