خواص الموافقة في $\mathbb{Z}$

n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة.

① $a \equiv a[n]$

② إذا كان: $a \equiv b[n]$ فإنّ: $b \equiv a[n]$.

③ إذا كان: $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإنّ: $a \equiv c[n]$.

④ إذا كان: $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإنّ: $a + c \equiv b + d[n]$.

⑤ إذا كان: $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ ،فإنّ: $a \times c \equiv b \times d[n]$.

⑥ p عدد طبيعي غير معدوم: إذا كان: $a \equiv b[n]$ فإنّ $a^p \equiv b^p[n]$.

التمرين 1

a و b عددان طبيعيان حيث $b = 2006$ ، $a = 1428$

1. أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9
ب) بيّن أن: $b \equiv -1[9]$
ج) هل العددان a و b متوافقان بترديد 9 ؟ برّر إجابتك. دورة 2008 (1)

2. أ) ماهو باقي قسمة العدد $(a + b^2)$ على 9 ؟
ب) استنتج باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3

التمرين 2

1. احسب باقي قسمة كل من 3^2 ، 3^3 ، 3^4 ، 3^5 ، 3^6 على 7 .

2. عين باقي قسمة كل من 3^{6n} و 3^{6n+4} على 7 حيث n عدد طبيعي عير معدوم. دورة 2008 (2)
استنتج باقي قسمة 3^{2008} على 7 .

3. بين أن العدد : $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 3 ليكن العدد الطبيعي $a = 25$

1. أ. تحقق أنّ: $a \equiv 1[3]$.
ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2a^2 + 4$ على 3 . دورة 2009 (1)
جـ .بيّن أنّ: $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$

2. أ.ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ،بواقي قسمة العدد 5^n على 3 .
ب.عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $5^n + a^2 \equiv 0[3]$

التمرين 4

1. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9 . دورة 2009 (2)

2. عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد: $(1429^{2009} + 2008^{1430})$ على 9 .

3. بيّن أن العدد A حيث: $A = 7^{3n} + 7^{3n+1} + 7^{3n+2} + 6$ يقبل القسمة على 9 من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 5

a و b عددان طبيعيان حيث: $a = 2010$ و $b = 1431$.

1. أ. عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7 .
ب.استنتج مما سبق، باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a + 2b)$ على 7 . دورة 2010 (1)
جـ.تحقق أنّ: $a^3 \equiv 1[7]$ و $b^3 \equiv 6[7]$ واستنتج أنّ $a^3 + b^3 \equiv 0[7]$.

2. أوجد الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $n + 2010^3 \equiv 1431[7]$.
ثم استنتج قيم n الأصغر من أو تساوي 16 .

التمرين 6 في كل من الأسئلة الآتية اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة،مع التعليل:

1. باقي القسمة الإقليدية للعدد (-203) على 5 هو:
أ) -3 ب) 2 ج) 3 دورة 2010 (2)

2. x عدد صحيح.إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد x على 7 هو 5 فإنّ باقي القسمة الإقليدية للعدد $2x+5$ على 7 هو:
أ) 0 ب) 1 ج) 2.

التمرين 7

نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث: $a = 619$ و $b = 2124$

1. بيّن أنّ العددين a و b متوافقان بترديد 5 .
2. أ) بيّن أنّ: $2124 \equiv -1[5]$.
ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2124^{720} و 619^{721} على 5 .
ج) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $2124^{2n} \equiv 1[5]$. دورة 2011 (1)
د) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0[5]$.

التمرين 8 a ، b و c أعداد صحيحة،بحيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3 . باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4 وباقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6 . دورة 2011 (2)

1. عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين: $a \times b$ ، $a^2 - b^2$
2. أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $c^{2n} \equiv 1[7]$
ب) تحقق أنّ $48 \equiv 6[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين: 48^{2010} و 48^{2011} على 7

التمرين 9 اذكر في كل حالة من الحالات الآتية إن كانت العبارة المقترحة صحيحة أو خاطئة مع التعليل:

1. n و n' عددان طبيعيان حيث: $n = 3n' + 5$. باقي قسمة n على 3 هو 5 . دورة 2012 (1)
2. باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2012} على 7 هو 4 .
(لاحظ أنّ: $2012 = 3 \times 670 + 2$)
3. n عدد صحيح حيث: $n \equiv 2[11]$ باقي القسمة الإقليدية للعدد $2n^2 - 9$ على 11 هو 10 .

