تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا

الشعبة : علوم تجريبية

التمرين [1] **[باك 2008][م1] [4 ن]**

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1;2]$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{x+2}{-x+4}$

أ- بيّن أن الدالة f متزايدة على I.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0=\dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}$.

ب- عيّن النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين [2] **[باك 2008][م2] [5 ن]**

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=\dfrac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+2$

1) أ- أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2}{3}x+2$.

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0,u_1,u_2,u_3 و u_4 .

جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـ- هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين [3] **[باك 2009][م1] [3,5 ن]**

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{n+2}=\dfrac{4}{3}u_{n+1}-\dfrac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$.

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) أحسب v_0 و v_1 .

2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3) أ- أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=v_1+v_2+\dots+v_{n-1}$.

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ- بيّن أن (u_n) متقاربة.

التمرين [4] باك 2009][م2] [5 ن]

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1\times u_2\times u_3=216 \end{cases}$

1) أ- أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1

ب- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ- أحسب S_n حيث : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ بدلالة n ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=728$.

2) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1=2$ و $v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$

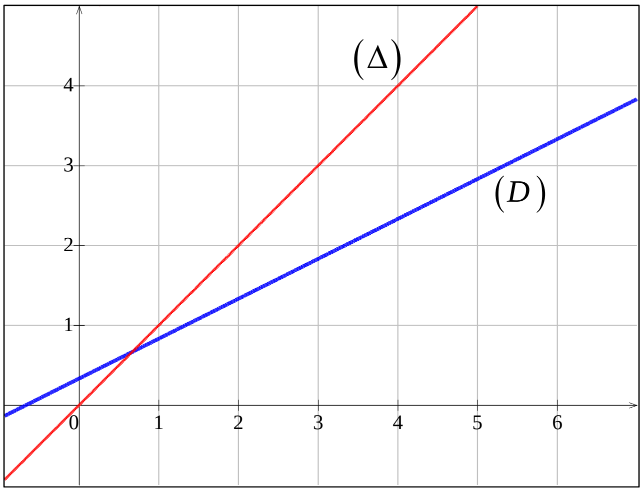
أ- أحسب v_2 ، v_3 .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ ، بيّن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ- أكتب w_n بدلالة n ثم إستنتج v_n بدلالة n .

التمرين [5] باك 2010][م2] [5 ن]

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$



1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

بـ: $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$.

أ- أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

u_0,u_1,u_2,u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).

جـ- أعط تخمينا حول إتجاه تغيّرالمتتالية (u_n).

2) أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\geq\frac{2}{3}$.

بـ- إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n=u_n-\frac{2}{3}$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول .

بـ- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، إستنتج المجموع S'_n حيث : $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين [6] باك 2011][م1] [3 ن]

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+1$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل.

1) المتتالية (v_n) : أ- حسابية. بـ- هندسية. جـ- لا حسابية ولا هندسية.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي : أ- $+\infty$. بـ- $-\frac{1}{2}$. جـ- $-\infty$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right]$.

أ- $S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ بـ- $S_n=\frac{1-3^n}{4}$ جـ- $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$.

التمرين [7] [باك 2011][م2] [4 ن]

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

1) أ ـ بيَن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

بـ ـ أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n.

جـ ـ عيَن قيَم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع: $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

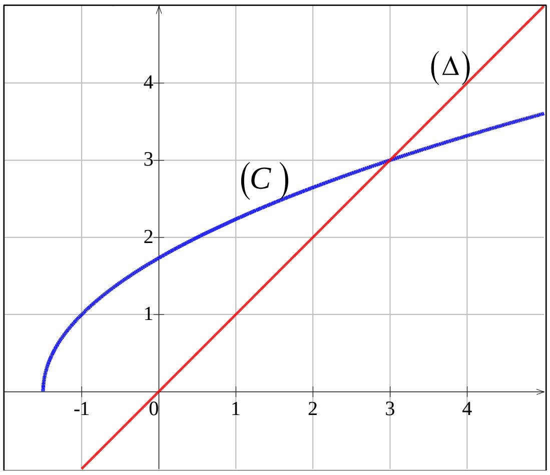
ـ أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

التمرين [8] [باك 2012][م1] [5 ن]

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{2x + 3}$ و (C) تمثيلها البياني

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (أنظر الشكل المقابل).



أ ـ أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية u_0, u_1, u_2 و u_3 (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

بـ ـ ضع تخمينا حول إتجاه تغيَر (u_n) و تقاربها .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

3) أ ـ أدرس اتجاه تغيَر المتتالية (u_n).

