حلول تمارين

الدوال اللوغاريتمية

لشعبة علوم تجريبية

✍إعداد : خالد بخاخشة

نوفمبر 2019

التمارين

التمرين ❁1❁ باك 2009 ❁ م 1 ❁ 7 ن ❁

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} h(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و إستنتج اتجاه تغيّر الدالة h ثم أنجز جدول تغيّراتها .

3) أحسب $h(0)$ و إستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} f(x)$ ثم فسّر هذه النتيجة بيانيا .

بـ ـ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

جـ ـ إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ ـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3{,}3$ و $3{,}4$.

4) أرسم (C_f) .

5) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

التمرين ❁2❁ باك 2010 ❁ م 1 ❁ 10 ن ❁

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}\frac{1}{2}} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

4) أ ـ أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

بـ ـ استنتج أنه يمكن رسم (C_f) إنطلاقا من $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثم أرسم $(\mathscr{C})$ و (C_f) .

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}\frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g على I ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ- أحسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α. تحقق أن $2<\alpha<3$.

ب- أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$ في المعلم السابق.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d).

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]1;\alpha[$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

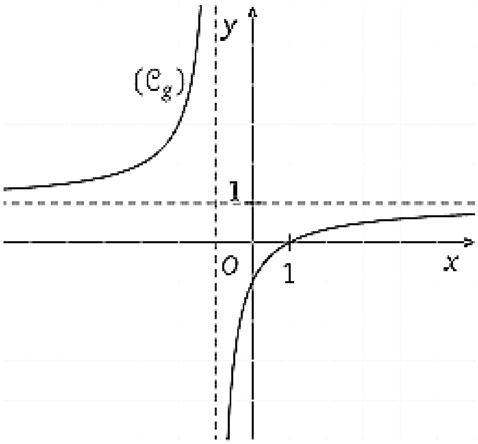
1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

التمرين 3 باك 2011 م1 7ن

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل)،



بقراءة بيانية:

أ- شكّل جدول تغيّرات الدالة g.

ب- حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

جـ- عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$، $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$.

ب- أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

3) أ- باستعمال الجزء **I)** السؤال جـ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب- α عدد حقيقي. بيّن أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جـ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$، $g(x)=1-\frac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

التمرين 4 باك 2012 م2 7ن

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

إستنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

بـ- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

التمرين 5 باك 2013 م 2 (7 ن)

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) إستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)$. فسر النتيجة بيانيا.

بـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

بـ- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

3) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ- أحسب x_0 .

بـ- أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

جـ- عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

التمرين 6 باك 2014 م 1 (6 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، فسر النتيجتين هندسيا.

بـ- أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ ـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=1$.

بـ ـ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ ـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f) .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

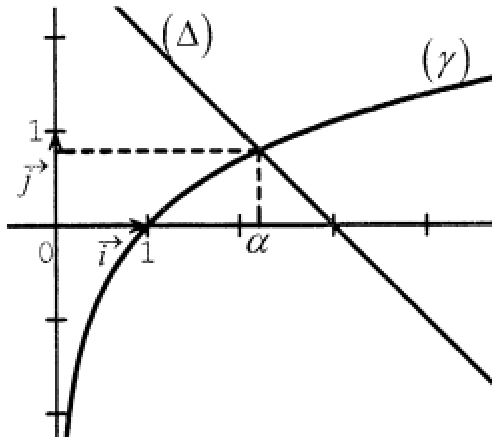
و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

بـ ـ أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) .

جـ ـ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

التمرين 7 باك 2015 م1 7ن



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$

α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x-3+\ln x$.

إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أن: $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم أنشئ (C_f) على المجال $\left]0;e^2\right]$.

III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

1) بيّن أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F .

التمرين 8 باك 2016 - الدورة الأولى - م1 6,5ن

I) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

2) أحسب $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثمّ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

بـ ـ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 .

4) بيّن أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y=x-1$ معادلة له .

بـ ـ أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

5) أرسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C) .

6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث : $y=mx-m$ معادلة له .

أـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

بـ ـ ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx-m$.

7) أـ جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

بـ ـ أحسب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي $(n>1)$.

جـ ـ عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن : $I_n>2$.

التمرين 9 باك 2016 - الدورة الثانية - م 1 ت ر

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$. (العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34<\alpha<-0,33$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x على المجال $]-1;+\infty[$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أـ بيّن أن $\lim\limits_{x \to -1^{>}} f(x)=-\infty$ و أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا .

بـ ـ بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

جـ ـ أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

د ـ أرسم المنحنى (C_f).(نقبل أن : $f(\alpha)=3,16$)

2) أـ . بيّن أن الدالة $x \mapsto \dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

بـ ـ أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

3) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$ ، (C_k) تمثيلها لبياني في المعلم السابق.

أـ بيّن أن الدالة k زوجية .

بـ ـ بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه . (دون دراسة تغيّرات الدالة k)

جـ ـ ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $k(x)=m$.

التمرين 10 باك 2017 - الدورة العادية - م 1 - 7 ن

نعتبر الدالة f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة f فردية ثم فسر ذلك بيانيا .

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب .

3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

إستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$

5) أ- بيّن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

6) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

التمرين 11 باك 2017 - الدورة الإستثنائية - م 1 - 7 ن

I) نعتبر f الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$

ب- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

4) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها ، ثم أنشئ (C_f) .

II) لتكن الدالة g المعرّفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=2[-x+\ln(2x+1)]$.

1) أ- أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

ب- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $1,2<\alpha<1,3$.

جـ- استنتج إشارة $g(x)$.

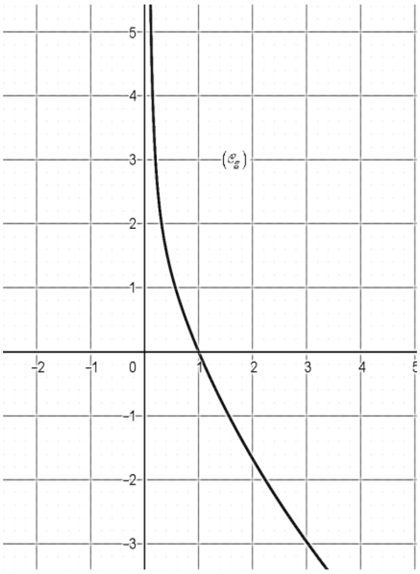
2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 0 : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

أثبت أن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

التمرين 12 باك 2018 م 2 ن 7

I) g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$

(C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل المقابل :



ـ أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

ثم فسّر النتيجتين بيانيا.

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$

بـ ـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f) .

4) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

III) n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) .

التمرين 13 باك 2019 م 1 ن 7

f الدالة العددية المعرّفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانيا .

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " في المعلم السابق .

أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

بـ ـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) .

4) أرسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

5) H الدالة المعرّفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما .

أ ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة x .

بـ ـ أحسب A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

6) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد إتجاه تغيّر الدالة g على مجموعة تعريفها .