التمرين 10 a و b عددان طبيعيان بحيث:
$a + b \equiv 7[11]$ و $a - b \equiv 5[11]$.

1. أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على العدد 11 .
ب) بيّن أنّ: $2a \equiv 1[11]$ و $2b \equiv 2[11]$ ثم استنتج أنّ: $a \equiv 6[11]$ و $b \equiv 1[11]$.
2. أ) أثبت أنّ: $a^5 \equiv -1[11]$.
ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي k: $a^{10k} \equiv 1[11]$.
3. أ) تحقق أنّ: $2012 = 10 \times 201 + 2$.
ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{2012} على العدد 11 . دورة 2012 (2)

التمرين 11

1. هل العددان 2013 و 718 متوافقان بترديد 7 ؟
2. أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^6 على 7 .
ب) استنتج أنه،من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{6n} - 1 \equiv 0[7]$.
3. أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2013 و 718 على 7 .
ب) بيّن أنّه،من أجل كل عدد طبيعي n ،العدد $3 \times 718^{6n} + 2013$ يقبل القسمة على 7 .
4. أ) تحقق أن: $1434 \equiv -1[7]$. دورة 2013 (1)
ب) عين الأعداد الطبيعية n ،الأصغر من 25 بحيث: $1434^{2n} + n \equiv 0[7]$.

التمرين 12

a و b عددان صحيحان حيث: $a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 6[7]$.

1. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a + b$ على 7 .
2. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7 .
3. أ) تحقق أنّ: $b \equiv -1[7]$. دورة 2013 (2)
ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{2013} و b^{1434} على 7 .
4. عين الأعداد الطبيعية n بحيث: $(a+b)^n + n \equiv 0[7]$.

التمرين 13

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 28 على العدد 9 .

2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي k : $10^k \equiv 1[9]$.

3. استنتج أنّ: دورة 2014(1)
$4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$.

4. أ) تحقق أنّ: $2^3 \equiv -1[9]$.
عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث: $2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$.

التمرين 14 عيّن الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث في كل حالة من الحالات الخمس مع التبرير:

1. عدد قواسم 1435 هو:
أ) 8. ب) 5. ج) 2.

2. إذا كان $a \equiv -1[8]$ فإن باقي قسمة a على 8 هو:
أ) -1. ب) 7. ج) 6.

3. العددان 1435 و 2014 متوافقان بترديد:
أ) 2. ب) 4. ج) 3.

4. إذا كان $x \equiv 2[5]$ و $y \equiv 2[5]$ فإنّ:
أ) $x^9 + y^9 \equiv 3[5]$. ب) $x^9 + y^9 \equiv 2[5]$.
ج) $x^9 + y^9 \equiv 4[5]$.

5. لدينا $27 \equiv 21[6]$ إذن: دورة 2014(2)
أ) $9 \equiv 7[6]$. ب) $9 \equiv 7[2]$. ج) $9 \equiv 7[3]$.

التمرين 15 عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد،مع التعليل،من بين الاقتراحات الثلاث في كل حالة من الحالات الأربع الآتية:

1. إذا كان a عددا صحيحا حيث: $a \equiv -1[5]$ فإنّ:
أ) $a \equiv 2[5]$. ب) $a \equiv 6[5]$. ج) $a \equiv 99[5]$.

2. باقي القسمة الإقليدية للعدد -99 على 7 هو:
أ) -1. ب) 6. ج) 1.

3. من أجل كل عدد طبيعي n ،العدد $10^n - 1$ يقبل القسمة على:
أ) 3. ب) 5. ج) 2.

