

# تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا

## شعبة : تسيير و إقتصاد

التعريف [1] [باك 2008] [1م] [4ن]

(1)  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة كما يلي :  $u_0 = \alpha$  ،  $(\alpha \in \mathbb{R})$  ، ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9}$  .

(1) برهن بالتراجع أنه في حالة  $\alpha = -\frac{8}{3}$  تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة .

(2) في كل مايلي :  $\alpha = 2$  ، ونعرف المتتالية العددية  $(v_n)$  كما يلي :  $v_n = u_n + \frac{8}{3}$

أ- أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .

ب- أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_0$  .

ج- أكتب عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  . وأحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

التعريف [2] [باك 2008] [2م] [5ن]

(1) المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة كما يلي :  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$  .

(1) أحسب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  .

(2) أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq -2$  .

ب- جد اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  . ماذا تستنتج ؟

(3)  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  كما يلي :  $v_n = u_n + 2$  .

أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية .

ب- عبّر بدلالة  $n$  عن الحد العام  $v_n$  ثم  $u_n$  .

ج- أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

د- أحسب ، بدلالة  $n$  ، المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  .

التعريف [3] [باك 2009] [1م] [4ن]

(1) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ :  $u_0 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون  $3u_{n+1} = u_n + 4$  .

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، يكون  $u_n \leq 2$  .

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .

ج- استنتج مع التبرير أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n - 2$  .

أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول وأساسها .

ب- أكتب الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ج- أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

د- أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .

**التعريف [4] [باك 2009] [2م] [4 ن]**

- ( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة بـ:  $u_0 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 3u_n - 2$  .
- (1) أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .
  - (2) لتكن المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة بـ:  $v_n = u_n - 1$  .  
أ- أثبت أن المتتالية ( $v_n$ ) هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_0$  .  
ب- أكتب عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  .
  - (3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n = (-4) \times 3^n$  ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) .
  - (4) عين العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون :  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = n - 79$  .

**التعريف [5] [باك 2010] [1م] [4 ن]**

- (1)  $n$  عدد طبيعي ، أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = 1 + e + e^2 + e^3 + \dots + e^n$  ( $S_n$  مجموع حدود متتالية هندسية أساسها  $e$  وحدها الأول  $1$  ، و  $e$  يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري).
- (2) لتكن المتتالية العددية ( $w_n$ ) المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $w_n = 2n + 4 + e^n$  .  
بين أن:  $w_n = u_n + v_n$  ، حيث ( $u_n$ ) متتالية حسابية و ( $v_n$ ) متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول والأساس لكل منهما.
- (3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$  .
- (4) استنتج المجموع  $S'_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$  .

**التعريف [6] [باك 2010] [2م] [6 ن]**

- لتكن ( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$  .
- (1) أحسب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  .
  - (2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n < 2$  .  
ب- بين أن المتتالية ( $u_n$ ) متزايدة تماما .  
ج- استنتج أن المتتالية ( $u_n$ ) متقاربة .
  - (3) نعتبر المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = u_n - 2$  .  
أ- بين أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .  
ب- أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$  .  
ج- ما هي نهاية المتتالية ( $u_n$ ) ؟
  - (4) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  ، واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  
$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$$

**التعريف [7] [باك 2011] [2م] [5,5]**

لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  حيث:  $u_0 = \frac{1}{2}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$ .

(1) أحسب  $u_1$  و  $u_2$ .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n > \frac{1}{3}$ .

(3) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(4) لتكن المتتالية العددية  $(v_n)$  حيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ .

أبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب كلا من  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$ .

ج- أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$ .

**التعريف [8] [باك 2012] [1م] [5]**

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$ .

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n > \frac{2}{3}$ .

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

(2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ .

أبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$ .

ج- ماهي نهاية المتتالية  $(u_n)$ ؟

(3) أحسب، بدلالة  $n$ ، المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

**التعريف [9] [باك 2012] [2م] [5]**

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000DA في صندوق التوفير والإحتياط. يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.

يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000DA (بعد حساب الفوائد).

يرمز  $u_n$  إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة  $2008 + n$ .

(1) أ- أحسب كلا من  $u_0$ ،  $u_1$  و  $u_2$ .

ب- هل المتتالية  $(u_n)$  هندسية؟ هل هي حسابية؟ برر إجابتك.

ج- بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا،  $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$ .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $v_n = u_n - 100000$ .

أبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية، حدد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = -50000 \times (1,05)^n + 100000$ .

(3) أ- ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015؟

ب- ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 3$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3}$  ، حيث  $a$  وسيط حقيقي .

(1) عين قيمة  $a$  من أجلها تكون المتتالية ( $u_n$ ) ثابتة .

(2) نفرض  $a \neq \frac{5}{2}$  . عين قيمة  $a$  حتى تكون المتتالية ( $u_n$ ) حسابية ، ثم أحسب عندئذ  $u_n$  و مجموع  $n$  حدا الأولى من المتتالية ( $u_n$ ) .

(3) عين قيمة  $a$  حتى تكون المتتالية ( $u_n$ ) هندسية ، ثم عين في هذه الحالة كلا من  $u_{50}$  و مجموع 50 حدا الأولى منها .

(4) نفرض  $a = 4$  . برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، فإن :  $u_n = 3^n + 2$  ، ثم بين أن :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$$

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 6$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6$  .

(1) أحسب الحدود:  $u_1$  ،  $u_2$  ،  $u_3$  و  $u_4$  .

ب- هل المتتالية ( $u_n$ ) رتيبة على  $\mathbb{N}$  ؟ برز إجابتك .

(2) أـ بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$  .

ب- استنتج أن المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = u_n - 4$  هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ج- أكتب  $v_n$  ، ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  .

د- بين أن ( $u_n$ ) متقاربة .

(3) باستعمال عبارة  $u_n$  ، تأكد ثانياً من نتيجة السؤال 1 ب- .

المتتالية العددية ( $u_n$ ) معرفة كما يلي:  $u_0 = 3$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$  .

(1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_n > -3$  .

ب- بين أن المتتالية ( $u_n$ ) متناقصة تماماً .

ج- استنتج أن المتتالية ( $u_n$ ) متقاربة .

(2) لتكن ( $v_n$ ) متتالية هندسية متقاربة أساسها  $q$  حيث :  $v_0 = 6$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) = 18$  .

أـ بين أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$  .

ب- أحسب الأساس  $q$  ثم عين عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  .

ج- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = v_n - 3$  ، واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

بينت دراسة أن 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يوظف 3000 عامل سنويا .  
علما أن سنة 2012 كان عدد العمال 50000 .

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ  $u_n$  لعدد العمال سنة  $2012 + n$  أي  $u_0 = 50$  .

(1) أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$  .

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  ليست حسابية وليست هندسية .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = 60 - u_n$  .

أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ج- قدر عدد العمال سنة 2017 .

د- حدد اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

هـ- أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل ؟

$(v_n)$  متتالية هندسية حدودها موجبة ومعروفة على  $\mathbb{N}$  بحدها الأول  $v_0 = 18$  والعلاقة :  $v_0 + v_1 + v_2 = 38$  .

(1) بين أن أساس المتتالية  $(v_n)$  هو  $q = \frac{2}{3}$  .

(2) أ- أكتب عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(v_n)$  .

ج- أحسب نهاية  $(v_n)$  .

(3) نضع :  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$  .

أ- أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج نهاية  $S_n$  عندما  $n$  يؤول إلى  $+\infty$  .

ب- جد العدد الطبيعي  $n$  بحيث  $S_n = \frac{3510}{81}$  .

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = 5$  و  $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$  .

(1) أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > 1$  .

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما .

ج- ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية  $(u_n)$  ؟

(3) لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = u_n - 1$  .

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية معيننا أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$  .

ج- أحسب نهاية  $(u_n)$  .

- ( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول  $u_0 = -1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$  .
- 1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n < 3$  .  
بـ بين أن المتتالية ( $u_n$ ) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .
  - 2) ( $v_n$ ) المتتالية المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = 3 - u_n$  .  
أـ بين أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$  ، ثم عين حدها الأول .  
بـ نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .  
بين أن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$  .

- لتكن ( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول  $u_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 3u_n - 2$  .
- 1) أحسب  $u_1, u_2, u_3$  ، ثم خمن اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) .
  - 2) نعتبر المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = u_{n+1} - u_n$  .  
أـ بين أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول .  
بـ عين  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج أن المتتالية ( $u_n$ ) متزايدة .
  - 3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم ،  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$  .  
أـ أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$  .  
بـ بين أن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = S_n + u_0$  واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

- لتكن ( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بـ :  $u_0 = -2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$  .
- 1) أـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n < 2$  .  
بـ عين اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) ، ثم استنتج أنها متقاربة .
  - 2) نعتبر المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = 2u_n - 4$  .  
أـ بين أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .  
بـ أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $v_n$  بدلالة  $n$  .
  - 3) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .

- نعتبر المتتالية الهندسية ( $v_n$ ) ذات الأساس  $e^2$  والحد الأول  $v_0 = 1$  حيث  $v_0 = 1$  . ( $e$  يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري)
- 1) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  .
  - 2) نعتبر المتتاليتين ( $u_n$ ) و ( $w_n$ ) المعرفتين كما يلي :  
من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $w_n = 2n + 4 + e^{2n}$  و  $u_n = w_n - v_n$  .  
بين ( $u_n$ ) متتالية حسابية ، يطلب تعيين أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_0$  .
  - 3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$  .
  - 4) استنتج المجموع  $T_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$  .

(I) لتكن المتتاليتان العدديتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتان كما يلي :

$$u_0 = 50 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = 0,7u_n + 6 \text{ و } v_n = u_n - 20$$

(1) برهن أن  $(v_n)$  هندسية أساسها 0,7 يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$  ، وكتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ .

(2) أكتب بدلالة  $n$  عبارة الحد العام  $u_n$ .

ب- عين اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

(II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة ، ونرمز ب  $u_n$  لعدد المشتركين سنة  $2016 + n$  أي  $u_0 = 50$

(1) ما هو عدد المشتركين في سنة 2017 ؟ ثم في سنة 2018 ؟

(2) أ- برز العبارة:  $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$ .

ب- ابتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك ؟

$(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي :  $u_0 = -1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $2u_{n+1} = u_n + 6$ .

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n < 6$ .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n - 6$ .

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  ، يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$ .

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

(3) أحسب بدلالة  $n$  ما يلي :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  و  $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$ .

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة ب :  $u_0 = -4$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون  $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$ .

(1) أ- أحسب كلا من  $u_1$  و  $u_2$ .

ب- برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n < 8$ .

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أنها متقاربة.

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع :  $v_n = u_n - \alpha$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$ .

ب- عين قيمة  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{3}{4}$  ، يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$ .

ج- نضع  $\alpha = 8$  ، عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = -12 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$ .

(4) أحسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

**التعريف [23] [باك 2019] [2م] [4ن]**

$$\begin{cases} u_2 + 2u_3 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{ب: } (u_n) \text{ المتتالية الحسابية المعرفة على } \mathbb{N}$$

- (1) أحسب حدّها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$ .
- (2) أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$ .
- (3) بين أن العدد 2019 حد من حدود المتتالية  $(u_n)$ ، ثم أحسب كلا من المجموعين  $S_1$  و  $S_2$  حيث:
 
$$S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{1344} \quad \text{و} \quad S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{1344}$$
- استنتج حساب المجموع  $S_3$  حيث:  $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{1343}$
- (4)  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  ب:  $v_n = e^{6-2u_n}$ 
 أحسب المجموع  $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}$ .

