# تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا

## شعبة : علوم تجريبية

### التمرين [1] [باك 2008][م1] [4 ن]

1) نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على المجال $I=[1;2]$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{x+2}{-x+4}$

أ- بيّن أن الدالة $f$ متزايدة على $I$.

بـ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $I$ ، $f(x)$ ينتمي إلى $I$ .

2) $(u_n)$ هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0=\dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n$ ينتمي إلى $I$.

بـ- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}$.

بـ- عيّن النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

### التمرين [2] [باك 2008][م2] [5 ن]

$(u_n)$ متتالية عددية معرّفة كما يلي : $u_0=\dfrac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+2$

1) أ- أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ و المنحني $(d)$ الممثل للدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2}{3}x+2$ .

بـ- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : $u_0,u_1,u_2,u_3$ و $u_4$ .

جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ و تقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n\le 6$

بـ- تحقق أن $(u_n)$ متزايدة .

جـ- هل $(u_n)$ متقاربة ؟ برر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=u_n-6$

أ- أثبت أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

بـ- أكتب عبارة $u_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

### التمرين [3] [باك 2009][م1] [3,5 ن]

$(u_n)$ متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{n+2}=\dfrac{4}{3}u_{n+1}-\dfrac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$ .

المتتالية $(v_n)$ معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_{n+1}-u_n$ .

1) أحسب $v_0$ و $v_1$ .

2) برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3) أ- أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ : $S_n=v_1+v_2+...+v_{n-1}$ .

بـ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n=\dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ- بيّن أن $(u_n)$ متقاربة.

## التمرين [4] [باك 2009] [م2] [5 ن]

$(u_n)$ متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول $u_1$ و أساسها $q$ حيث : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1\times u_2\times u_3=216 \end{cases}$

1) أ- أحسب $u_2$ و الأساس $q$ لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول $u_1$

ب- أكتب عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ .

جـ- أحسب $S_n$ حيث : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ بدلالة $n$ ثم عيَن العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون $S_n=728$ .

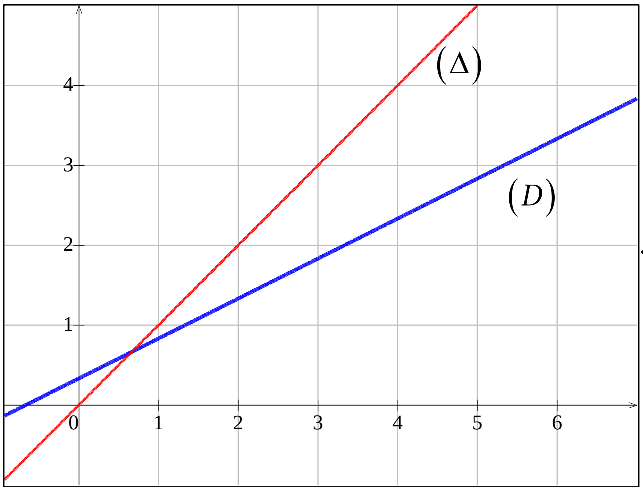
2) $(v_n)$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ كما يلي : $v_1=2$ و $v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$

أ- أحسب $v_2$ ، $v_3$ .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ ، بيَن أن $(w_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ- أكتب $w_n$ بدلالة $n$ ثم إستنتج $v_n$ بدلالة $n$ .

## التمرين [5] [باك 2010] [م2] [5 ن]




في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مثلنا المستقيمين

$(\Delta)$ و $(D)$ معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$

1) لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرَفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

بـ: $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$ .

أ- أنقل الشكل ثمَ مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

$u_0,u_1,u_2,u_3$ و $u_4$ دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- عيَن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين $(\Delta)$ و $(D)$.

جـ- أعط تخمينا حول إتجاه تغيَر المتتالية $(u_n)$.

2) أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n\geq\frac{2}{3}$ .

ب- إستنتج إتجاه تغيَر المتتالية $(u_n)$.

3) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرَفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بالعلاقة : $v_n=u_n-\frac{2}{3}$ .

أ- بيَن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تحديد أساسها و حدَها الأول .

ب- أكتب بدلالة $n$ عبارة الحد العام $v_n$ ، و استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ .

جـ- أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، إستنتج المجموع $S'_n$ حيث : $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$ .