بـ ـ إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين [9] [باك 2012][م2] [4,5 ن]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = \dfrac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

2) بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^{\,2} + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما .

3) برَر لماذا (u_n) متقاربة.

4) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$.

أ ـ برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدها الأول.

بـ ـ أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

جـ ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \ldots \times (u_n - 3)$.

أكتب P_n بدلالة n ، ثم بيَن أن: $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \dfrac{1}{16}$.

التمرين [10] [باك 2013][م1][4 ن]

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{5^{n+1}}{6^n}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 6$

2) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

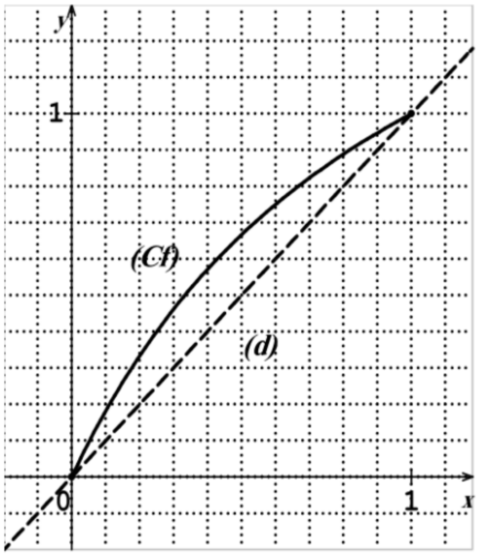
3) أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n: $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 6-u_n\le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين [11] [باك 2013][م2][4 ن]

في الشكل المقابل ، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة : $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة: $y=x$



1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول ، $u_0=\frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة ، ثم مثل الحدود u_2,u_1,u_0

و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب- ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ- أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

ب- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

جـ- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$.

أ- برهن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0 .

ب- أحسب نهاية (u_n) .

التمرين [12] [باك 2014][م1][4 ن]

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n+4$

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

2) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

3) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$.

أ- بيّن أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)$.

التمرين [13] [باك 2014][م2] [4 ن]

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ (e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري) .

1) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

2) أ ـ أحسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_n)$

ب ـ عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$.

التمرين [14] [باك 2015][م1] [4,5 ن]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$.

1) أحسب: u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$.

3) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1+u_n)$

أ ـ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب ـ أكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

جـ ـ بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

التمرين [15] [باك 2015][م2] [5 ن]

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) عيّن اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة: $y = x$.

3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1) أ ـ أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 ، v_0, v_1, v_2 و v_3 دون حسابها.

ب ـ خمّن اتجاه تغيّر و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

2) أ ـ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث: $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب ـ استنتج اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3) أ ـ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$

ب ـ بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ ـ استنتج أن: $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ، ثم حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

التمرين [16] [باك 2016][الدورة الأولى][م1] [05 ن]

I) f الدالة العددية المعرَفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) عيّن إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي : $y=x$ معادلة له .

3) أرسم (C) و (Δ) .

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0=0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

2) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

3) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n<4$

بـ- أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين [17] [باك 2016][الدورة الأولى] [م2] [4 ن]

I) f الدالة العددية المعرَفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5x}{x+2}$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\ge 0$.

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 3$

بـ- أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية المعرَفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\frac{3}{u_n}$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب تعيين حدها الأول .

بـ- أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}$

التمرين [18] [باك 2016] [الدورة الثانية] [م1] [05 ن]

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;4]$ بـ : $f(x)=\dfrac{13x}{9x+13}$.

1) أـ بيِن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

بـ ـ بيِن أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I .

2)لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 4$

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3)بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\neq 0$

4)لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=2+\dfrac{13}{u_n}$

أـ برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0 .

بـ ـ أكتب v_n بدلالة n .

جـ ـ إستنتج أن : $u_n=\dfrac{52}{36n+13}$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين [19] [باك 2016] [الدورة الثانية] [م2] [4,5 ن]

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) أـ عبّر بدلالة n عن الحد العام v_n .

بـ ـ استنتج عبارة الحد u_n العام بدلالة n .

جـ ـ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3)أـ أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+....+v_n$.

بـ ـ تحقق أن : $\dfrac{1}{u_n+2}=\dfrac{1}{3}(1-v_n)$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

جـ ـ أحسب بدلالة n المجموع : $S'_n=\dfrac{1}{u_0+2}+\dfrac{1}{u_1+2}+....+\dfrac{1}{u_n+2}$.

التمرين [20] [باك 2017] [الدورة العادية] [م1] [4 ن]

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=\dfrac{1}{4}$ و من من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3-\dfrac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$.