**التعريف [24] [باك 2020] [1م] [4ن]**

- يتقاضى موظف خلال 2019 راتبا شهريا ثابتا يقدر بـ  $70\,000\text{ DA}$ ، في شهر جانفي استهلك منه 80% و ابتداء من شهر فيفري قرر تخفيض مبلغ الإستهلاك شهريا بنسبة 5% من المبلغ المستهلك في الشهر الذي قبله.
- (1) أ- ما هو المبلغ المستهلك في شهر جانفي؟  
ب- حدد المبلغ المستهلك في شهر فيفري.
  - (2) نضع  $u_1$  المبلغ المستهلك في شهر جانفي و  $u_n$  المبلغ المستهلك في الشهر  $n$  حيث عدد طبيعي غير معدوم  $n$ .  
عبر عن  $u_{n+1}$  بدلالة  $u_n$ ، واستنتج أن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها 0.95.
  - (3) أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$ .
  - (4) أ- أحسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019.  
ب- أوجد المبلغ المدخر خلال هذه السنة.

**التعريف [25] [باك 2020] [1م] [4ن]**

- $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2}$ .
- (1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n < \frac{9}{2}$ .  
ب- أدرس إتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أنها متقاربة.
  - (2) نضع: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $v_n = u_n - \frac{9}{2}$ .  
أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$  يطلب حساب حدّها الأول  $v_0$ .  
ب- عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$ ، ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$ .
  - (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .  
أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$ .

**التعريف [26] [باك 2020] [2م] [4ن]**

$$\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8 \ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2 \ln 2 \end{cases}$$

المتتالية الهندسية  $(v_n)$  حدها الأول  $v_0$  وأساسها  $q$  موجبان تماما و

(1) بين أن  $v_3 = 8$  و  $v_5 = 32$  .

(2) أـبين أن :  $v_0 = 1$  و  $q = 2$

بـ أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  .

جـ هل العدد 1024 حد من حدود المتتالية  $(v_n)$  ؟

(3) المتتالية  $(w_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $w_n = 2n - 3 + 2^n$  .

أـتحقق :  $w_n = u_n + v_n$  .

بـ من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع :  $S_n = w_0 + w_2 + \dots + w_n$  .

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = (n+1)(n-3) + 2^{n+1} - 1$  .

**التعريف [27] [باك 2020] [2م] [4ن]**

$(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول  $u_0 = 5$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7}$  .

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > 3$  .

(2) أدرس إتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أنها متقاربة .

(3) المتتالية العددية  $(v_n)$  معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = u_n - 3$  .

أـبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يـطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

بـ أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  .

جـ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 2\left(\frac{5}{7}\right)^n + 3$  وأحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

(4) عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها :  $u_n < \frac{7}{2}$  .

**التعريف [28] [باك 2021] [1م] [4ن]**

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $u_{n+1} = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$  .

(1) أـ أحسب الحدود  $u_0$  ،  $u_1$  و  $u_2$  .

بـ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$  .

جـ استنتج إتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

(2) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع :  $v_n = u_n - 1$  .

أـ أحسب  $v_0$  ، ثم أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  .

بـ بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{4}$  .

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .

أـ أحسب بدلالة  $n$  عبارة  $S_n$  .

بـ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S'_n = n + \frac{11}{3} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$  .

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  بعدها الأول  $u_0$  حيث:  $u_0 = 5$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ .

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$ .

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

ج- استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

(2) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع:  $v_n = u_n - 3$ .

أ- أحسب  $v_0$ ، ثم أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ .

ب- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$ .

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع:  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

أ- أحسب بدلالة  $n$  عبارة  $S_n$ .

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $S'_n = 3n + 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

كتابة : خالد بخاخشة

نشر يوم 2021/11/11

لا تنسونا بمالح دعائكم