حلول التمارين

حل مقترح للتمرين 1 باك 2009

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2x+\ln(x+1)\right)=+\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} -1}\left(x^2+2x+\ln(x+1)\right)=-\infty$$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

إتجاه تغيّر الدالة h :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $x+1>0$ و $1+2(x+1)^2>0$ ومنه $h'(x)>0$

و بالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة h :

x	-1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

حساب $h(0)$ و إستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x :

$$h(0)=0^2+2\times 0+\ln(0+1)=0$$

- إشارة $h(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$$ ، لأن : $$\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1}\ln(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

بـاستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، نبرهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

نضع $t=\ln u$ فيكون $u=e^t$ و منه : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^t}{t}\right)}=0$.

جـ- إستنتاج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = +\infty$ ، لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = 0$ حسب السؤال (ب)

د- حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = -\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = 0$$

التفسير البياني: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

هـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل:

لندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-1)$.

$f(x)-(x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ و بالتالي إشارة $f(x)-(x-1)$ من إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1>0$.

x	-1 0 $+\infty$
$f(x)-y$	$+$ 0 $-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ) $\boxed{(C_f) \text{ يقطع } (\Delta) \text{ في النقطة } A(0;-1)}$ (C_f) تحت (Δ)

2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = 1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)-1\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right] = 1-\left(\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

و منه: من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1 0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ -1 ↗ $+\infty$

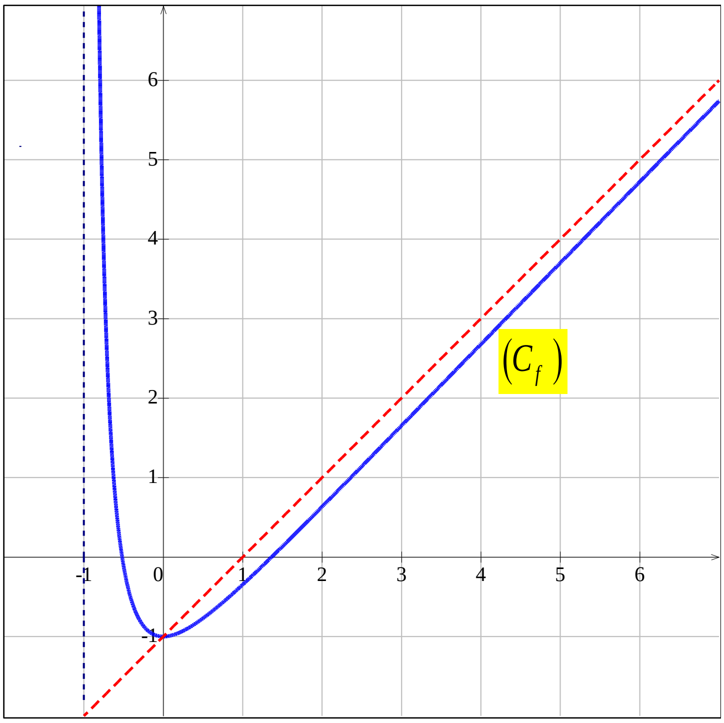
3) تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

معناه لنثبت أن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا محصورا بين $3,3$ و $3,4$.

الدالة f مستمرة على المجال $]-1;+\infty[$ و بالتالي فهي مستمرة على $[3,3;3,4]$ كون $[3,3;3,4] \subset]-1;+\infty[$.

و لدينا $\begin{cases} f(3,3)\approx 1,96 \\ f(3,4)\approx 2,06 \end{cases}$ و بالتالي $f(3,3)<2<f(3,4)$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا في المجال $[3,3;3,4]$.

4) الرسم :



5) حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

$$S = \int_0^1 [(x-1) - f(x)]dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

حل مقترح للتمرين 2 باك 2010

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1+\ln(2x-1)) = +\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}}(1+\ln(2x-1)) = -\infty \ .$$

2) تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f قابلة للإشتقاق على I ، و من أجل كل x من I ، $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$

لدينا :من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x - 1 > 0$ أي $f'(x) > 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

فاصلة هذه النقطة هي حل للمعادلة $f'(x) = 1$ في I .

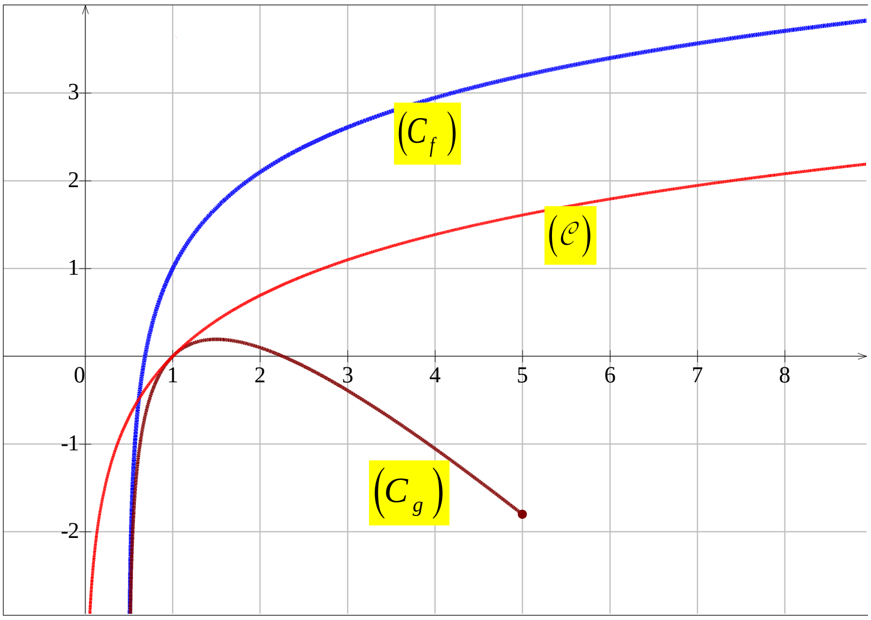
$f'(x) = 1$ تكافئ $\dfrac{2}{2x-1} = 1$ تكافئ $2 = 2x - 1$ أي $x = \dfrac{3}{2}$.

4) أ ـ من أجل كل x من I : $f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=1+\ln2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ، و منه : $a=-\frac{1}{2}$

و $b=1+\ln 2$.

بـ ـ لدينا : $f(x)=h(x+a)+b$ حيث : $h(x)=\ln x$ و منه (C_f) هو صورة $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$ أي $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1+\ln 2\end{pmatrix}$.

الرسم :



II) g الدالة العددية المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}}\left(1-x+\ln(2x-1)\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left[\frac{1-x}{2x-1}+\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\infty$ (تذكر أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0$)

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g على I :

الدالة g قابلة للإشتقاق على I ، و $g'(x)=-1+\frac{2}{2x-1}=\frac{-2x+3}{2x-1}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+3$.

إشارة $g'(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}+\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

3) أـ لدينا : $g(1)=0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ و $\begin{cases} g\left(\frac{3}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\approx 0,19 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α .

التحقق أن $2<\alpha<3$:

لدينا : $\begin{cases} g(2)\approx 0,09 \\ g(3)\approx -0,39 \end{cases}$ أي : $g(2)\times g(3)<0$ و منه $2<\alpha<3$.

بـ ـ رسم المنحنى (C_g) : أنظر الشكل السابق .

4) إشارة $g(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-x=g(x)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$.

إذن : من أجل $\left]\alpha;+\infty\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\ni x$ ، يكون (C_f) واقعا أسفل (d) .