## التمرين [6] [باك 2011] [م1] [3 ن]

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرَفة بـ: $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=3u_n+1$ .

و $(v_n)$ المتتالية العددية المعرَفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{2}$ .

**في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل.**

1) المتتالية $(v_n)$ : أ- حسابية. ب- هندسية. جـ- لا حسابية ولا هندسية.

2) نهاية المتتالية $(u_n)$ هي: أ- $+\infty$ . ب- $-\frac{1}{2}$ . جـ- $-\infty$ .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right]$ .

أ- $S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ ب- $S_n=\frac{1-3^n}{4}$ جـ- $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$ .

## التمرين [7] [باك 2011] [م2] [4 ن]

$\alpha$ عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1.

$(u_n)$ متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$ .

$(v_n)$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n = u_n + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ .

1) أ ـ بيّن أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\alpha$.

بـ ـ أكتب بدلالة $n$ و $\alpha$، عبارة $v_n$ ثم استنتج بدلالة $n$ و $\alpha$، عبارة $u_n$.

جـ ـ عيّن قيم العدد الحقيقي $\alpha$ التي تكون من أجلها المتتالية $(v_n)$ متقاربة.

2) نضع: $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

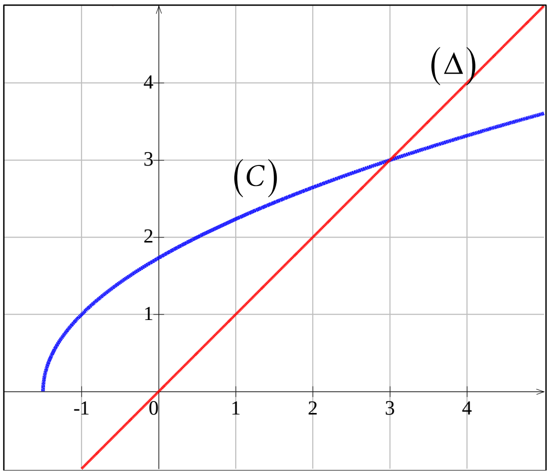
ـ أحسب بدلالة $n$، المجموعين $S_n$ و $T_n$ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ .

## التمرين [8] [باك 2012] [م1] [5 ن]

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1) لتكن $h$ الدالة المعرفة على المجال $\left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{2x + 3}$ و $(C)$ تمثيلها البياني

و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (أنظر الشكل المقابل).




أ ـ أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية $u_0, u_1, u_2$ و $u_3$ .

(دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

بـ ـ ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر $(u_n)$ و تقاربها .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 < u_n < 3$

3) أ ـ أدرس اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$.

بـ ـ إستنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ .

## التمرين [9] [باك 2012] [م2] [4,5 ن]

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = \dfrac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$ .

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $3 < u_n < 4$

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n{}^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$ . استنتج أن $(u_n)$ متزايدة تماما .

3) برّر لماذا $(u_n)$ متقاربة.

4) المتتالية $(v_n)$ معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$ .

أ ـ برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدها الأول.

بـ ـ أكتب كلا من $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ .

جـ ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times ... \times (u_n - 3)$ .

أكتب $P_n$ بدلالة $n$، ثم بيّن أن: $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \dfrac{1}{16}$ .

## التمرين [10] [باك 2013] [1م] [4 ن]

**I)** المتتالية $(v_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$ .

1) بيّن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

2) أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ .

**II)** المتتالية $(u_n)$ معرفة بـ : $u_0 = 1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1 \le u_n \le 6$

2) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ .

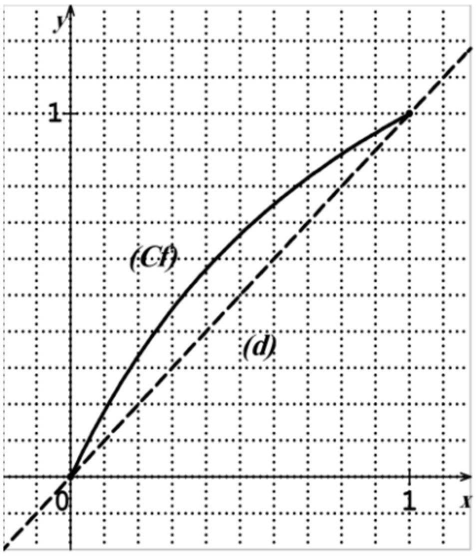
3) أ ـ برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$ .

