الرياضيات السهلة

حلول تمارين الدوال الأسية

في البكالوريا

شعبة : علوم تجريبية

إنجاز : خالد بخاخشة

01 التمارين

التمرين رقم 01

[باك 2008][م1]

I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1\,cm$.

عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

2) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثييها .

4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

5) أرسم (C_g) .

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$.

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عيّن اتجاه تغيّر الدالة k ثم شكل جدول تغيّراتها .

التمرين رقم 02

[باك 2010][م2]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$.

نرمز بـ(C_f) لتمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)$ و فسر هندسيا النتيجة.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ- بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=x+1$.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

ب- هل توجد مماسات لـ(C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

جـ- أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$.

التمرين رقم 03

[باك 2011][م2]

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{x}-ex-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بــ أحسب $f'(x)$ ثمّ أدرس إشارتها.

جـ ـ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2) أ ـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بــ أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ ـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ ، تقبل في المجال $]1.75;1.76[$ حلا وحيدا α .

د ـ أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;2]$.

التمرين رقم 04

[باك 2012][م2]

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-xe^{x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ ـ بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$

بــ تحقق أن $0.5<\alpha<0.6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=-g(x)$ ،

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أن $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

4) أ ـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بــ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5) أ ـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

بــ أنشئ (Δ) و (C_f) .

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^{x}$.

عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون : $h'(x)=xe^{x}$.

التمرين رقم 05

[باك 2013][م1]

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

I) f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) أحسب $f'(x)$. بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α.

4) أرسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C) ، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ : $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) أدرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ. تحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثم بيّن أن : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب. إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

جـ. تحقق من أن : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

التمرين رقم 06

[باك 2015][م2]

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0.36<\alpha<0.37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب. إستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

4) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ، (نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$).

6) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

[باك 2016][د1][م2]

التمرين رقم 07

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث: $-1.52<\alpha<-1.51$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=-g(x)$.

جـ- شكّل جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ $f(\alpha)\approx 0.38$)

د- عيّن دون حساب: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

جـ- بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثييهما.

د- أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

هـ- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة: $(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$.

[باك 2016][د1][م2]

التمرين رقم 08

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1) أ- أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أدرس إتجاه تغيّر الدالة g'. (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب - بيّن أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$.

جـ- أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و $-\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38<\alpha<-1,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{xe^x g(x)}{(e^x-x)^2}$.

جـ- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ- بيّن أن: $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

جـ- أنشئ المنحنى (C_f). (تعطى $f(\alpha)\approx 0,29$)

التمرين رقم 09

[باك 2017][م 1]

I) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$.

ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)\geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) .

2) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

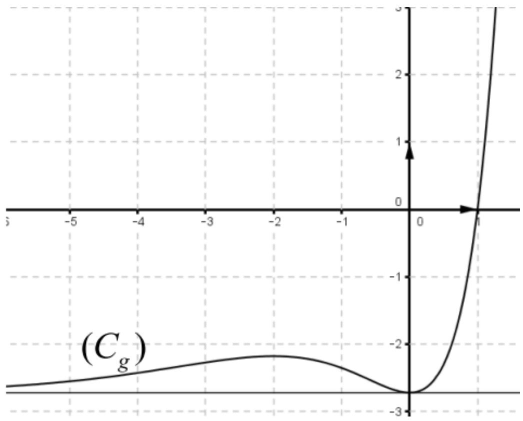
3) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.

4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

تحقق أن : $F'(x)=f(x)$.

التمرين رقم 10

[باك 2017][د إ][م 1]



I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2e^x-e$.

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل)

- أحسب $g(1)$.
- بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايات الآتية : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y=e^{-x}-2$ و المنحنى (C_f) متقاربان بجوار، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) .

3) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$.

4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

5) بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^x$ ، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق .

التمرين رقم 11

[باك 2018][م1]

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ ـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) حيث : $(\Delta): y=2x+1$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ (Δ)، (T) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\approx 0{,}8$).

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x=(1-m)e^{x}$.

التمرين رقم 12

[باك 2019][م2]

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x)=e^{x}-ex \quad \text{و} \quad f(x)=e^{x}-\frac{1}{2}ex^{2} \; .$$

1) أ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

ب ـ إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f .

3) أحسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

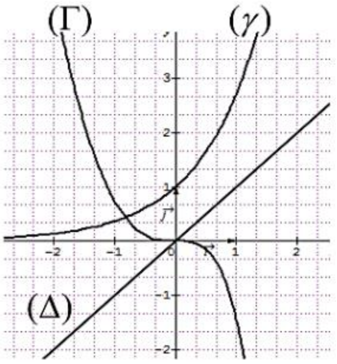
4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5) أرسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (يعطى $e^{2}-2e\approx 2$)

6) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $h(x)=\frac{1}{2}ex^{2}-e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ ـ بيّن أن الدالة h زوجية.

بـ ـ من أجل $x\in[0;2]$ أحسب $h(x)+f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .



I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

في الشكل المرفق ، (Γ) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2x^2+2x-2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto e^x$.

بقراءة بيانية :

1) برر أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x-x>0$.

2) حدد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ علما أن : $g(0)=0$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-1+\dfrac{2e^x}{e^x-x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق .

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ و أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسّر نتيجتي النهايتين هندسيا .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=\dfrac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0 .

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x)-(2x+1)=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$.

جـ- استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) ، ماذا تمثل النقطة A بالنسبة إلى (C_f) ؟

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1]$ ، ثم تحقق أن : $-0.6<\alpha<-0.5$.

5) أنشئ المماس (T) و المستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f) .

“ The only way to learn mathematics is to do mathematics ”

02 حلول التمارين

حل مقترح للتمرين 01

I) f الدالة العددية المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

تعيين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

$A\in(C_f)$ معناه : $f(-1)=1$ أي : $(-a+b)e+1=1$ و منه : $a=b$.

معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$ معناه : $f'(-1)=-e$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]-2;+\infty[$ و : $f'(x)=ae^{-x}+(-e^{-x})(ax+b)=(-ax-b+a)e^{-x}$.

و منه $f'(-1)=(2a-b)e$. و مما سبق $f'(-1)=-e$.

بالمطابقة لدينا $2a-b=-1$ و $a=b$ و منه نجد : $a=b=-1$.

II) الدالة g معرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(-x-1)e^{-x}+1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x}-e^{-x}+1)=1$ ، لأن $\lim\limits_{u\to+\infty}(-xe^{-x})=\lim\limits_{u\to-\infty}ue^{u}=0$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

2) دراسة تغيّرات الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ ، و $g'(x)=-e^{-x}+(-e^{-x})(-x-1)=xe^{-x}$.

- إتجاه تغيّر الدالة g :

إشارة $g'(x)$ من إشارة x و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-2;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	e^2+1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

3) تبيان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I مع تعيين إحداثييها .

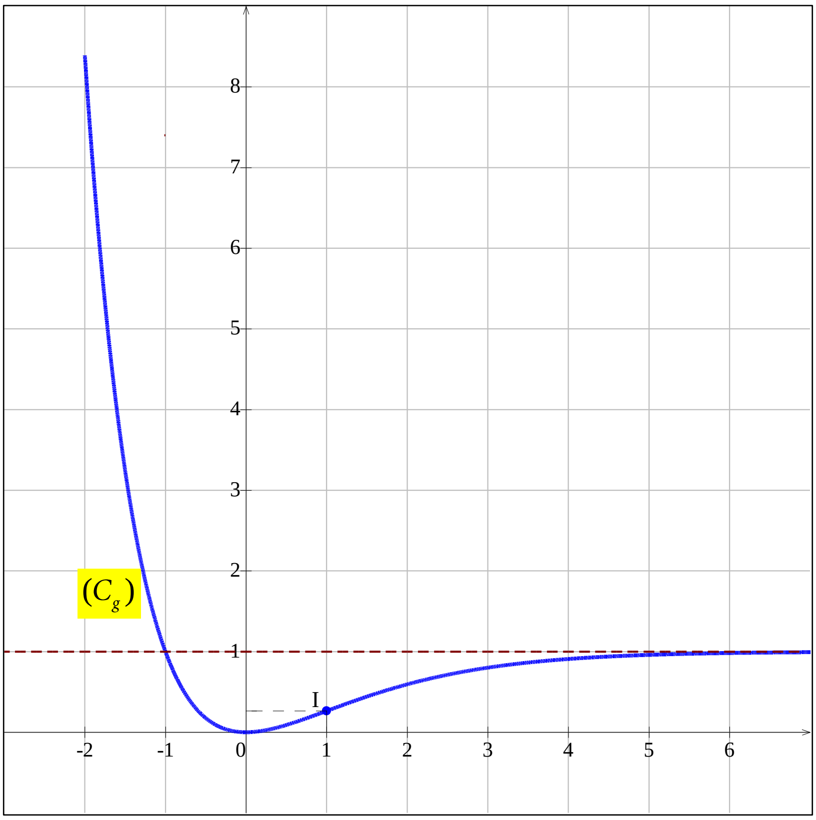
الدالة g' قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ ، و $g''(x)=(1-x)e^{-x}$.

إشارة $g''(x)$ من إشارة $1-x$ و بالتالي $g''(x)$ ينعدم عند 1 مغيرا إشارته ، و منه $I\left(1;1-\dfrac{2}{e}\right)$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_g) .

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

لدينا : $(T): y=g'(1)(x-1)+g(1)$ و منه $(T): y=\dfrac{1}{e}x+1-\dfrac{3}{e}$.

5) الرسم :



III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$

الدالة k قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ،

و $k'(x)=2xg'(x^2)=2x\left(x^2e^{-x^2}\right)=2x^3e^{-x^2}$.

إتجاه تغيّر الدالة k :

إشارة $k'(x)$ من إشارة x و بالتالي الدالة k متناقصة على المجال $]-2;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة k :

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$1-5e^{-4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

حل مقترح للتمرين 02

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$.

1) أ. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

ب. $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to0}}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x)=1-\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}=1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\quad$ 0	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) أ.لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{e^x-1}\right]=0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{e^x-1}-1\right]=0$ و منه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب.دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=-\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$ $\quad$ 0	0 $\quad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

• دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') :

لدينا : $f(x)-y=-\frac{1}{e^x-1}-1=\frac{e^x}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$ $\quad$ 0	0 $\quad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) تحت (Δ')

4) إثبات أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا : من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(-x)+f(x)=-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^{-x}-1}=-\frac{1}{e^x-1}+\frac{e^x}{e^x-1}=1=2\times\frac{1}{2}$

و منه النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أ.تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $]\ln 2;1[\subset]0;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1)\approx 0,41 \\ f(\ln 2)\approx -0,31\end{cases}$ أي $f(1)\times f(\ln 2)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α ، حيث $\ln 2<\alpha<1$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-1,4;-1,3[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-1.3)\approx 0,07 \\ f(-1.4)\approx -0,07\end{cases}$

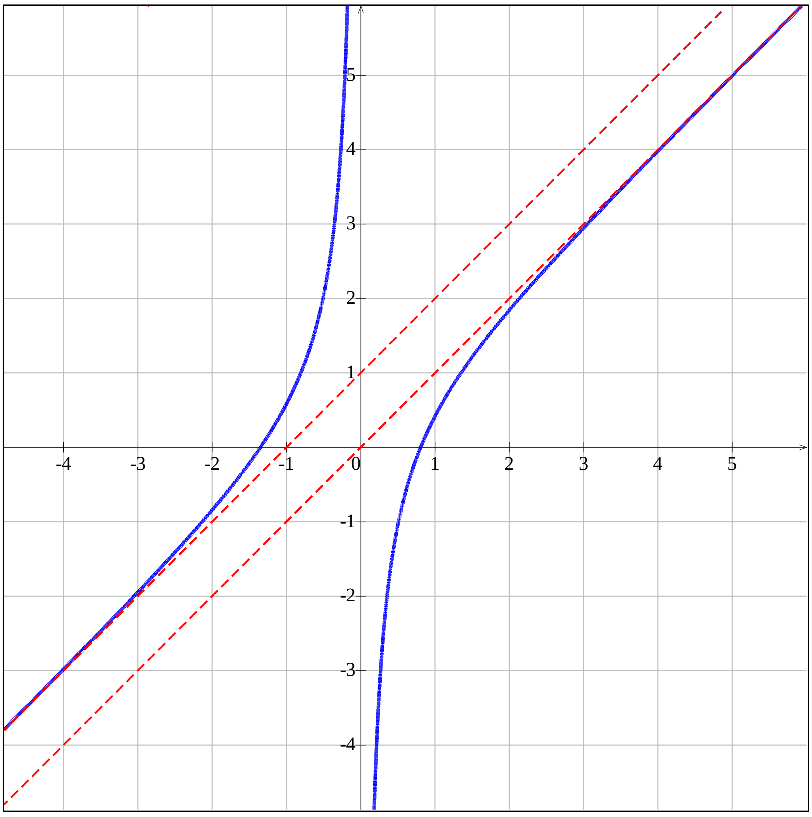
أي $f(-1,4)\times f(-1,3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حلا وحيدا β، حيث $-1.4<\beta<-1.3$.

بـ- دراسة وجود مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة: $f'(x)=1$.

لدينا: $f'(x)=1$ تكافئ $1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ تكافئ $\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$ أي $e^x=0$ و هذا مستحيل و بالتالي المعادلة ليس لها حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ).

جـ- الرسم:



د- المناقشة البيانية:

لدينا: $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $m-1=me^x$ تكافئ $m=-\dfrac{1}{e^x-1}$ تكافئ $m+x=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

تكافئ $f(x)=x+m$ ، و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذا كان $m\in]-\infty;0[$ فإن للمعادلة حل واحد موجب.

إذا كان $m\in[0;1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإن للمعادلة حل واحد سالب.

حل مقترح للتمرين 03

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$.

1) أ- حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-ex-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-ex-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^x}{x}-e-\dfrac{1}{x}\right)\right]=+\infty$.

بـ- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x-e$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^x-e=0$ تكافئ $e^x=e$ تكافئ $x=1$.

من أجل $x\in]-\infty;1]$ ، يكون $e^x\le e$ أي $f'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x\in[1;+\infty[$ ، يكون $e^x\ge e$ أي $f'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جـ ـ جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-ex-1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x-ex-1+ex+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

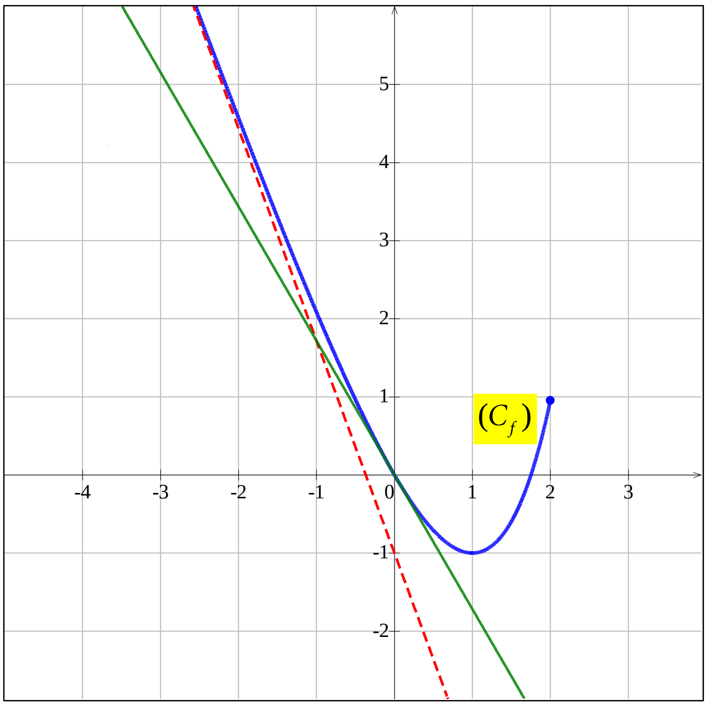
لدينا : $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه $(T):y=(1-e)x$.

جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و $]1,75;1,76[\subset[1;+\infty[$ و $\begin{cases}f(1.75)\approx-0,002\\ f(1.76)\approx 0,02\end{cases}$

أي $f(1,75)\times f(1,76)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.75<\alpha<1.76$.

د ـ الرسم :



حل مقترح للتمرين 04

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-xe^x$.

1) حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-xe^x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-xe^x)=-\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=-1\times e^x+(-x)e^x=-(x+1)e^x$

بما أن $e^x>0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(x+1)$ ، و منه :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-1;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;-1]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$1+e^{-1}$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ ـ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-1)=1+e^{-1} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$.

ب ـ التحقق أن $0.5<\alpha<0.6$:

لدينا : $]0,5;0,6[\subset[-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(0.5)\approx 0,18 \\ g(0.6)\approx -0,09 \end{cases}$ ومنه $0.5<\alpha<0.6$.

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^x-x-1$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^x-x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xe^x-e^x-x-1\right]=+\infty$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=-g(x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;2]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;2]$:

$$f'(x)=1\times e^x+(x-1)e^x-1=e^x+xe^x-e^x-1=xe^x-1=-(1-xe^x)=-g(x)$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	e^2-3

3) تبيان أن : $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$.

لدينا : $f(\alpha)=(\alpha-1)e^\alpha-\alpha-1$ ، و لدينا من جهة $g(\alpha)=0$ يكافئ $1-\alpha e^\alpha=0$ يكافئ $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$.

و منه $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)}{\alpha}-\alpha-1=\dfrac{(\alpha-1)-\alpha^2-\alpha}{\alpha}=\dfrac{-\alpha^2-1}{\alpha}$ أي : $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$.

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

$0,5 < \alpha < 0,6$ يكافئ $\begin{cases} \dfrac{1}{0,6} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{0,5} \\ 1,25 < \alpha^2 + 1 < 1,36 \end{cases}$ يكافئ $\dfrac{1,25}{0,6} < \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha} < \dfrac{1,36}{0,5}$

يكافئ $-\dfrac{1,25}{0,6} < -\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right) < -\dfrac{1,36}{0,5}$ أي : $-2,72 < f(\alpha) < -2,08$.

4) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x - e^x) = 0$

و منه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=(x-1)e^x$ و منه إشارة الفرق من إشارة $x-1$ على المجال $]-\infty;2]$.

x	$-\infty$		1		2
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;-2)$	(C_f) فوق (Δ)	

5) أ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و $1.5 < x_2 < 1.6$.

• الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و $]-1,6;-1,5[\subset]-\infty;\alpha]$ و $\begin{cases} f(-1.5) \approx -0,05 \\ f(-1.6) \approx 0,07 \end{cases}$

أي $f(-1.6)\times f(-1.5) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_1 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$

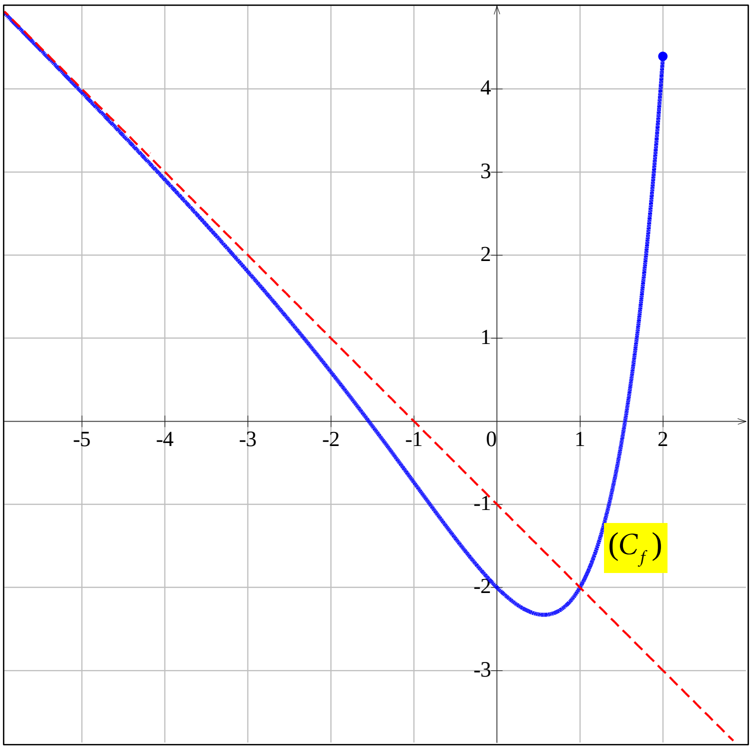
و يحقق $f(x_1)=0$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$ و $]1,5;1,6[\subset [\alpha;2]$ و $\begin{cases} f(1.5) \approx -0,26 \\ f(1.6) \approx 0,37 \end{cases}$

أي $f(1.6)\times f(1.5) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_2 حيث $1.5 < x_2 < 1.6$

و يحقق $f(x_2)=0$.

ب ـ الرسم :



6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^x$.

أ ـ تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون $h'(x)=xe^x$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=ae^{x}+(ax+b)e^{x}=(ax+a+b)e^{x}$.
بالمطابقة نجد : $a=1$ و $b=-1$. أي $h(x)=(x-1)e^{x}$.

حل مقترح للتمرين 05

I) f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=2$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=1\end{cases}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C) .

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=0\end{cases}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C) .

2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$:

$$f'(x)=\frac{1\times(x-1)-1\times x}{(x-1)^2}+\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{-1}{(x-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

بما أن $f'(x)<0$ من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↘ 2

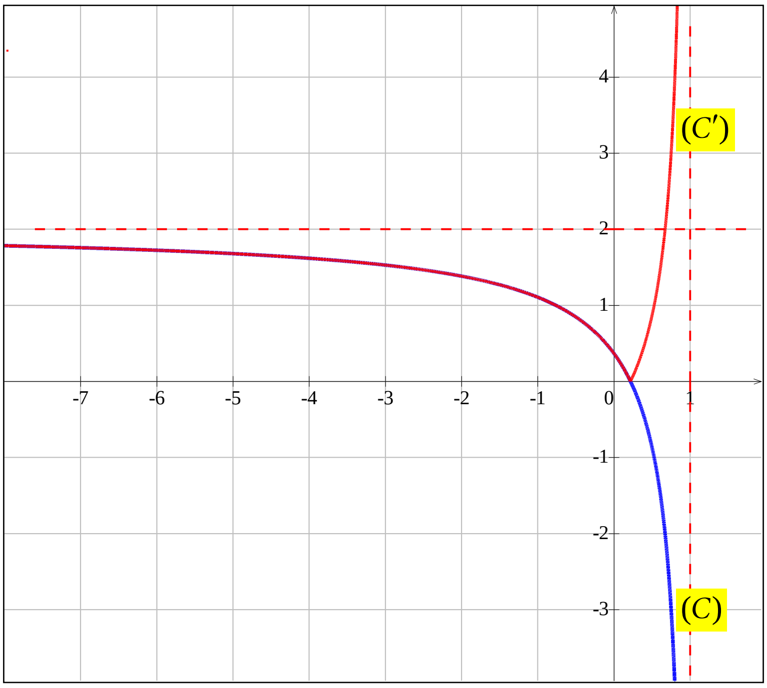
3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty\end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α .

حسب جدول القيم : $0.21<\alpha<0.22$.

4) الرسم :



5) تعيين مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة $|f(x)|=m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

من أجل $m\in\left]\frac{1}{e};2\right[$ المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $g(x)=f(2x-1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} f(2x-1)=2 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\<}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\<}} f(2x-1)=-\infty$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$: $g'(x)=2f'(2x-1)$.

بما أنه من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، $(2x-1)\in]-\infty;1[$ فإن $f'(2x-1)<0$ ، و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	1
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	2	$-\infty$

2) أ- التحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$:

لدينا : $g(x)=f(2x-1)$ و منه $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=f(\alpha)=0$.

تبيان أن : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

لدينا : $g'(x)=2f'(2x-1)$ و منه $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=2f'(\alpha)$.

بـ- إستنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

لدينا : $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)+\left(x-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right)\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)(T): y=g'$ و منه $(T): y=2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$.

جـ- التحقق من أن : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

لدينا : $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$ ، لكن $f(\alpha)=0$ و هذا يعني $e^{\frac{1}{\alpha-1}}=-\frac{\alpha}{\alpha-1}$ و منه $f'(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)^3}$

إذن : $(T): y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$ أي $(T): y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$.

حل مقترح للتمرين 06

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=-2-2e^{2x-2}=-2\left(1+2e^{2x-2}\right)$.

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)<0$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)\left(\frac{1-2x}{2x-2}-\frac{e^{2x-2}}{2x-2}\right)=-\infty\end{cases}$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقق أن : $0,36<\alpha<0,37$.

لدينا : $\begin{cases}g(0.36)\approx 0.002\\ g(0.37)\approx -0.02\end{cases}$ أي : $g(0.36)\times g(0.37)<0$ و منه $0,36<\alpha<0,37$.

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

1) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)=e^{2x+2}\left(1-2(-x)-e^{2(-x)-2}\right)=e^{2x+2}g(-x)$$

ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة على $[-\alpha;+\infty[$.

2) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^2\times 2xe^{2x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}\right)=0$

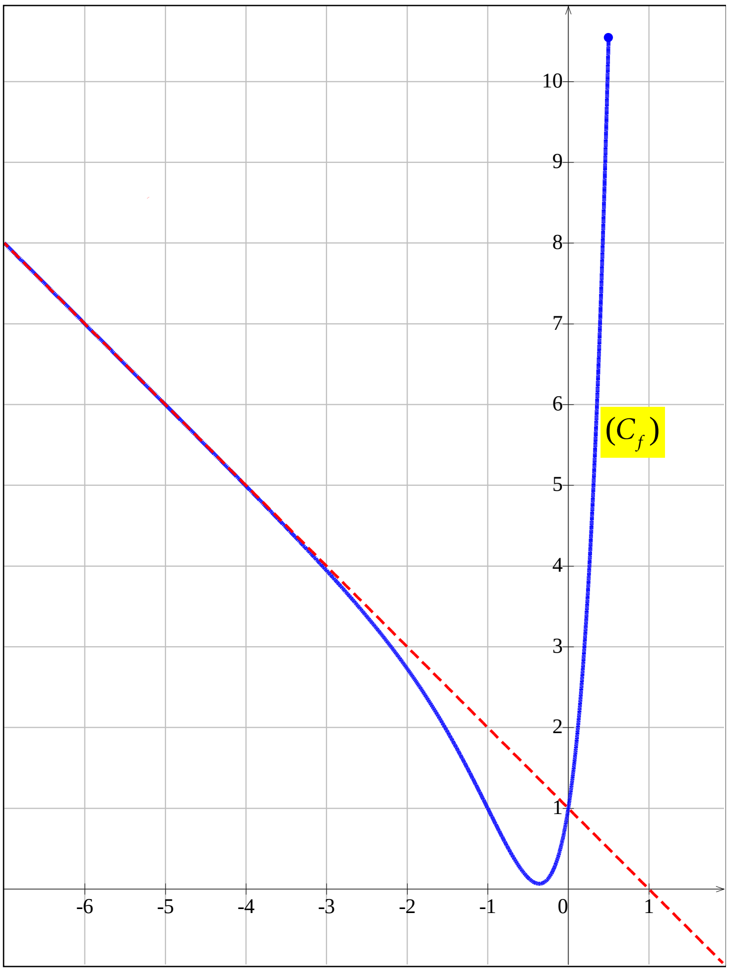
التفسير الهندسي : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-(-x+1)=xe^{2x+2}$ و منه إشارة الفرق من إشارة x .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

5) الرسم :



6) التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-(4x+4)e^{2x+2}=1-2x-3e^{2x+2}$$

07 حل مقترح للتمرين

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=1 .$$

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x-1)e^{-x}=(-x^2+x+2)e^{-x}=(2-x)(x+1)e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2-x)(x+1)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $[-1;2]$ و متناقصة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;-1]$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$1-e$	↗	$1+5e^{-2}$	↘	1

3) أ- تبيان أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث: $-1.52<\alpha<-1.51$.

لدينا : $g(0)=1+(0^2+0-1)e^0=1-1=0$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و $]-1,52;-1,51[\subset]-\infty;-1[$ و $\begin{cases} g(-1.52)\approx 0.041 \\ g(-1.51)\approx -0.04 \end{cases}$

أي $g(-1.52)\times g(-1.51)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;-1[$ حلا وحيدا α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=+\infty$$

ب- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=-1+(2x+3)e^{-x}-(x^2+3x+2)e^{-x}=-1-(x^2+x-1)e^{-x}=-g(x) .$$

جـ- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	2	↘	$-\infty$

د- $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f\alpha)}{h}=f'(\alpha)=-g(\alpha)=0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم . (يوازي لحامل محور الفواصل).

2) أ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+2)e^{-x}=0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-(-x)=(x^2+3x+2)e^{-x}=(x+1)(x+2)e^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $(x+1)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(-2;2)$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

جـ ـ تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف :

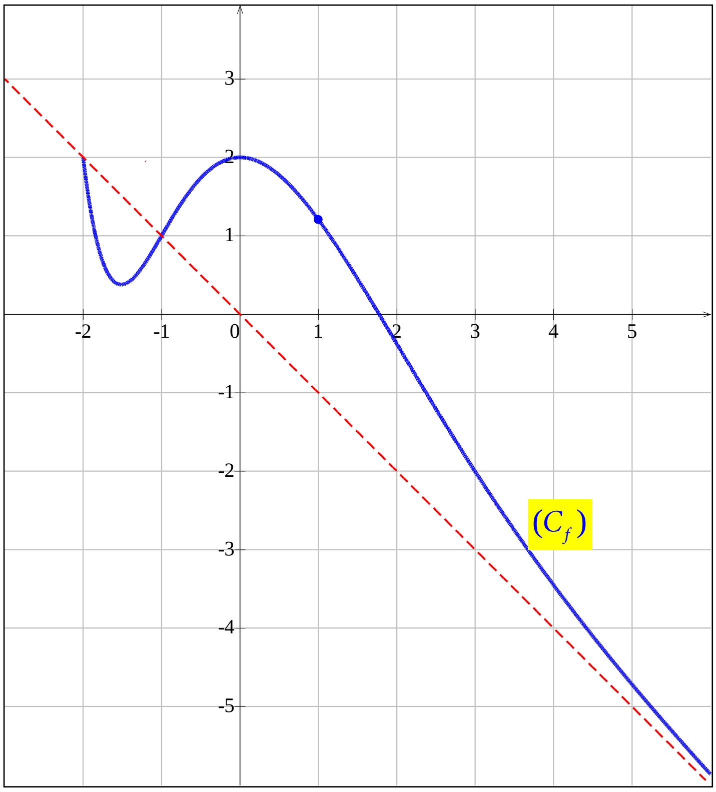
لدينا : الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=-g'(x)=(x-2)(x+1)e^{-x}$.

إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما : $A(-1;1)$ و $C\left(2;-2+12e^{-2}\right)$.

د ـ الرسم :



هـ ـ المناقشة البيانية :

المعادلة $(m-x)e^{x}+(x^2+3x+2)=0$ تكافئ $f(x)=-m$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-m$.

لما $m\in\left]-f(\alpha);+\infty\right[$ يكون $-m\in\left]-\infty;f(\alpha)\right[$ و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

لما $m=-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب و الآخر سالب .

لما $m\in\left]-2;-f(\alpha)\right[$ يكون $-m\in\left]f(\alpha);2\right[$ و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان و الآخر موجب .

لما $m=-2$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الآخر معدوم .

حل مقترح للتمرين 08

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1) أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=2e^x-2x-1$

دراسة إتجاه تغير الدالة g' :

الدالة g' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g''(x)=2e^x-2=2(e^x-1)$

إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g''(x)$	$-$ 0 $+$

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

بـ- تبيان أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0)=1$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(0)>0$

جـ- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x-x^2-x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{2e^x}{x^2}-1-\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1.38)\approx-0.02 \\ g(-1.37)\approx 0.001 \end{cases}$ أي $g(-1,38)\times g(-1,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=0$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2e^x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x)=+\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{1-xe^{-x}}\right)=+\infty$.

بـ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=\frac{(2xe^x+x^2e^x)(e^x-x)-(e^x-1)x^2e^x}{(e^x-x)^2}=\frac{xe^x\left[(2+x)(e^x-x)-x(e^x-1)\right]}{(e^x-x)^2}=\frac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}$$

جـ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$ α 0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;0]$ و متزايدة على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;\alpha]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\quad$ α $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow f(\alpha) \searrow 0 \nearrow +\infty$

2) أـ تبيان أن : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha^2-\alpha}{2}$ ومنه $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2e^{\alpha}}{e^{\alpha}-\alpha}=\dfrac{\alpha^2\left(\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}=\dfrac{\alpha^2(\alpha^2+\alpha)}{\alpha^2-\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$

أي : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$.

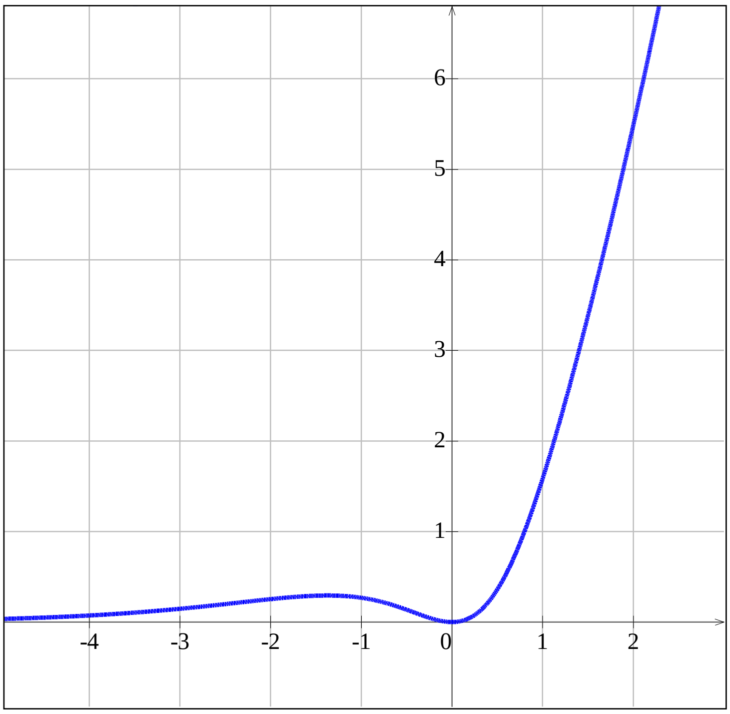
إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

لدينا : $-1,38<\alpha<-1,37$ يكافئ $\begin{cases}-0,76<2\alpha+2<-0,74\\(-1,37)^2<\alpha^2<(-1,38)^2\\-2,38<\alpha-1<-2,37\\-\dfrac{2}{2,37}<\dfrac{2}{\alpha-1}<-\dfrac{2}{2,38}\end{cases}$ ومنه $0,27<f(\alpha)<0,32$.

بـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}}\right)=0$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) و المنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x\mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ الرسم :



حل مقترح للتمرين 09

I) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x^2e^{1-x})=2$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(e\times x^2e^{-x})=0$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x^2e^{1-x})=-\infty$.

2) أ- الدالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x)=-2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}=(x^2-2x)e^{1-x}=x(x-2)e^{1-x}$$

بـ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[0;2]$ و متزايدة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;0]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$2-4e^{-1}$	$\nearrow$	2

3) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T): y=-x+2$.

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq 0$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=-e^{1-x}+xe^{1-x}=(x-1)e^{1-x}$

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $h(1)=0$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq 0$

• دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T):

لدينا : $f(x)-y=2-x^2e^{1-x}+x-2=x(1-x)e^{1-x}=xh(x)$.

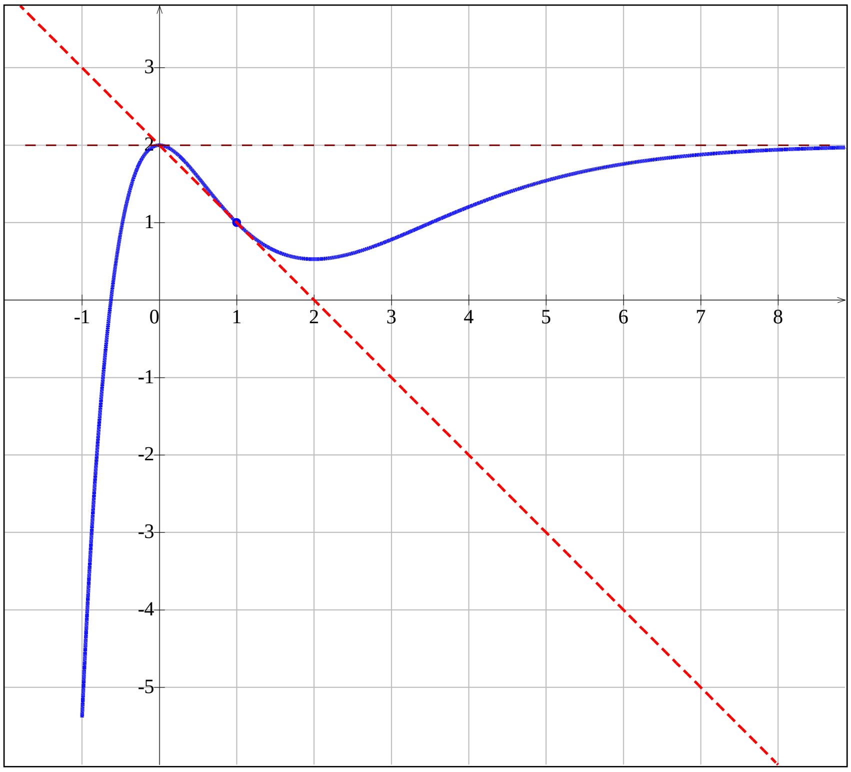
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	

2) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-0,7;-0,6[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-0.7)\approx -0.7 \\ f(-0.6)\approx 0.2 \end{cases}$

أي $f(-0.7)\times f(-0.6)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3) الرسم :



4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=2x+\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}$.

الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-(x^2+2x+2)e^{1-x}=2-x^2e^{1-x}=f(x)$$

حل مقترح للتمرين 10

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2e^x-e$.

- $g(1)=e^1-e=0$.
- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

- إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$g(-x)$	$+$ 0 $-$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-\infty$$

2) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{e}{x}\right)=0$ و منه (C_f) و المنحنى (γ) ذي المعادلة $y=e^{-x}-2$ متقاربان عند $-\infty$.

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) : لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{e}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$:

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (γ)	(C_f) تحت (γ)

3) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x)=-e^{-x}+\frac{e}{x^2}=\frac{-x^2e^{-x}+e}{x^2}=\frac{-(x^2e^{-x}-e)}{x^2}=\frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	

و منه الدالة f متزايدة على كل من المجالين $[-1;0[$ و $]0;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;-1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

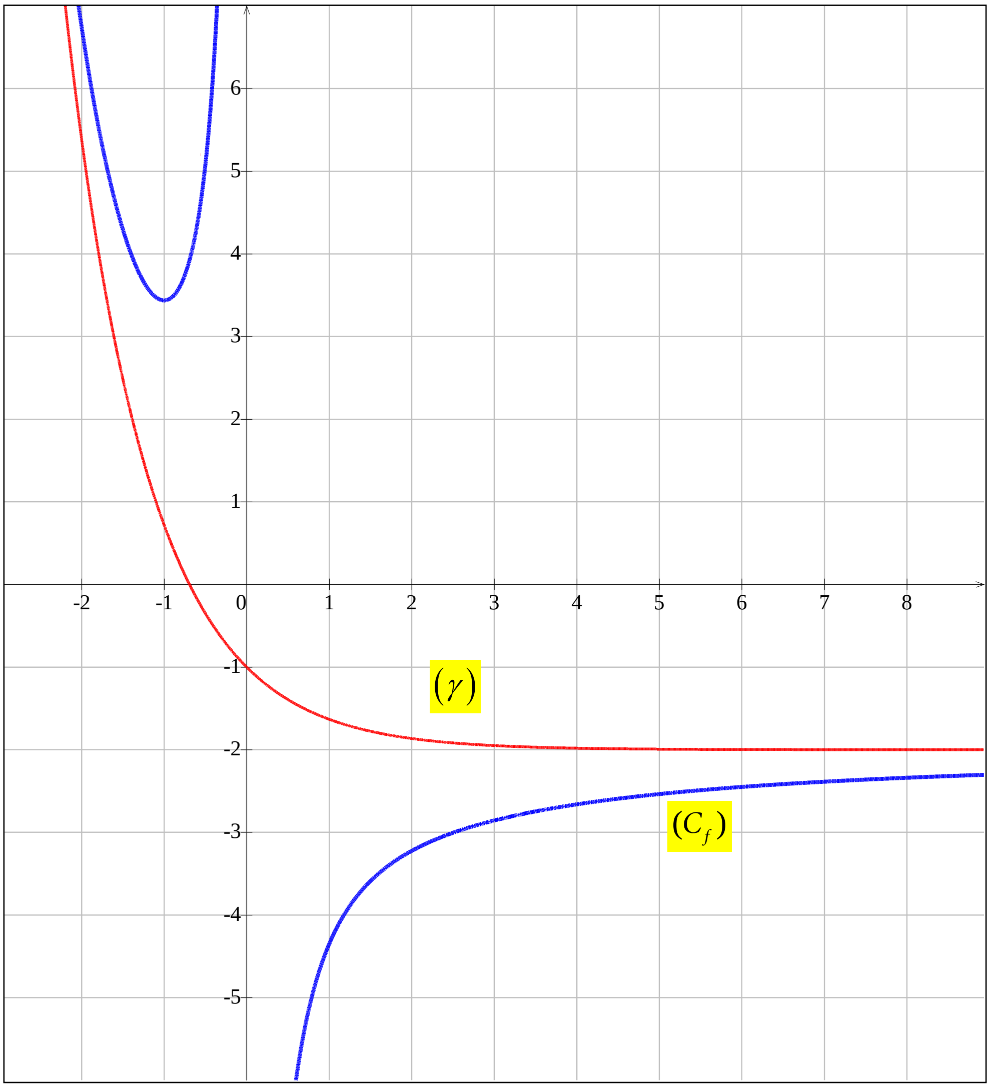
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2e-2$	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\nearrow$	$-\infty$

4) شرح كيفية إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^x$:

لدينا : (γ) المنحنى ذي المعادلة $y=e^{-x}-2$

و منه (γ) هو صورة (Γ) منحنى الدالة $x\mapsto e^{-x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$ ، علما أن (Γ) هو نظير منحنى الدالة $x\mapsto e^x$ بالنسبة لحامل محور التراتيب .

الرسم :



حل مقترح للتمرين 11

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2+(x-1)e^{-x}\right]=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2+(x-1)e^{-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(2+xe^{-x}-e^{-x})=2$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^{-x}+(-e^{-x})(x-1)=(2-x)e^{-x}$.

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x}>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متناقصة على المجال $[2;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;2]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2+e^{-2}$	$\searrow$	2

3) أ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2[$ و $]-0,38;-0,37[\subset]-\infty;2[$ و $\begin{cases} g(-0.38)\approx-0,017 \\ g(-0.37)\approx 0,016 \end{cases}$

أي $g(-0,38)\times g(-0,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1-xe^{-x})=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1-xe^{-x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)\right]=-\infty$.

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) بحيث : $(\Delta): y=2x+1$.

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) تحت (Δ)	

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=g(x)$ ،

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$f'(x)=2+(-1)e^{-x}+(-e^{-x})(-x)=2+(x-1)e^{-x}=g(x)$.

- إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، و منه نستنتج أن :

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$.

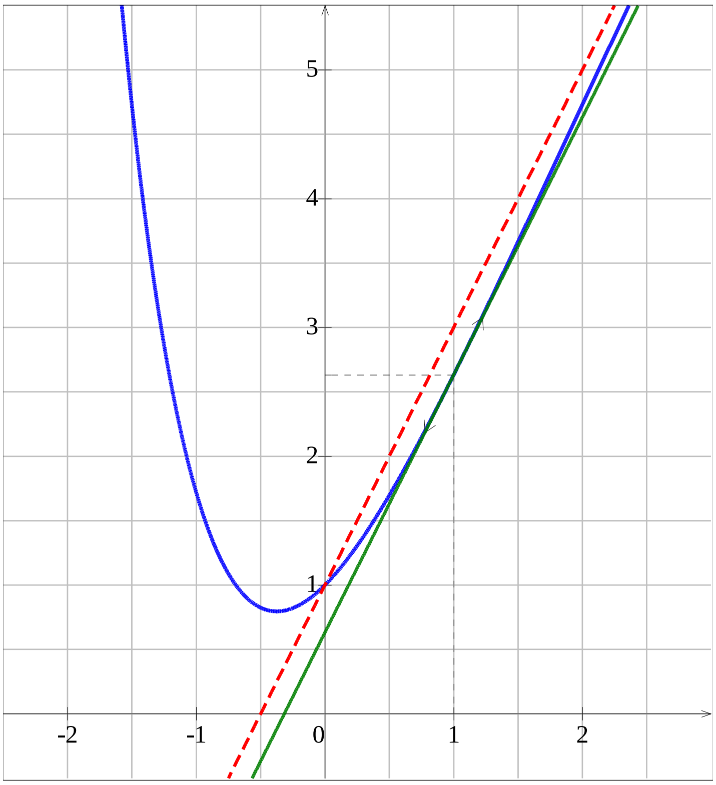
جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

لدينا : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T): y=2x+1-\frac{1}{e}$.

4) الرسم :



5) المناقشة البيانية :

$x=(1-m)e^{x}$ تكافئ $xe^{-x}=(1-m)$ تكافئ $-xe^{-x}=m-1$ تكافئ $2x+1-xe^{-x}=2x+1+m-1$

أي $2x+1-xe^{-x}=2x+m$ أي : $f(x)=2x+m$. ⟵ مناقشة مائلة .

إذا كان $m\in\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m=1-\frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف .

إذا كان $m\in\left]1-\frac{1}{e};1\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.

إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم .

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما .

$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2$ و $g(x)=e^x-ex$.

1) أ- دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^x-e$.

إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

ب- إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

بما أن $g(1)=0$ و الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ فإن 0 قيمة حديّة صغرى للدالة g .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)>0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^x-ex=g(x)$.

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

3) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{2}e\right)\right]=+\infty$$

، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty\end{cases}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=-\infty$$

، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}ex^2\right)=-\infty\end{cases}$

جدول تغيّرات الدالة f :

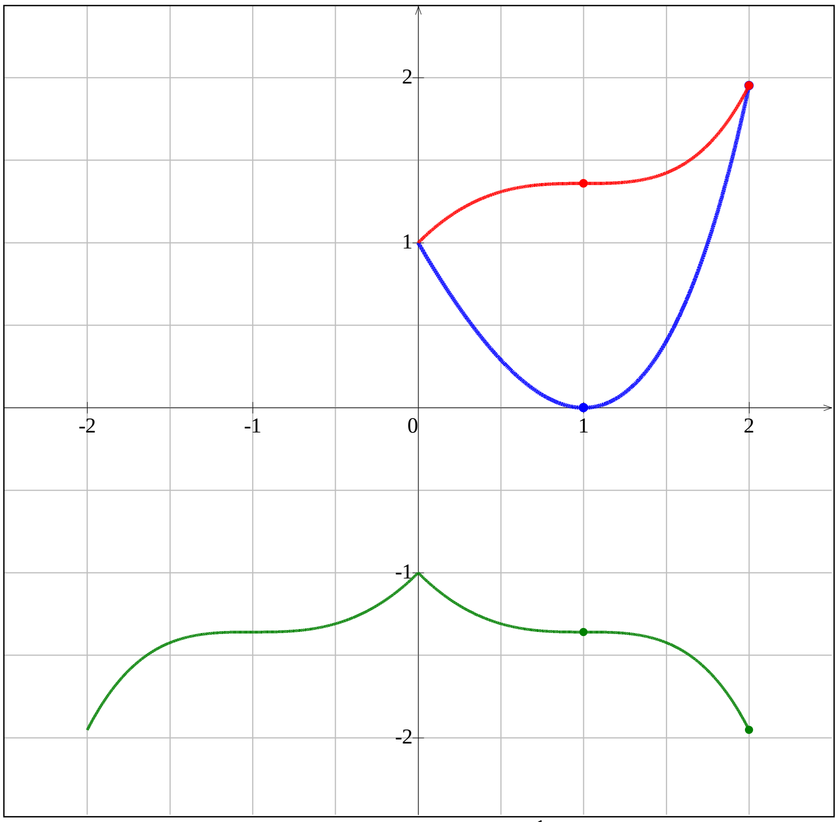
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$:

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2-(e^x-ex)=-\frac{1}{2}ex^2+ex=ex\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_g) تحت (C_f)	(C_g) يقطع (C_f) في النقطة $A(0;1)$	(C_g) فوق (C_f)	(C_g) يقطع (C_f) في النقطة $B(2;e^2-2e)$.	(C_g) تحت (C_f)	

5) الرسم :



6) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$.

أ- تبيان أن الدالة h زوجية :

من أجل كل $x\in[-2;2]$ ، $-x\in[-2;2]$ و $h(-x)=\frac{1}{2}e(-x)^2-e^{|-x|}=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}=h(x)$.

و منه الدالة h زوجية .

ب- من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)+f(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^x+e^x-\frac{1}{2}ex^2=0$.

استنتاج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) :

من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)=-f(x)$ و بالتالي (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0;2]$.

و لرسم (Γ) على المجال $[-2;0]$ نستخدم كون الدالة h زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

حل مقترح للتمرين 13

I) بقراءة بيانية :

1) التبرير : من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x-x>0$ لأن (γ) يقع فوق (Δ) على $\mathbb{R}$.

2) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-1+\frac{2e^x}{e^x-x}$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-1+\frac{2e^x}{e^x(1-xe^{-x})}\right]\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-1+\frac{2}{1-xe^{-x}}\right]=1$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-1+\frac{2e^x}{e^x-x}\right]=-1$.

التفسير البياني : المستقيمان اللذان معادلتاهما : $y=1$ و $y=-1$ مقاربان للمنحنى (C_f) .

2) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

$$f'(x)=\frac{2e^x(e^x-x)-2e^x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2} .$$

ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-x)$ و بالتالي : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	1

مع $f(1)=\frac{e+1}{e-1}\approx 2.16$.

3) أ- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0 :

لدينا : $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه $(T): y=2x+1$.

ب- من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)-(2x+1)=-2-2x+\frac{2e^x}{e^x-x}=\frac{(-2-2x)(e^x-x)+2e^x}{e^x-x}=\frac{2x^2+2x-2xe^x}{e^x-x}=\frac{g(x)}{e^x-x} .$$

جـ- الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) : إشارة الفرق $f(x)-(2x+1)$ من إشارة $g(x)$ و بالتالي :

- المنحنى (C_f) فوق (T) على المجال $]-\infty;0[$.
- المنحنى (C_f) تحت (T) على المجال $]0;+\infty[$.
- المنحنى (C_f) يقطع (T) في النقطة $A(0;1)$.

النقطة A هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1]$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ و $\begin{cases} f(1)\approx 2.16 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1]$.

5) التحقق أن : $-0.6<\alpha<-0.5$.

لدينا : $\begin{cases} f(-0.6)\approx -0.04 \\ f(-0.5)\approx 0.09 \end{cases}$ أي $f(-0.6)\times f(-0.5)<0$ و منه $-0.6<\alpha<-0.5$.

6) الرسم :