من أجل $x\in\left]1;\alpha\right[$ ، يكون (C_f) واقعا أعلى من (d) .

(C_f) يقطع (d) في النقطتين $A(1;1)$ و $B(\alpha;\alpha)$.

5) الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]1;\alpha\right[$ و منه : من أجل كل $x\in\left]1;\alpha\right[$ فإن : $f(x)\in\left]f(1);f(\alpha)\right[$.

و لدينا : $f(1)=1$ و $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$.

إذن : من أجل كل $x\in\left]1;\alpha\right[$ فإن : $f(x)\in\left]1;\alpha\right[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

لدينا : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\ln\left[2\left(1+\frac{1}{2n}\right)-1\right]=1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

و منه : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ يعني $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln 3^2-\ln 2^3=\ln 9-\ln 8=\ln\frac{9}{8}$ أي : $n=8$.

2) حساب ، بدلالة n ، المجموع S_n بحيث : $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

لدينا : من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

و منه : $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=1+\ln\left(\frac{2}{1}\right)+1+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

أي : $S_n=(1+1+\ldots+1)+\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=n+\ln\left(\frac{2\times 3\times\ldots\times n\times(n+1)}{1\times 2\times\ldots\times n}\right)=n+\ln(n+1)$

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

أ ـ جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

ب ـ حل المتراجحة $g(x)>0$ بيانيا :

$g(x)>0$ تكافئ $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

جـ ـ تعيين قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$:

$0<g(x)<1$ تكافئ $x\in]1;+\infty[$.

II) الدالة f معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=1$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\end{cases}$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ يكون : $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{1\times(x+1)-1\times(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

ب ـ حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{(x+1)^2}\left(\frac{2x}{x-1}\right)=\frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 1$

3) أ ـ باستعمال الجزء I) السؤال جـ ، تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

لدينا حسب الجزء I) السؤال جـ : من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ ، فإن $0<\frac{x-1}{x+1}<1$ و منه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<0$.

بـ ـ α عدد حقيقي .

تبيان أن الدالة h بحيث $h(x)=(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]\alpha;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]\alpha;+\infty[$:

$$h'(x)=1\times\ln(x-\alpha)+\frac{1}{x-\alpha}\times(x-\alpha)-1=\ln(x-\alpha)$$

جـ ـ التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$.

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1-\frac{2}{x+1}+\ln(x-1)-\ln(x+1)$

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ من الشكل :

$$F(x)=x-2\ln(x+1)+\left[(x-1)\ln(x-1)-x\right]-\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]=x-(x+3)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$$

حل مقترح للتمرين ﴿4﴾ ﴿باك 2012﴾

f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

1) أ ـ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\left[x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن :
$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}(x+5)=5\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty\end{cases}$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

بـ ـ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0\end{cases}$$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$:

$$f'(x)=1+6\left(\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\right)=1-\frac{6}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}=1-\frac{6}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)-6}{x(x-1)}=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $\frac{x}{x-1}>0$ و منه $x(x-1)>0$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ و منه :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;-2]$ و متناقصة على المجال $[-2;0[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3+6\ln\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ ـ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+5)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0$ و منه المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ ـ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(x+5)=6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $x>x-1$ و منه $\frac{x}{x-1}<1$ و بالتالي $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<0$.

إذن نستنتج أن (C_f) يقع تحت (Δ) .

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

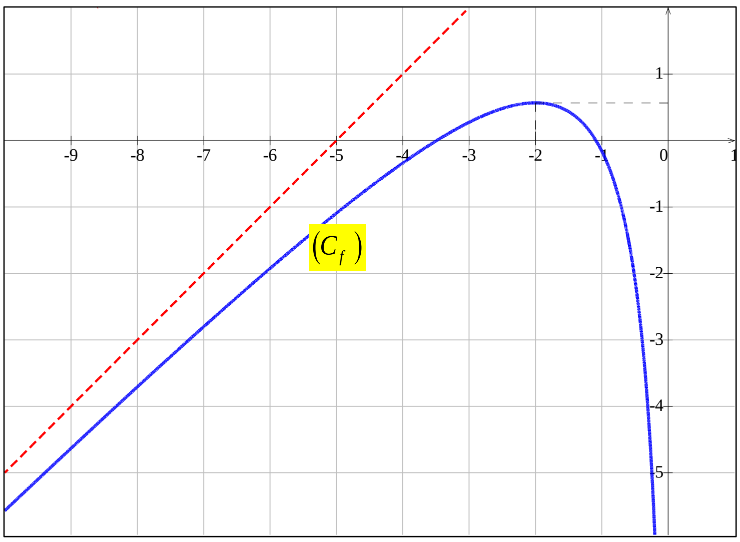
• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2[$ و $]-3,5;-3,4[\subset]-\infty;-2[$ و $\begin{cases}f(-3.4)\approx 0,05\\ f(-3.5)\approx -0,01\end{cases}$

أي $f(-3,4)\times f(-3,5)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و يحقق $f(\alpha)=0$.

• الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-2;0[$ و $]-1,1;-1[\subset]-2;0[$ و $\begin{cases}f(-1.1)\approx 0,02\\ f(-1)\approx -0,16\end{cases}$

أي $f(-1,1)\times f(-1)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي β حيث $-1.1<\beta<-1$ و يحقق $f(\beta)=0$.

5) الرسم :



6) أ ـ لدينا : $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

تبيان أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

يمكن التحقق أن إحداثيات كلا من النقطتين A و B تحقق المعادلة المعطاة .

$$y_A=\frac{1}{2}x_A+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=3+6\ln\frac{3}{4} \quad ، \quad y_B=\frac{1}{2}x_B+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}$$

(أو يمكن كتابة معادلة للمستقيم (AB) و الحصول على المعادلة المعطاة)

بـ ـ تبيان أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .

لدينا : معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{1}{2}$ و بالتالي نحل في المجال $]-\infty;0[$ المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$.

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تكافئ $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$ تكافئ $x^2-x-12=0$.

المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حل و هو $x_0=-3$.

إذن : المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;y_0)$ ، مع $y_0=f(-3)=2+6\ln\frac{3}{4}$.

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

تبيان أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0[$:

$$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6x}{x(x-1)}-\frac{6}{1-x}=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6}{x-1}+\frac{6}{x-1}=f(x)$$

و منه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

حل مقترح للتمرين (5) باك 2013

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to -1^{>}} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^{>}}\left[x^2+2x+4-2\ln(x+1)\right]=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to -1^{>}}\ln(x+1)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{x^2+2x+4}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x+1}\right)=+\infty\end{cases}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، و $g'(x)=2x+2-\frac{2}{x+1}=\frac{2x(x+2)}{x+1}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ، لأنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ فإن : $x+1>0$ و $x+2>0$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $]-1;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

2) من جدول التغيّرات: من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)\geq 4$ و بالتالي نستنتج أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

(II f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

1) أ ـ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\left[x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[x(x+1)-1+2\ln(x+1)\right]=-\infty$.

التفسير البياني: المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

بـ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$.

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، و من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$f(x)=1-\frac{\frac{-2}{x+1}(x+1)-1\times(1-2\ln(x+1))}{(x+1)^2}=1-\frac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2+3-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

بـ ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

لدينا: من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ و بالتالي $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f:

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=-\infty\end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-1;+\infty[$ حلا وحيدا α.