ب ـ بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \le 6 - u_n \le v_n$ . استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

## التمرين [11] [باك 2013] [2م] [4 ن]

في الشكل المقابل ، $(C_f)$ هو التمثيل البياني للدالة $f$ المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ،

و $(d)$ المستقيم ذو المعادلة : $y = x$




1) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول ، $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ ـ أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة ، ثم مثل الحدود $u_2, u_1, u_0$

و $u_3$ على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب ـ ضع تخمينا حول إتجاه تغيرَ المتتالية $(u_n)$ و تقاربها .

2) أ ـ أثبت أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

ب ـ برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 < u_n < 1$

جـ ـ أدرس اتجاه تغيرَ المتتالية $(u_n)$ .

3) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ .

أ ـ برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول $v_0$ .

ب ـ أحسب نهاية $(v_n)$ .

## التمرين [12] [باك 2014] [1م] [4 ن]

لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$

و $(v_n)$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n = u_n + 4$

1) بيّن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

2) أكتب كلا من $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ .

3) أدرس اتجاه تغيرَ المتتالية $(u_n)$ على $\mathbb{N}$ .

4) أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

5) لتكن $(w_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$ .

أ ـ بيّن أن المتتالية $(w_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ .

ب ـ أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$ .

## التمرين [13][باك 2014][م2] [4 ن]

I) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ ( $e$ هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) بيّن أن $(u_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3) أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n = \ln(u_n)$ ( $\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري) .

1) عبّر عن $v_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج نوع المتتالية $(v_n)$ .

2) أ- أحسب بدلالة $n$ العدد $P_n$ حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_n)$

ب- عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث : $P_n + 4n > 0$ .

## التمرين [14][باك 2015][م1] [4,5 ن]

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـــ : $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$ .

1) أحسب : $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 + u_n > 0$ .

3) بيّن أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة . هل هي متقاربة ؟ علل .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = 3(1+u_n)$

أ- أثبت أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب- أكتب $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

جـ- بيّن أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

## التمرين [15][باك 2015][م2] [5 ن]

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

I) $f$ الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني .

1) عيّن اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $[0;+\infty[$ .

2) أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(D)$ ذي المعادلة : $y = x$ .

3) مثل $(C_f)$ و $(D)$ على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1) أ- أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود $u_0, u_1, u_2$ و $u_3$ ، $v_0, v_1, v_2$ و $v_3$ دون حسابها.

ب- خمّن اتجاه تغيّر و تقارب كل من المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ .

2) أ- أثبت أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث : $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب- استنتج اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ .

3) أ- أثبت أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $v_{n+1} - u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$

ب- بيّن أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $0 < v_n - u_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ- استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ، ثم حدّد نهاية كل من $(u_n)$ و $(v_n)$ .

## التمرين [16] [باك 2016] [الدورة الأولى] [م1] [05 ن]

I) $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$ .

و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

ب- أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) عيّن إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى $(C)$ مع المستقيم $(\Delta)$ الذي : $y=x$ معادلة له .

3) أرسم $(C)$ و $(\Delta)$ .

II) المتتالية $(u_n)$ معرّفة بـ: $u_0=0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ ( دون حسابها ) موضحا خطوط الإنشاء .

2) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ و تقاربها .

3) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0\le u_n<4$

ب- أدرس إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ .

جـ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ .

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$ .

د- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

## التمرين [17] [باك 2016] [الدورة الأولى] [م2] [4 ن]

I) $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5x}{x+2}$ .

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

ب- أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[0;+\infty[$ : $f(x)\ge 0$ .

II) المتتالية $(u_n)$ معرّفة بـ: $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1\le u_n\le 3$

ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) $(v_n)$ المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\frac{3}{u_n}$ .

أ- بيّن أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب- أكتب بدلالة $n$ عبارة $v_n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

3) أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}$

## التمرين [18] [باك 2016] [الدورة الثانية] [م1] [05 ن]

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $I=[0;4]$ بـ : $f(x)=\dfrac{13x}{9x+13}$ .

1) أ- بيّن أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $I$ .

بـ- بيّن أنه من أجل كل من المجال $I$ ، $f(x)$ ينتمي الى المجال $I$ .