4. مجموع كل ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة هو دوما:
أ) عدد زوجي. ب) مضاعف للعدد 3.
ج) مضاعف للعدد 4. دورة 2015(1)

التمرين 16
a و b عددان صحيحان يحققان:
$a \equiv 13[7]$ و $b \equiv -6[7]$.

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين a و b . دورة 2015(2)

2. بيّن أنّ العددين $a^3 + 1$ و $b^3 - 1$ يقبلان القسمة على 7

3. أ) تحقق أنّ: $a \equiv 2015[7]$ و $b \equiv 1436[7]$.
ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $2015^3 + 1436^3$.
ج) استنتج أنّ: $2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0[7]$.

التمرين 17

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 2^0 ، 2^1 ، 2^2 ، 2^3 و 2^4 على العدد 5 .

2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n يكون: $2^{4n} \equiv 1[5]$.
ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2016} على العدد 5 . دورة 2016(1)

3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$.

التمرين 18

1. أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^3 على 9 .
ب) استنتج انّه من أجل كل عدد طبيعي k : $4^{3k} \equiv 1[9]$.
ج) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 9 .
د) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 9 .
دورة 2016(2)

2. أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $8^{2n} \equiv 1[9]$.
ب) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $8^{2n} + 4^n + 1$ مضاعفا للعدد 9 .

التمرين 19 نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث:
$a = 2016$ ، $b = 1437$ و $c = 1954$.

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من a ، b و c على 5
2. استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد: $a+b+c$ ، $a\times b\times c$ و b^4 على 5 .
3. أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $b^{4n}\equiv 1[5]$
ب) استنتج أنّ العدد $b^{2016}-1$ يقبل القسمة على 5 .
4. أ) تحقق أنّ: $c\equiv -1[5]$. **دورة 2017 (1)**
ب) بيّن أنّ: $c^{1438}+c^{2017}\equiv 0[5]$.

التمرين 20

a ، b و c ثلاثة أعداد طبيعية حيث: $a\equiv -5[7]$ ، $b=1966$ ، $c=2017$.

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد: a ، b و c على 7 . **دورة 2017 (2)**
2. تحقق أنّ: $b\equiv -1[7]$.
3. أثبت أن العدد: $b^{2017}+3\times c^{1438}-2$ يقبل القسمة على 7 .
4. تحقق أنه، من أجل كل عدد طبيعي k : $2^{3k}\equiv 1[7]$ ثم استنتج أنّ: $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ و $2^{3k+2}\equiv 4[7]$.
5. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 2^n+3 قابلا للقسمة على 7 .

التمرين 21 **الاستثنائية (1)**

1. أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4 ، 4^2 و 4^3 على 9 .
ب) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{3n}\equiv 1[9]$
ج) استنتج أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{3n+1}\equiv 4[9]$.
2. تحقق أنّ: $2020^{1438}\equiv 4[9]$.
3. بيّن أنّ العدد $(2020^{1438}-2017^2+1995)$ يقبل القسمة على 9 .

التمرين 22 **الاستثنائية (2)**

a و b عددان صحيحان حيث: $a\equiv 14[13]$ و $b\equiv -1[13]$.

1. أ) بيّن أنّ باقي القسمة الإقليدية للعددين a و b على 13 هو 1 و 12 على الترتيب.
ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من $a+b$ ، $a-b$ و $2a+b^2$ على 13 .
2. بيّن أنّ العدد $a^{1438}+b^{2017}$ يقبل القسمة على 13 .
3. عيّن الأعداد الطبيعي n بحيث: $b^{2017}+n+1438\equiv 0[13]$

التمرين 23

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5 .
2. عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون: $2018=4\alpha+2$.
3. بيّن أنّ العدد: $2^{2018}+2017^8-5$ يقبل القسمة على 5 .
4. أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $12^n\equiv 2^n[5]$ و $(-3)^n\equiv 2^n[5]$.
ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $12^n+(-3)^n-4\equiv 0[5]$. **دورة 2018 (1)**

التمرين 24

a و b عددان طبيعيان غير معدومان حيث $a=4b+6$.