التحقق أن $0<\alpha<0,5$.

لدينا : $]0;0,5[\subset]-1;+\infty[$ و $\begin{cases}f(0)=-1\\ f(0.5)\approx 0,37\end{cases}$ أي $f(0)\times f(0,5)<0$ و منه $0<\alpha<0,5$.

3) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$ و منه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

لدينا : $f(x)-x=\frac{-1+2\ln(x+1)}{x+1}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-1+2\ln(x+1)$.

x	-1	$-1+\sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-1+\sqrt{e};-1+\sqrt{e})$	(C_f) فوق (Δ)

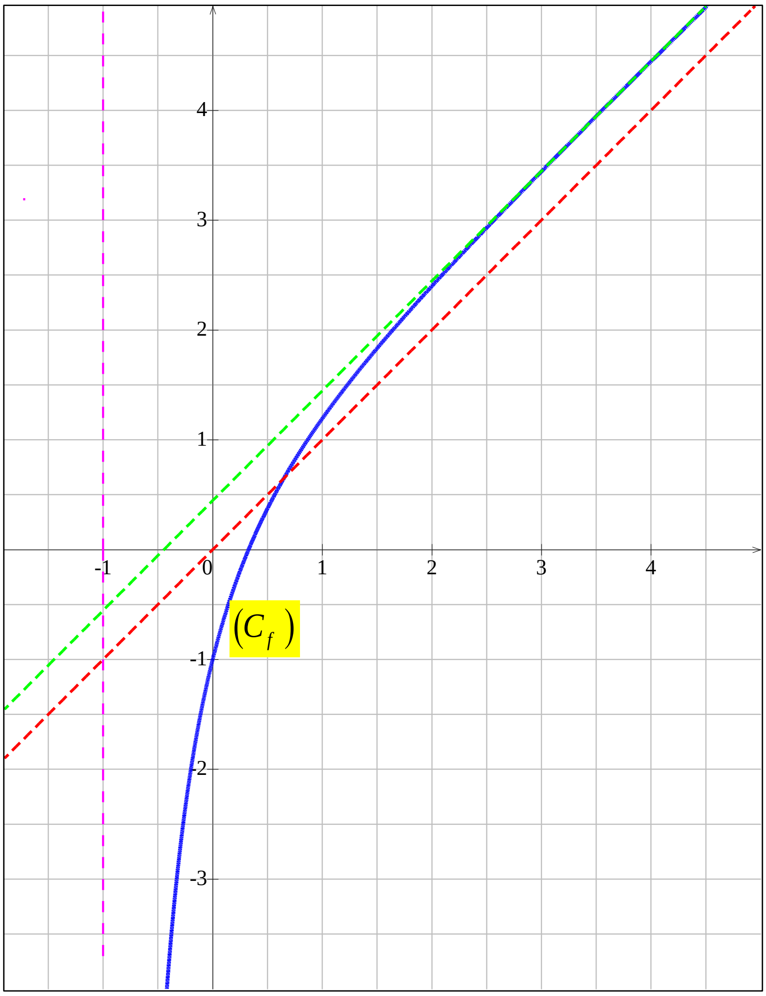
4) المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أ ـ حساب x_0 :

لدينا :

$f'(x_0)=1$ تكافئ $\frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ تكافئ $g(x_0)=(x_0+1)^2$ تكافئ $2\ln(x_0+1)=3$ تكافئ $x_0=-1+\sqrt{e^3}$.

ب ـ الرسم :



جـ ـ بيانيا ، حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذن : تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا كان $0<m<\frac{2}{\sqrt{e^3}}$.

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

1) أ ـ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=-\infty$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=1$ ، لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب ـ دراسة إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، و من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-1\times 2\ln x}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln x$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]0;e]$ و متناقصة على المجال $[e;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+2e^{-1}$	$\searrow$	$+\infty$

2) أ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

لدينا: $f(x)-y=1+\frac{2\ln x}{x}-1=\frac{2\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ لأن $\frac{2}{x}>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

ب ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا: $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T): y=2x-1$.

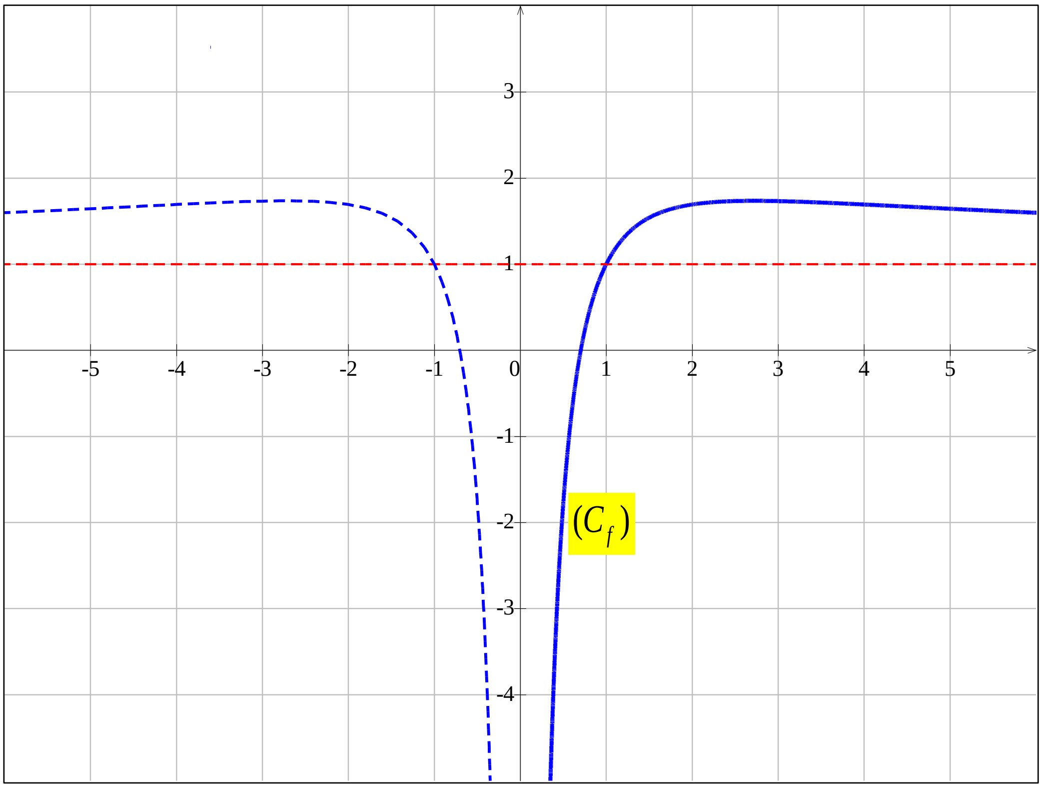
جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;1[$ و $]e^{-0,4};e^{-0,3}[\subset]0;1[$ و $\begin{cases} f(e^{-0,4})\approx -0,2\\ f(e^{-0,3})\approx 0,2\end{cases}$

أي $f(e^{-0,4})\times f(e^{-0,3})<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا

وحيدا α بحيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

3) الرسم :



4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

أ- من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

نستنتج أن الدالة h زوجية و تمثيلها البياني (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب.