2) لتكن المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\le u_n\le 4$

بـ- أدرس إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n\ne 0$

4) لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=2+\dfrac{13}{u_n}$

أ- برهن أن المتتالية $(v_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول $v_0$ .

بـ- أكتب $v_n$ بدلالة $n$ .

جـ- إستنتج أن : $u_n=\dfrac{52}{36n+13}$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

## التمرين [19] [باك 2016] [الدورة الثانية] [م2] [4,5 ن]

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}$

و لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

1) بيّن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) أ- عبر بدلالة $n$ عن الحد العام $v_n$ .

بـ- استنتج عبارة الحد $u_n$ العام بدلالة $n$ .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

3) أ- أحسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n=v_0+v_1+....+v_n$ .

بـ- تحقق أن : $\dfrac{1}{3}(1-v_n)=\dfrac{1}{u_n+2}$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي $n$ .

جـ- أحسب بدلالة $n$ المجموع : $S'_n=\dfrac{1}{u_0+2}+\dfrac{1}{u_1+2}+....+\dfrac{1}{u_n+2}$ .

## التمرين [20] [باك 2017] [الدورة العادية] [م1] [4 ن]

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان معرّفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=\dfrac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=3-\dfrac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$ .

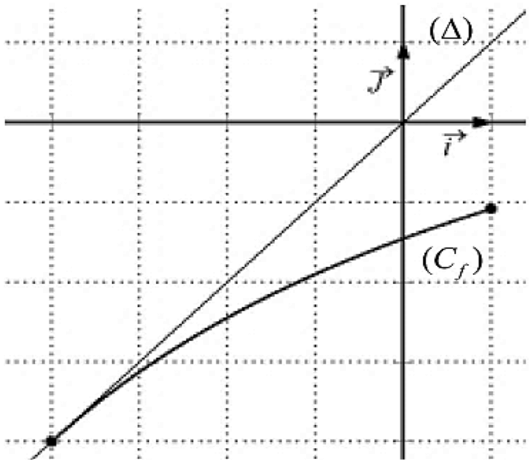
1) أ- برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0<u_n<1$ .

بـ- بيّن أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2) أ- بيّن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\dfrac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام $v_n$ بدلالة $n$ .

بـ- أثبت أن : من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n=1-\dfrac{3}{v_n+1}$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

## التمرين [21] [باك 2017] [الدورة العادية] [م2] [4 ن]




المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و

$f$ الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$ .

و $(C_f)$ المنحنى الممثل لها ، $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة: $y=x$ .

**I)** تحقق أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ . ثم بيَن أن :

من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$ .

**II)** $(u_n)$ متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0,u_1,u_2$ و $u_3$ دون حسابها.

ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغيَر المتتالية $(u_n)$ و تقاربها

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $-4\le u_n\le 0$

ثم بيَن أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما .

3) لتكن المتتالية العددية $(v_n)$ المعرفة كما يلي : $v_n\times u_n=1-4v_n$

أثبت أن المتتالية $(v_n)$ حسابية أساسها $\dfrac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع $S$ حيث : $S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+.....+v_{2016}\times u_{2016}$ .

## التمرين [22] [باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [ م1] [4 ن]

نعتبر المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ المعرَفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n+1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0=6 \\ v_{n+1}=\dfrac{3}{4}v_n+1 \end{cases}$$

1) أحسب الحدَين $u_1$ و $v_1$ .

2) أ- أكتب $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1}-u_n$.

بـ- باستعمال البرهان بالتراجع بيَن أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما و المتتالية $(v_n)$ متناقصة تماما .

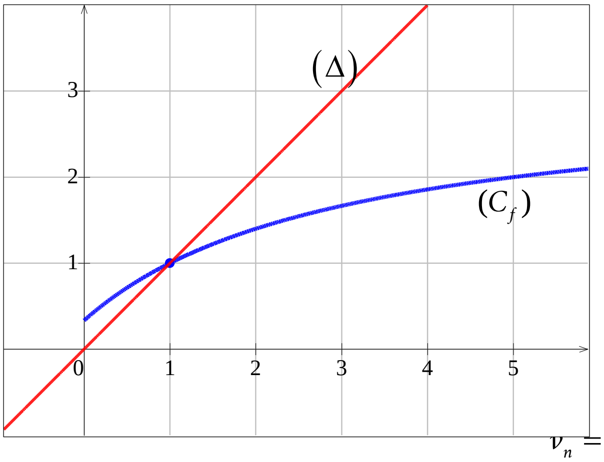
3) نعتبر المتتالية $(w_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=u_n-v_n$

برهن أن المتتالية $(w_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها $q$ و حدَها الأول $w_0$ ثم عبَر عن $w_n$ بدلالة $n$.