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4 .
2. بيّن أنّ a و b متوافقان بترديد 3 .
3. نضع $b=489$. **دورة 2018 (2)**
أ) تحقق أنّ $a\equiv -1[13]$.
ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2018}+40^{2968}$ على 13 .
ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد: $a^{2n}+n+3$ قابلا للقسمة على 13 .

التمرين 25

a و b عددان طبيعيان حيث: $a=2019$ و $b=2969$.

1. أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7 .
ب) استنتج أنّ العددين a و $3b$ متوافقان بترديد 7 .
2. بيّن أنّ: $9a+b\equiv 0[7]$. **دورة 2019 (1)**
3. تحقق أنّ: $2a\equiv -1[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2969}\times 2^{2969}$ على 7 .
4. عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث: $b^n+an+2\equiv 0[7]$.

التمرين 26

a و b عددان طبيعيان حيث: $a = 2019$ و $b = 1441$.

1. تحقق أنّ: $a \equiv 13[17]$. **دورة 2019 (2)**
2. بيّن أنّ: a و b متوافقان بترديد 17 ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 17 .
3. بيّن أنّ $a \times b \equiv -1[17]$ ثمّ استنتج أنّ: $3a^2 \times b^2 + 14 \equiv 0[17]$.
4. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 17 .
5. بيّن أنّ: $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 0[17]$
6. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $n + 1954^{1962} + 16 \equiv 0[17]$.

التمرين 27

لتكن الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث: $a = 2020$ ، $b = 2970$ و $c = 1441$.

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية لكلّ من الأعداد a ، b و c على 9 **دورة 2020 (1)**
2. تحقّق أنّ العدد b و $(a+5)$ متوافقان بترديد 9 .
3. تحقّق أنّ: $2a \equiv -1[9]$ ثمّ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2a)^{31}$ على 9 .
4. بيّن أنّ العدد $(3a - 2b - 12c^2)$ يقبل القسمة على 9 .

التمرين 28

a و b عددان صحيحان حيث: $a \equiv 2[7]$ ، $b = 2020$.

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 .
2. بيّن أنّ : $a^2 + b^2 \equiv -1[7]$ ثم استنتج أنّ العدد $(a^2 + b^2)^{1962} - 8$ يقبل القسمة على 7 .
3. أ.عيّن بواقي القسمة الإقليدية لكلّ من الأعداد 4 ، 4^2 و 4^3 على 7 .

   ب.بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $4^{3n} \equiv 1[7]$ ثم استنتج أنّ: $4^{3n+1} \equiv 4[7]$.

   جـ.بيّن أنّ: $b^{21} \equiv 1[7]$. **دورة 2020 (2)**
4. عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $4^n + a + b^{21} \equiv 0[7]$

التمرين 29

ليكن a و b عددين طبيعيين حيث: $a = 2926$ و $b = 1715$

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية لكلّ من العددين a و b على العدد 13 **دورة 2021 (1)**
2. أ.بيّن أنّ: $b + 1 \equiv 0[13]$ ثمّ استنتج أنّ: $b \equiv -1[13]$

   ب.بيّن أنّ العدد $a^{1442} + b^{2021}$ يقبل القسمة على 13
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $A_n = 27^n + 1$

   أ.تحقّق أنّ $27 \equiv 1[13]$ ثمّ استنتج أنّ: $A_n \equiv 2[13]$

   ب.عيّن الأعداد الطبيعية n حتى يكون: $A_n + n + 11 \equiv 0[13]$

التمرين 30 لتكن الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث: $a = 2021$ ، $b = 1442$ و $c = 1954$

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعددين a و c على 3
2. بيّن أنّ العددين a و b متوافقان بترديد 3
3. أ.بيّن أنّ العدد $a + b - c$ يقبل القسمة على 3

   ب.استنتج الأعداد الطبيعية n حتى يكون: $n + a + b - c \equiv 0[3]$ **دورة 2021 (2)**
4. عيّن باقي قسمة العدد $(a \times c)^{1442} + (b \times c)^{2021}$ على 3

التمرين 31

1. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13 .
2. تحقق أنّ: $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$.
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$. **تقني رياضي 2010**