ب- كيفية إنشاء المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) :

من أجل $x \in]0;+\infty[$ ، يكون $f(x)=h(x)$ و بالتالي (C_h) منطبق على (C_f) .

من أجل $x \in]-\infty;0[$ ، (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب لكون الدالة h زوجية.

الرسم : أنظر الشكل .

جـ- المناقشة البيانية :

$h(x)=m$ أي $1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}=m$ تكافئ $2\ln|x|=(m-1)|x|$ تكافئ $\ln x^2=(m-1)|x|$

و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) و المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

لما $m \in]-\infty;0]$ المعادلة تقبل حلين .

لما $m \in \left]0;1+\dfrac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل أربعة حلول.

لما $m=1+\dfrac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين (مضاعفين).

لما $m \in \left]1+\dfrac{2}{e};+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حلول.

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

1) بقراءة بيانية :

تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]0;+\infty[$:

من أجل $x \in]0;\alpha[$ ، (γ) يقع تحت (Δ) .

من أجل $x \in]\alpha;+\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ) .

2) إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3) التحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$.

لدينا : $\begin{cases} g(2,2)\approx -0,011 \\ g(2,3)\approx 0,13 \end{cases}$ و منه $g(2,2)\times g(2,3)<0$ أي $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^{>}}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^{>}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^{>}}(\ln x-2)=-\infty \end{cases}$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty}(\ln x-2)=+\infty \end{cases}$

2) تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{\ln x-2+x-1}{x^2}=\frac{-3+x+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) تبيان أن : $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $\ln\alpha=-\alpha+3$ و بالتالي : $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2,2<\alpha<2,3$ يكافئ : $\begin{cases} \dfrac{1}{2,3}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{2,3} \\ 1,2<\alpha-1<1,3 \\ (1,2)^2<(\alpha-1)^2<(1,3)^2 \end{cases}$ و منه $\dfrac{(1,2)^2}{2,3}<\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\dfrac{(1,3)^2}{2,2}$

و منه : $-\dfrac{(1,2)^2}{2,3}<f(\alpha)<-\dfrac{(1,3)^2}{2,2}$ أي : $-0,76<f(\alpha)<-0,62$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

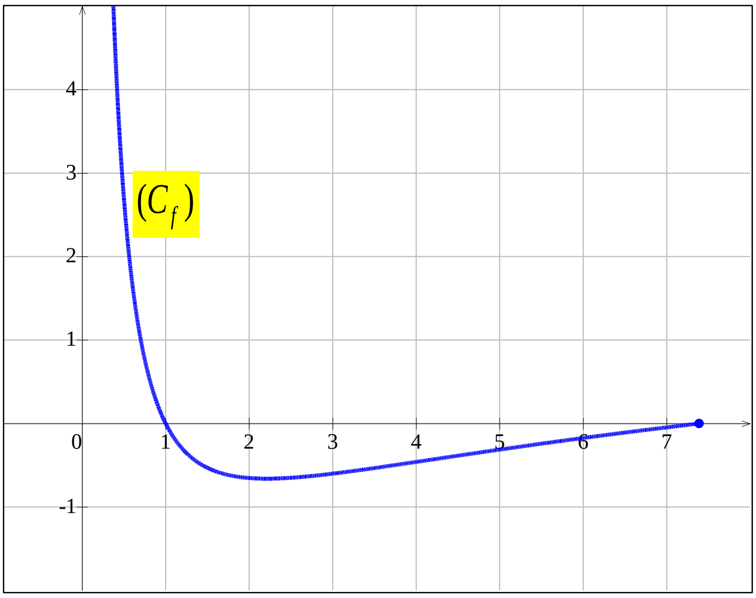
لندرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)=\dfrac{1}{x}(x-1)(-2+\ln x)$ ومنه إشارة $f(x)$ من إشارة $(x-1)(-2+\ln x)$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه (C_f) فوق حامل محور الفواصل على كل من المجالين $]e^2;+\infty[$ و $]0;1[$ و تحته على المجال $]1;e^2[$ ، و يتقاطعان في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

الرسم :



III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

1) تبيان أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ يعني : من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تكافئ $f(x)=0$ تكافئ : $x=1$ أو $x=e^2$ ، و منه منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

2) تبيان أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$:

نضع : $u(x)=x\ln x-x$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $u'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}\times x-1=\ln x$.

و منه الدالة u هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

إستنتاج عبارة الدالة F :

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(\ln t-2-\frac{\ln t}{t}+\frac{2}{t}\right)dt=\left[t\ln t-t-2t-\frac{1}{2}(\ln t)^2-2\ln t\right]_1^x=(2+x)\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2-3x$$

حل مقترح للتمرين《8》باك 2016 – الدورة الأولى -

I) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2-1$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و متزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

2) $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$.

الدالة g تقبل قيمة حديّة صغرى على المجال $]0;+\infty[$ هي $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و بالتالي من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1\right)=+\infty$ ، لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

2) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+1=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ ، إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب- جدول تغيّرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 :

لدينا : $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T):y=2x-2$.

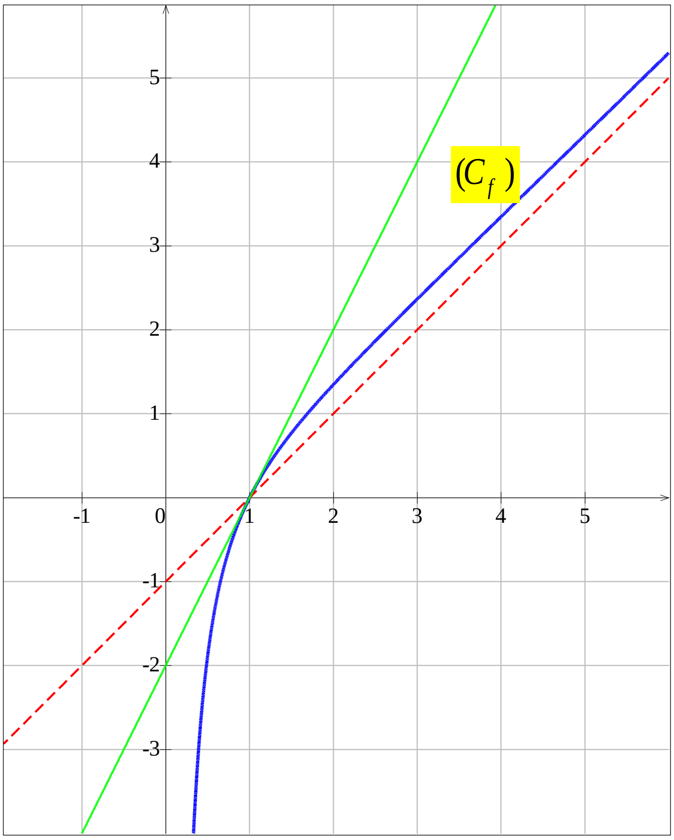
4) أ- لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و منه المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث: $y=x-1$ معادلة له .

بـ- دراسة الوضع النسبي لـ (C) و (Δ):

لدينا $f(x)-y=\frac{\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$:

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$	(C_f) فوق (Δ)

5) الرسم :



6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث: $y=mx-m$ معادلة له.

أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

لدينا $y_A=mx_A-m$ أي $0=m-m$ و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي m ، $A\in(\Delta_m)$

بـ- المناقشة البيانية :

لدينا : (Δ_m) معامل توجيهه m و يشمل النقطة $A(1;0)$.

إذا كان $m\in]-\infty;1]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

إذا كان $m\in]1;2[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

إذا كان $m=2$ فإن المعادلة تقبل حل (مضاعف) و هو 1.

إذا كان $m\in]2;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

7) أ ـ إيجاد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على $]0;+\infty[$ من الشكل: $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$. (لاحظ أن $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ من الشكل $u' \times u$)

بـ ـ حساب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي $(n > 1)$.

$$I_n = \int_1^n \left[f(x) - (x-1)\right]dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

جـ ـ تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن: $I_n > 2$.

$I_n > 2$ معناه $(\ln n)^2 > 4$ أي $\ln n > 2$ أو $\ln n < -2$ (مرفوض) و منه $n > e^2$ و عليه: أصغر قيمة لـ n_0 هي $n_0 = 8$.

حل مقترح للتمرين (9) باك 2016 – الدورة الثانية -

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيّرات الدالة g :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)\right] = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}}\left[-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)\right] = -\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $g'(x) = e + \frac{2}{x+1}$

من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$ ، $g'(x) > 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	-1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) تبيان أنه للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-0,34) \approx -0,03 \\ g(-0,33) \approx 0,02 \end{cases}$ أي $g(-0,34) \times g(-0,33) < 0$ و منه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0,34 < \alpha < -0,33$.

3) إشارة $g(x)$:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

1) أـ تبيان أن $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$.

$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}}\left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right] = -\infty$ ، لأن: $\begin{cases} \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}}\left(\frac{e}{x+1}\right) = 0 \\ \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}}\left[\frac{1}{(x+1)^2} \times \ln(x+1)\right] = -\infty \end{cases}$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)\left[e+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (حامل محور الفواصل) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـــتبيان أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{e}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)^2-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-e(x+1)+1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

جـــدراسة إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$:

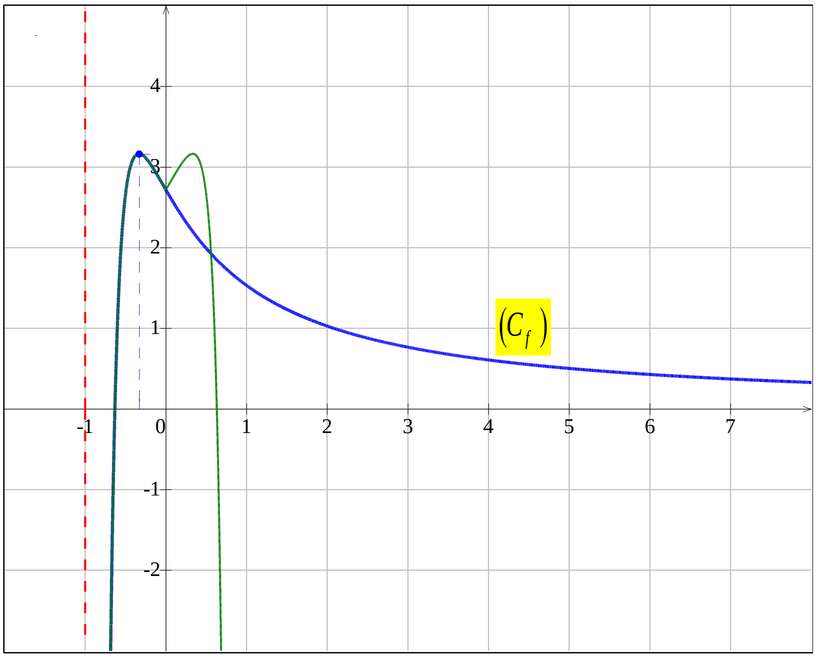
x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1;\alpha]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

د ـ الرسم :



2) أ ـ. تبيان أن الدالة $x\mapsto\frac{-1}{x+1}[1+\ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

نضع : $h(x)=\frac{-1}{x+1}[1+\ln(x+1)]$ ، الدالة h قابلة للإشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}[1+\ln(x+1)]+\left(\frac{1}{x+1}\right)\times\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

بـ-حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]dx=\left[e\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]\right]_0^1=\frac{1+(2e-1)\ln 2}{2}$$

3) k الدالة العددية المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$

أ-تبيان أن الدالة k زوجية :

المجال $]-1;1[$ متناظر بالنسبة للصفر و من أجل كل $x\in]-1;1[$: $k(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=k(x)$.

و بالتالي الدالة k زوجية.

بـ-شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f):

لدينا : $k(x)=f(-|x|)=\begin{cases}f(x);x\in]-1;0]\\ f(-x);x\in[0;1[\end{cases}$

إذن : من أجل $x\in]-1;0]$ ، (C_k) ينطبق على (C_f) و نتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة لمحور التراتيب لكون k زوجية.

الرسم : أنظر الشكل.

جـ-المناقشة البيانية :

حلول المعادلة $k(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_k) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$.

إذا كان $m>f(\alpha)$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا.

إذا كان $m=f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) مختلفين في الإشارة.

إذا كان $e<m<f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل 4 حلول ، حلان سالبان و حلان موجبان.

إذا كان $m=e$ فإن المعادلة تقبل 3 حلول ، حل سالب و آخر موجب و الثالث معدوم.

إذا كان $m<e$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

حل مقترح للتمرين (10) باك 2017 – الدورة العادية -

f الدالة المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1) تبيان أن الدالة f فردية :

المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى الصفر (من أجل كل $x\in D$ ، $-x\in D$)

و من أجل كل $x\in D$ ، $f(-x)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\frac{2}{3}x-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-f(x)$

التفسير البياني : مبدأ المعلم O مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f).

2) حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to -1\\ <}}f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=+\infty$$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب معادلتيهما : $x=1$ و $x=-1$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$.

3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على D ، من أجل كل عدد حقيقي x من D :

$$f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)}=\frac{2x^2+4}{3(x^2-1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$$

إتجاه تغيّر الدالة f :

لدينا : من أجل كل x من D ، $x^2-1>0$ و منه $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على D .

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$ -1		1 $+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1,8;1,9[\subset]1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1,9)\approx 0,10 \\ f(1,8)\approx -0,05 \end{cases}$

أي $f(1,8)\times f(1,9)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.

5) لدينا : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ ، لأن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$

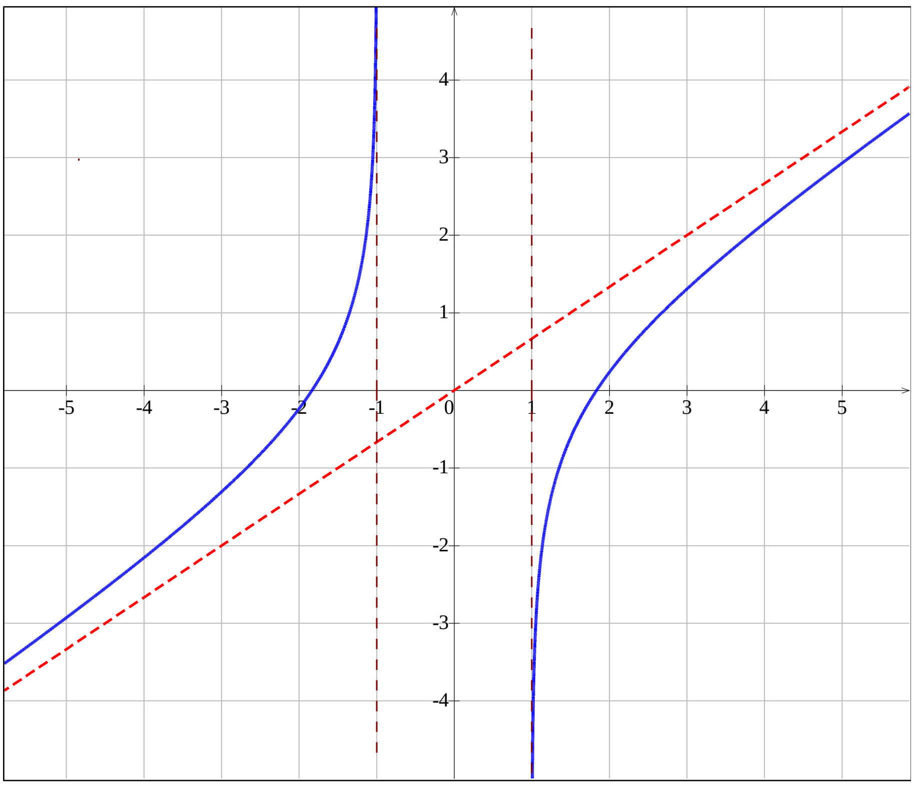
و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=f(x)-\frac{2}{3}x=f(x)-y$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

x	$-\infty$ -1		1 $+\infty$
$f(x)-y$	$+$		$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

6) الرسم :



7) المناقشة البيانية :

$\left(2-3|m|\right)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $2x-3|m|x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=|m|x$

أي $f(x)=|m|x$ و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|x$.

(مناقشة دورانية)

إذا كان $m\in\left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ أي $|m|\in\left[0;\frac{2}{3}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين .

إذا كان $m\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$ أي $|m|\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

حل مقترح للتمرين 11 باك 2017 – الدورة الإستثنائية -

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}-\frac{1}{2}}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{x\overset{>}{\to}-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)\left[1+2\ln(2x+1)\right]\right]=-\infty$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(2x+1)^2}+2\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أـ الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{4}{2x+1}\times(2x+1)^2-4(2x+1)\left[1+2\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{(2x+1)\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

بــ دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-8\ln(2x+1)$ لأن : $(2x+1)^3>0$ من أجل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right]$ و متناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ تكافئ $1+2\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=-\frac{1}{2}$ تكافئ $2x+1=e^{-\frac{1}{2}}$ أي : $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{1}{2}$

إشارة $f(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4) تبيان المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها :

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f''(x)=\frac{\frac{-8\times 2}{2x+1}\times(2x+1)^3-3\times 2(2x+1)^2\times\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^6}=\frac{16\left(-1+3\ln(2x+1)\right)}{(2x+1)^4}$$

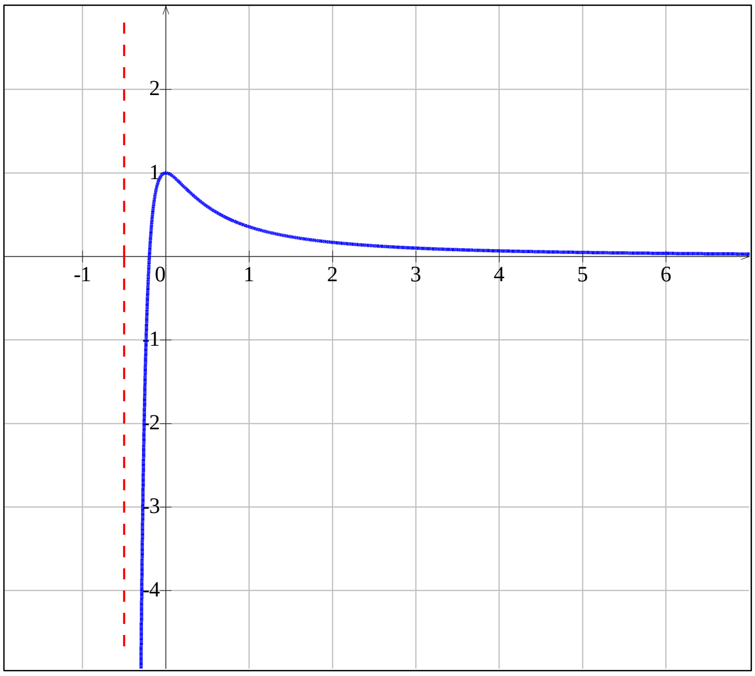
$f''(x)=0$ تكافئ $-1+3\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=\frac{1}{3}$ تكافئ $2x+1=e^{\frac{1}{3}}$ أي : $x=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$

إشارة $f''(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω إحداثييها : $\left(\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2};\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}\right)$.

الرسم :



II) لتكن الدالة g المعرّفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=2\left[-x+\ln(2x+1)\right]$.

1) أ ـ دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$g'(x)=2\left[-1+\frac{2}{2x+1}\right]=2\left[\frac{-2x+1}{2x+1}\right]$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+1$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

بـ ـ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $1,2<\alpha<1,3$.

لدينا : $g(0)=0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ و $\left]1,2;1,3\right[\subset\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ و $\begin{cases} g(1,2)\approx 0,05 \\ g(1,3)\approx -0,04 \end{cases}$

أي $g(1,2)\times g(1,3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$.

جـ ـ إشارة $g(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

إثبات أن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $f(x)-\frac{1}{2x+1}=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}-\frac{2x+1}{(2x+1)^2}=\frac{g(x)}{(2x+1)^2}$.

و لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $g(x)<0$ و بالتالي $f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

و من جهة أخرى لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $f(x)>0$.

إذن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

استنتاج $\lim_{n\to+\infty} I_n$:

لدينا : $\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx < \int_n^{n+1} f(x)dx<0$ و منه $0<I_n<\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx$

و لدينا $\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_n^{n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ و منه $0<I_n<\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

و بالتالي : $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$.

• حساب $g(1)$: $g(1)=1-(\ln 1)^2-\ln 1-1=0$

• إشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

1) حساب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{>}}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^{>}}(1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^{>}}(1+x\ln x)=1\end{cases}$ (تذكَّر أن : $\lim\limits_{x\to 0^{>}} x\ln x=0$)

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

• تبيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)=0$ ، (تذكَّر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أـ تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(\ln x+1)(1+x\ln x)}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-(1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}$$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

بـ- إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) تبيان أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ(T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل :

أولا : تعيين نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

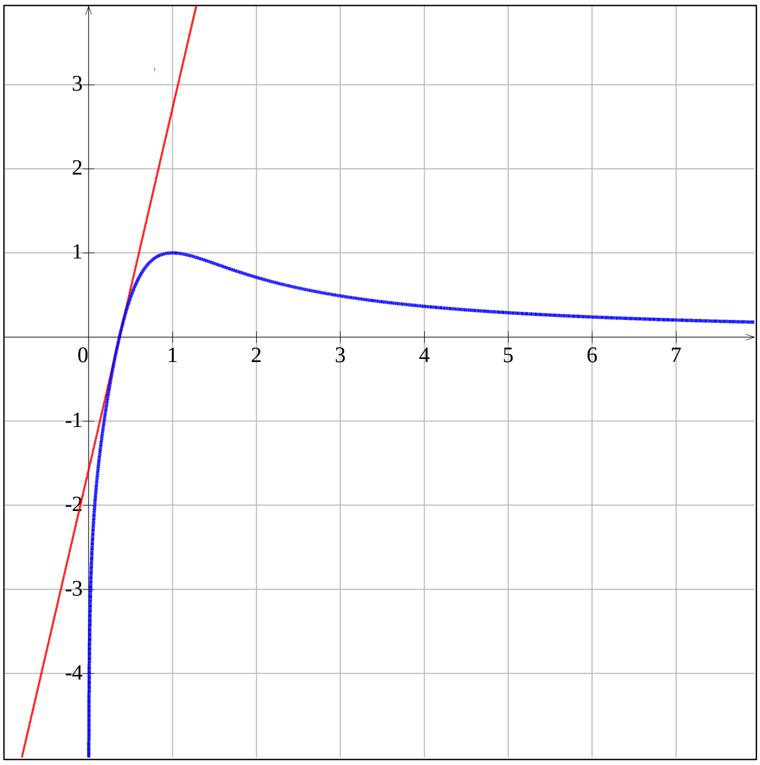
نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$.

$f(x)=0$ تكافئ $\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}=0$ تكافئ $1+\ln x=0$ تكافئ $\ln x=-1$ أي : $x=\frac{1}{e}$.

معادلة لـ(T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$:

لدينا : $(T):y=f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)+f\left(\frac{1}{e}\right)$ و منه $(T):y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$.

الرسم :



4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

$(e-1)f(x)=e^2x-me$ تكافئ $f(x)=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$

حلول المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (T_m) ذي المعادلة $y=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$.

من البيان : المعادلة تقبل حلين متمايزين لما $-\frac{e}{e-1}m<-\frac{e}{e-1}$ أي $m>1$.

III) n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx=\int_1^n\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx=\left[\ln(1+x\ln x)\right]_1^n=\ln(1+n\ln n)$. (لاحظ أن f من الشكل : $\frac{u'}{u}$)

2) دراسة إتجاه تغير المتتالية (I_n) :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$

لدينا : $I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1} f(x)dx-\int_1^{n} f(x)dx=\int_1^{n} f(x)dx+\int_n^{n+1} f(x)dx-\int_1^{n} f(x)dx=\int_n^{n+1} f(x)dx$

و من أجل $n>1$: $\int_n^{n+1} f(x)dx>0$ و بالتالي المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

حل مقترح للتمرين ❬13❭ باك 2019

f الدالة العددية المعرّفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$.

1) أ ـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[\frac{1}{x-2}+\ln x\right]=-\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}}\left[\frac{1}{x-2}+\ln x\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}}\left[\frac{1}{x-2}+\ln x\right]=+\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

بـ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-2}+\ln x\right]=+\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;2[\cup]2;+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x}=\frac{-x+(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{-x+x^2-4x+4}{x(x-2)^2}=\frac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2-5x+4 لكون $x(x-2)^2>0$ من أجل كل x من $]0;2[\cup]2;+\infty[$.

• إشارة $f'(x)$:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

و منه : الدالة f متزايدة على المجالين $]0;1]$ و $[4;+\infty[$ و متناقصة على المجالين $]2;4]$ و $[1;2[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 4$	↗	$+\infty$

3) أ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)=0$.

التفسير : المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

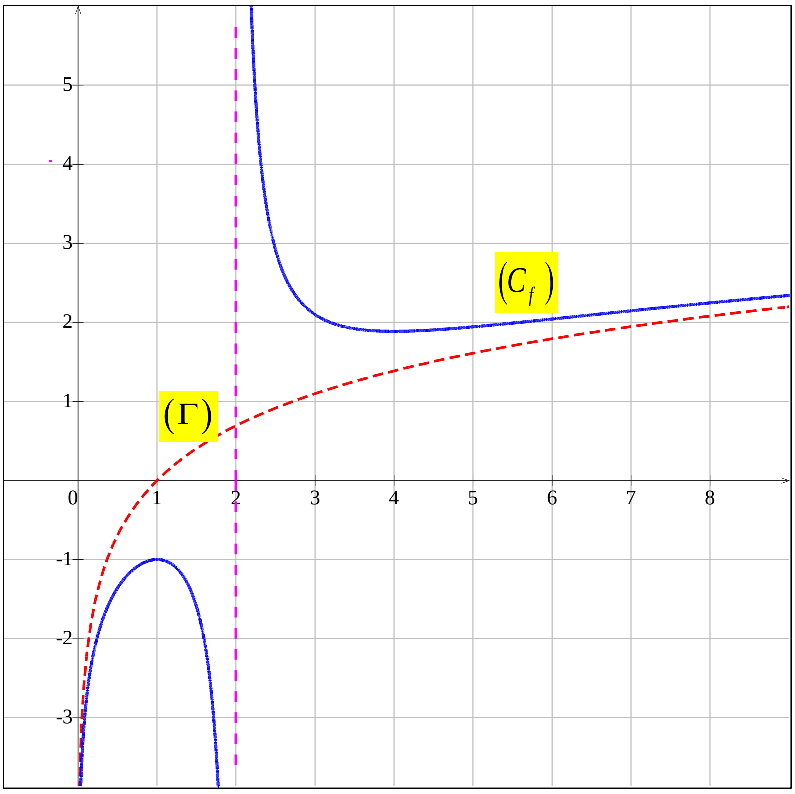
بـ ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) :

لدينا : $f(x)-\ln x=\frac{1}{x-2}$ و منه إشارة الفرق $f(x)-\ln x$ من إشارة $x-2$.

على المجال $]0;2[$: (C_f) يقع تحت (Γ) .

على المجال $]2;+\infty[$: (C_f) يقع فوق (Γ) .

4) الرسم :



5) H الدالة المعرّفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما .

أ ـ تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x)=[t\ln t]_3^x-\int_3^x \frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-3\ln 3-\int_3^x dt=x\ln x-3\ln 3-[t]_3^x$$

و منه $H(x)=x\ln x-3\ln 3-(x-3)$ أي : $H(x)=-x+3+x\ln x-3\ln 3$.

بـ ـ حساب A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

$$A=\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}+\ln x\right)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+\int_3^4 \ln x dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+H(4)=\left[\ln|x-2|\right]_3^4+H(4)$$

و منه $A=\ln 2+4\ln 4-4-3\ln 3+3$ أي : $A=(-1+9\ln 2-3\ln 3)(u.a)$.

6) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-1;0[\cup]-\infty;-1[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ، و $g'(x)=-2f'(-2x)$.

إتجاه تغيّر الدالة g :

$g'(x)>0$ تكافئ $f'(-2x)<0$ تكافئ : $\begin{cases}1<-2x<2\\ 2<-2x<4\end{cases}$ أو تكافئ : $\begin{cases}-1<x<-\frac{1}{2}\\ -2<x<-1\end{cases}$ أو .

و منه الدالة g متزايدة على $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup]-2;-1[$ و متناقصة على $\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup]-\infty;-2[$.

بالتوفيق للجميع