4) بيَن أن المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان .

## التمرين [23] [باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [م2] [4 ن]

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة: $y=x$




$\alpha$ عدد حقيقي موجب، $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على بحدها الأول $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1}=f(u_n)$

1) عيّن قيم $\alpha$ حتى تكون $(u_n)$ متتالية ثابتة.

نضع في كل مايلي: $\alpha=5$

2) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود $u_0,u_1,u_2$ و $u_3$ دون حسابها.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و تقاربها

3) نعتبرالمتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ- بيَن أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب- عبّر بدلالة $n$ عن $v_n$ و $u_n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) أحسب بدلالة $n$ المجموع: $S_n=v_n+v_{n+1}+....+v_{n+2016}$.

ثم استنتج بدلالة $n$ المجموع: $S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+....+\frac{1}{u_{n+2016}+1}$.

## التمرين [24] [باك 2018] [م1] [4 ن]

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0$ حيث $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1}=1-\frac{9}{u_n+5}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n>-2$.

ب- بيَن أن $(u_n)$ متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و استنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$

- أثبت أن $(v_n)$ حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

3) عبّر بدلالة $n$ عن $v_n$ و $u_n$، و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_0v_0+u_1v_1+....+u_nv_n=\frac{1}{3}\left(1-n^2\right)$

## التمرين [25] [باك 2018] [م2] [4 ن]

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

1) أحسب كلا من $u_1,u_2$ و $u_3$

2) بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

3) $(v_n)$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n=2n+1$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $e^{u_n}=v_n$.

ب- استنتج عبارة الحد العام للمتتالية $(u_n)$ بدلالة $n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) أحسب المجموعين $S_n$ و $T$ حيث: $S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+...+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T=e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+...+e^{u_{2018}}$

## التمرين [26][باك 2019][م 1] [4 ن]

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=13$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$ .

1) أ- برهن بالبرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n>1$ .

ب- أدرس إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ و استنتج أنها متقاربة .

2) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-1)$ .

- أثبت أن المتتالية $(v_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

3) أكتب $v_n$ بدلالة $n$ ، ثم بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$ و أحسب عندئذ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ .

4) بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $(u_1-1)\times(u_2-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$ .

## التمرين [27][باك 2019][م 2] [4 ن]

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[4;7[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+2}+4$

1) أ- بيّن أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[4;7[$ .

ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)\in[4;7[$ .

2) برهن أنه : من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$ .

ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x>0$ .

3) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $4\le u_n<7$ .

ب- استنتج اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ ثم بيّن أنها متقاربة .

4) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $7-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(7-u_n)$ .

ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0<7-u_n\le3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(u_n)$ .

## التمرين [28][باك 2020][م 1] [5ن]

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=\alpha$ ( $\alpha$ عدد حقيقي ) و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-1$ .

1) نفرض أن : $\alpha=-4$ .

برهن بالبرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n=-4$ .

2) نفرض أن : $\alpha\neq-4$ .

$(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n+4$ .

أ- أثبت أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ .

ب- أكتب عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ و $\alpha$ ثم بيّن أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة .

جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots.+u_n$

أحسب $S_n$ بدلالة $n$ و $\alpha$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ .

## التمرين [29] [باك 2020] [م2] [ن5]

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$ .

1) أحسب كلا من $u_1$ و $u_2$ ، ثم خمن إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ .

2) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - n + 1$ .

أ- بيّن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها 3 ، يُطلب حساب حدها الأول .

بـ- أكتب $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ .

جـ- أدرس إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ .

3) من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + .... + u_n$ .

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + n^2 - n - 3)$ .

بـ- أحسب $\lim_{n \to \infty} S_n$ .

" The only way to learn mathematics is to do mathematics "

كتابة : خالد بخاخشة

نشر يوم 2021/01/17