1) أـ برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

بـ ـ بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

2) أـ بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n .

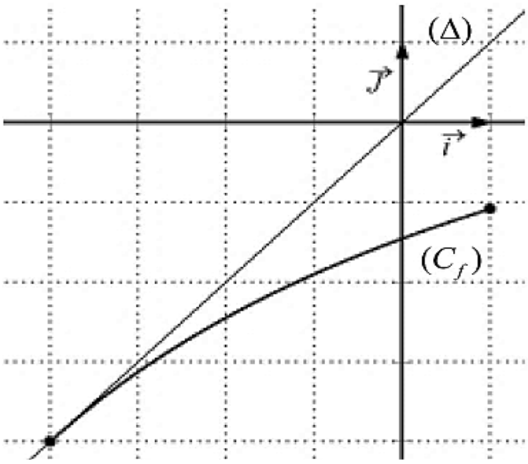
بـ ـ أثبت أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1-\dfrac{3}{v_n+1}$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين [21]   [باك 2017][الدورة العادية][م2] [4 ن]

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$.

و (C_f) المنحنى الممثل لها ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$.



I) تحقق أن الدالة متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$. ثم بيّن أن :

من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$.

II) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2 و u_3 دون حسابها.

ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4\le u_n\le 0$

ثم بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n\times u_n=1-4v_n$

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث : $S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+.....+v_{2016}\times u_{2016}$.

التمرين [22]   [باك 2017][الدورة الإستثنائية][م1] [4 ن]

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n+1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0=6 \\ v_{n+1}=\dfrac{3}{4}v_n+1 \end{cases}$$

1) أحسب الحدين u_1 و v_1 .

2) أ- أكتب $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1}-u_n$.

ب- باستعمال البرهان بالتراجع بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

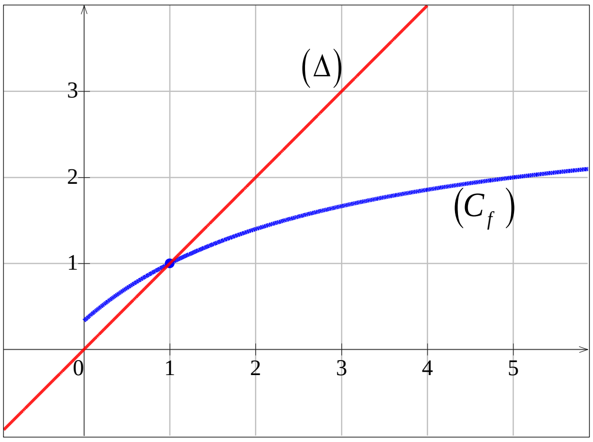
3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=u_n-v_n$

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول w_0 ثم عبّر عن w_n بدلالة n .

4) بيّن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

التمرين [23] [باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [م2] [4 ن]

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$



α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بحدها الأول $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) عيّن قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

نضع في كل مايلي : $\alpha=5$

2) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2 و u_3 دون حسابها.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب- عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_n+v_{n+1}+\dots+v_{n+2016}$.

ثم استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+\dots+\frac{1}{u_{n+2016}+1}$.

التمرين [24] [باك 2018] [م1] [4 ن]

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{9}{u_n+5}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-2$.

ب- بيّن أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و استنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{1}{u_n+2}$

- أثبت أن (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

3) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ، و أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0v_0+u_1v_1+\dots+u_nv_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$

التمرين [25] [باك 2018] [م2] [4 ن]

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

1) أحسب كلا من u_1, u_2 و u_3

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ ثم استنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=2n+1$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n}=v_n$.

ب- استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب المجموعين S_n و T حيث : $S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+\dots+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T=e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+\dots+e^{u_{2018}}$

التمرين [26] [باك 2019][م1] [4 ن]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=13$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$.

1) أ ـ برهن بالبرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$.

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-1)$.

ـ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

3) أكتب v_n بدلالة n، ثم بيَن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$ و أحسب عندئذ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

4) بيَن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $(u_1-1)\times(u_2-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

التمرين [27] [باك 2019][م2] [4 ن]

نعتبر الدالة f المعرَفة على المجال $[4;7[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+2}+4$

1) أ ـ بيَن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.

بـ ـ استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)\in[4;7[$.

2) برهن أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$.

ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x>0$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرَفة بـ : $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $4\le u_n<7$.

بـ ـ استنتج اتجاه تغيَر المتتالية (u_n) ثم بيَن أنها متقاربة .

4) أ ـ بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $7-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(7-u_n)$.

بـ ـ استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $0<7-u_n\le3\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .