تمارين الأعداد المركبة

في البكالوريا

من 2008 إلى 2019

شعبة : تقني رياضي

كتابة : خالد بخاخشة

آخر تحديث : جانفي 2020

التمرين الأول

[باك 2008][م1]

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$ المعرفة كمايلي :

$$z^3+(2-4i)z^2-(6+9i)z+9(-1+i)=0 \quad .... \quad (*)$$

1) بيّن أن $z_0=3i$ هو حل للمعادلة $(*)$.

2) حل ، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(*)$ ثم أكتب حلولها z_0 ، z_1 و z_2 على الشكل الأسي ، حيث $|z_1|<|z_2|$.

3) لتكن A ، B و C صور الحلول z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

عيّن النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$.

4) عيّن المجموعة (E) للنقط M حيث : $AM^2+BM^2-CM^2=-13$.

بيّن أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ، ثم أنشئ (E) .

5) تحقق أن النقط O ، B و G في إستقامية ثم عيّن صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O و يحول B إلى G محددا عناصره المميزة .

التمرين الثاني

[باك 2008][م2]

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كيفي .

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2-2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z-r^2=0$$

أكتب الحلين على الشكل الأسي .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين .

عيّن θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع .

التمرين الثالث

[باك 2009][م1]

1) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2z+2=0$.

ب- إستنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z : $(\overline{z}+3)^2-2(\overline{z}+3)+2=0$ ، حيث $\overline{z}$ مرافق z .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

النقط A ، B و M لواحقها $(1-i)$ ، $(1+i)$ و z على الترتيب .

أ- عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}^+$.

ب- عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|z-1+i|=|z-1-i|$.

التمرين الرابع

[باك 2009][م2]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-6z+18=0$.

2) ليكن العدد المركب z_1 حيث : $z_1=3-3i$.

أ- أكتب z_1 على الشكل الأسي .

ب- أحسب طويلة العدد z_3 و عمدة له حيث : $z_1\times z_3=6\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C لواحقها $3+3i$ ، $3-3i$ و $\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ على الترتيب.

أ- عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بـ G_α.

ب- عيّن مجموعة النقط G_α لما يتغيّر α في $\mathbb{R}^*$.

التمرين الخامس

[باك 2010][م1]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$.

2) نعلم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، C ، D و I لواحقها $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ ، $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب.

3) z عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases}\arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\frac{\pi}{2}\\ |z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$.

أ- بيّن أن الجملة تكافئ : $\frac{z-3+2i}{z-1}=i$ ، ثم عيّن قيمة z.

ب- B النقطة التي لاحقتها $z_B=3$ ، تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

جـ- لتكن J النقطة التي لاحقتها z_J حيث : $z_J=1-2i$.

أكتب على الشكل الأسي العدد المركب z حيث : $z=\frac{z_A-z_J}{z_B-z_J}$.

تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

التمرين السادس

[باك 2010][م2]

1) أ- أكتب على الشكل الأسي العدد المركب a حيث : $a=-2+2i\sqrt{3}$.

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2=-2+2i\sqrt{3}$.

2) ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط التي لواحقها $z_A=-2$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}i$ و $z_C=1+\sqrt{3}i$ على الترتيب.

أ- أحسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له.

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) لتكن (E) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث $\arg(\bar{z}+2)=\frac{\pi}{3}$.

أ- تحقق أن B تنتمي إلى (E).

ب- عيّن المجموعة (E) .

التمرين السابع

[باك 2011][م1]

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : (E) .... $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، ثم أكتب حلولها على الشكل المثلثي.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط التي لواحقها $z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3}+i$ و $z_C = \sqrt{3}-i$ على الترتيب .

نضع : $L = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

أ ـ أكتب L على الشكل الأسي .

بـ ـ أثبت أن $z_A - z_B = L\left(z_C - z_B\right)$ ، ثم استنتج أن A صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه و تحديد عناصره المميزة .

جـ ـ استنتج نوع المثلث ABC ثم أحسب مساحته .

التمرين الثامن

[باك 2011][م2]

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

العدد المركب L المعرف كما يلي : $L = \frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$.

1) أ ـ أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي .

بـ ـ بيَن أن $L^{12}+1=0$ ، ثم أحسب : $\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+\left(5+3i\right)^{12}$.

جـ ـ n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي . أثبت أن : $L^{4n}+L^{4p}=0$.

2) أ ـ النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = 5+3i$ و $z_B = 5-3i$.

عيَن اللاحقة $z_{A'}$ للنقطة A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$.

بـ ـ عيَن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA' .

التمرين التاسع

[باك 2012][م1]

1) عيَن العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث : $\begin{cases} 2z_1+3z_2 = 9-2i \\ 3z_1 - z_2 = 8+8i \end{cases}$.

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و Ω التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = 3+2i$ ، $z_B = -3$ و $z_\Omega = 1-2i$.

أ ـ أثبت أن : $z_B - z_\Omega = i\left(z_A - z_\Omega\right)$.

بـ ـ عيَن طبيعة المثلث ΩAB .

3) h التحاكي الذي مركزه النقطة A و نسبته 2 .

أ ـ عيَن الكتابة المركبة للتحاكي h .

بـ ـ عيَن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h .

جـ ـ عيَن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\left\{(A,1);(B,-1);(C,1)\right\}$.

د ـ بيَن أن $ABCD$ مربع .

4) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$.

أ ـ تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E) ، ثم عيَن طبيعة (E) و عناصرها المميزة .

بـ ـ أنشئ المجموعة (E) .

التمرين العاشر

[باك 2012][م2]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B ، C و D النقط التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ ، $z_C=-1-\sqrt{3}i$ و $z_D=-1+\sqrt{3}i$.

أ- أكتب كلا من z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي.

بـ- تحقق أن: $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

3) z_n العدد المركب الذي طويلته $\dfrac{1}{2^n}$ و $\dfrac{2\pi}{3}n$ عمدة له حيث n عدد طبيعي.

L_n العدد المركب المعرف بـ: $L_n=z_D\times z_n$.

أ- أكتب كلا من L_0 و L_1 على الشكل الجبري.

بـ- (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n=|L_n|$.

- أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

- M_0 ، M_1 ، ...... ، M_n صور الأعداد المركبة L_0 ، L_1 ، ...... ، L_n على الترتيب.

أحسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n=\|\overrightarrow{OM_1}\|+\|\overrightarrow{OM_2}\|+\dots\dots\dots+\|\overrightarrow{OM_n}\|$

- جد نهاية S_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين الحادي عشر

[باك 2013][م1]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2+6z+17=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-4$ ، $z_B=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$ و $z_C=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i$.

أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) أ- عين z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A.

بـ- عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\|=10\sqrt{2}$.

4) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z+4)=\dfrac{\pi}{4}$

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عين المجموعة (Γ_2).

التمرين الثاني عشر

[باك 2013][م2]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-5+i\sqrt{3}$.

S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C و يحول O إلى B.

- جد العبارة المركبة للتشابه S ، ثم عين العناصر المميزة له.

3) أ- عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$.

بـ- أكتب العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABD.

جـ- عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

التمرين الثالث عشر

[باك 2014][م1]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$ و $z_3=i$.

أ- أكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي.

بـ- هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟ برّر إجابتك.

3) أ- عيّن العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى C ، محددا نسبته و زاويته.

بـ- استنتج طبيعة المثلث ABC .

4) أ- عيّن العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=5$

بـ- عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $|z-z_1|=|z-z_3|$.

التمرين الرابع عشر

[باك 2014][م2]

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطة A ذات اللاحقة $z_0=1+i$.

1) أ- عيّن ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z=z_0+2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$.

بـ- عيّن ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z=z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$.

جـ- عيّن إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ') .

2) نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث : $z_1=z_0+2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$.

أ- عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1-z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

بـ- عيّن z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

جـ- عيّن العددين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A,\alpha);(C,\beta)\}$ و $\alpha+\beta=\sqrt{2}$.

د- عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$.

التمرين الخامس عشر

[باك 2015][م1]

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب z_A و z_B

حيث : $z_A=-1-i$ و $z_B=3+3i$.

1) أ- أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

بـ- n عدد طبيعي ، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا .

جـ- z عدد مركب حيث $\frac{z}{z_A}=4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، أحسب طويلة العدد z و عمدة له ، ثم أكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري.

د- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) أ- أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

بـ- أحسب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$، ثم بيّن أن $ABDC$ مربع.

التمرين السادس عشر

[باك 2015] [م2]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-4(\sin\theta)z+4=0$ .... (I)، حيث θ وسيط حقيقي.

2) من أجل $\theta=\frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

3) نعتبر في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=3\sqrt{3}+i$.

أ- أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي. استنتج طبيعة المثلث ABC .

بـ- استنتج النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يطلب تعيين نسبته و زاوية له.

جـ- عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$، ثم حدد طبيعة الرباعي $ABDC$.

4) أ- عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي صرف مع $z\neq z_B$.

بـ- عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ حقيقيا مع $z\neq z_B$.

التمرين السابع عشر

[باك 2016] [م1]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$.

2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب:

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i$ و $z_B=\overline{z_A}$.

أ- أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي.

بـ- بيّن أن: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437}+\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016}=0$.

جـ- عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا.

3) f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=\left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$.

أ- عيّن طبيعة التحويل النقطي f و عناصره المميزة.

بـ- أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f .

جـ- عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

التمرين الثامن عشر

[باك 2016] [م2]

1) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(2z-\sqrt{2})(z^2-2\sqrt{2}z+4)=0$.

بـ- أكتب الحلول على الشكل الأسي.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $c=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

أ- علم النقط A ، B و C في المعلم السابق .

ب- نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و نسبته 3 و زاويته π .

و النقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$.

- أحسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب .

3) نضع : $z=\dfrac{d-b}{e-b}$.

أ- أكتب العدد z على الشكل المثلثي .

ب- نعتبر النقطة I منتصف القطعة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة I . ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

التمرين التاسع عشر

[باك 2017] [م1]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=-i$.

1) أكتب العدد المركب $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C و يحول B إلى A .

3) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى C و النقطة E صورة النقطة D بالتشابه S.

أ- عيّن z_D لاحقة النقطة D ، ثم تحقق أن : $z_E=1-2i$ حيث z_E لاحقة النقطة E .

ب- حدد طبيعة الرباعي $ADEB$.

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z . (M تختلف عن A و B)

حيث : $\arg\left(z-z_A\right)-\arg\left(z-z_B\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) و أنشئها .

التمرين العشرون

[باك 2017] [م2]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=\dfrac{1}{2}(1-i)$ و $z_D=\overline{z_C}$.

1) أكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ، ثم استنتج الشكل الأسي لكل من z_B و z_D .

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $\left(z_A\right)^n=\left(z_B\right)^n$.

2) أ- جد نسبة و مركز التحاكي h الذي يحول D إلى A و يحول C إلى B .

ب- أحسب طويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_B}{z_D-z_A}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.

3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\left\{(A,2);(B,2);(C,-1);(D,-1)\right\}$ ،

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$.

بيّن أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميزة و أنشئها .

التمرين الواحد و العشرون

[باك 2017] [د إ] [م1]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-4)(z^2-2z+4)=0$.

II) المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1) أكتب العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) أ- عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{2\pi}{3}$.

ب- عين طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $z_n=(z_A)^n+(z_B)^n$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n=2^{n+1}\times\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n=z_{6n}$

عبر عن t_n بدلالة n ثم أحسب P_n بدلالة n حيث: $P_n=t_0\times t_1\times t_2\times......\times t_n$.

التمرين الثاني و العشرون

[باك 2017] [د إ] [م2]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z+1-\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$.

II) المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-1+\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$.

1) بين أن $z_B-z_A=i(z_C-z_A)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC و أحسب مساحته.

2) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد L حيث: $L=\dfrac{z_C-z_A}{z_C}$.

ب- بين أن: $L=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

3) نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' و المعرف بـ:

$z'=(z-z_B)L+z_B$.

- بين أن S تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة.

4) لتكن النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحويل $S\circ S$.

- أحسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين الثالث و العشرون

[باك 2018] [م1]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.

II) المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما: $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_B=\overline{z_A}$.

1) أكتب على الشكل الأسي كلا من العددين المركبين z_A و $\dfrac{1}{z_B}$ ، ثم بين أن العدد $\left(\dfrac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف.

2) لتكن النقطة C صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و نسبته -3 .

- بين أن لاحقة النقطة C هي: $z_C=-\sqrt{2}+i3\sqrt{2}$.

3) عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

4) أ ـ بيّن أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

ب ـ جد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا .

التمرين الرابع و العشرون

[باك 2018] [م2]

I) أ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $4z^2 - 2z + 1 = 0$ .... (E).

ب ـ أكتب العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي، حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة (E) .

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1) أحسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم حدّد طبيعة المثلث ABC .

ب ـ استنتج أن B هي صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

2) جد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ و استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

3) حدّد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $\left|iz + \sqrt{3} - i\right| = \left|z - 1 + i\sqrt{3}\right|$.

4) بيّن أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) .

التمرين الخامس و العشرون

[باك 2019][م1]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 + i$ ، $z_B = 2 + i$ و $z_C = \frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(Γ) الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 1 .

1) أ ـ تحقق أن النقطة C من الدائرة (Γ) .

ب ـ عيّن قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ ، ثم استنتج أن C صورة B بالدوران r الذي مركزه A يُطلب تعيين زاويته .

2) S التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

أ ـ حدّد العناصر المميزة للتشابه S .

ب ـ عيّن z_D لاحقة D صورة B بالتشابه S .

3) ما هي نسبة التحاكي h الذي مركزه A حيث : $S = h \circ r$ ؟ استنتج أن النقط A ، C و D في إستقامية .

4) (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z ، حيث : $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$.

تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (E) ، ثم حدّد طبيعة المجموعة (E) .

I) أ- تحقق أن : $\left(2-2\sqrt{3}\right)^2=16-8\sqrt{3}$.

ب- أكتب على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركّب z حيث : $z=-16\sqrt{3}-16i$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}+4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_B=\frac{1}{2}iz_A$ و $z_C=-\frac{1}{4}z_A$.

1) أكتب z_A على الشكل الجبري ، ثم بيّن أن : $z_A=4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

2) استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) S التشابه المباشر الذي يحول A إلى B و B إلى C .

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالتشابه S .

أ- بيّن أن : $z'=\frac{1}{2}iz$.

ب- حدّد العناصر المميّزة للتشابه S .

4) G النقطة ذات اللاحقة z_G مرجح الجملة $\left\{(A;2),(B;-2),(C;4)\right\}$.

أ- بيّن أن : $z_G=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب- (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z، حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{2}$.

حدّد طبيعة المجموعة (E) و عناصرها المميّزة ، ثم أحسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S .