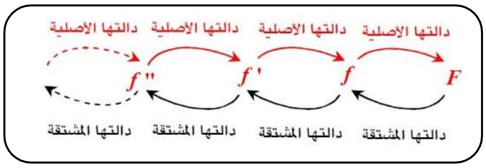
كل ما تحتاج في هذا المحور



1) **تعريف:**

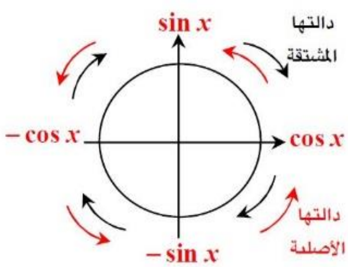
الدالة F أصلية للدالة f على المجال I هذا يعني أن: F’(x)=f(x)

2) **خواص الدوال الأصلية:**

- شرط وجود دالة أصلية F للدالة f على المجال I: الدالة f مستمرة على المجال I
- عدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I: غير منتهية أي F(x)+k و k عدد حقيقي
- الدالتان F و G أصليتان لنفس الدالة على المجال I: F’(x)=G’(x)

3) **الدوال الأصلية للدوال المألوفة:**

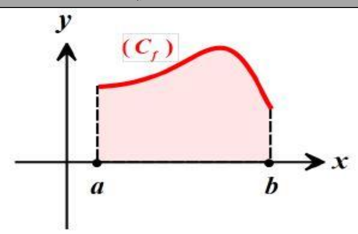
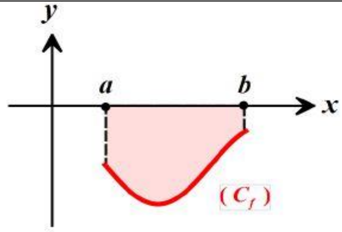
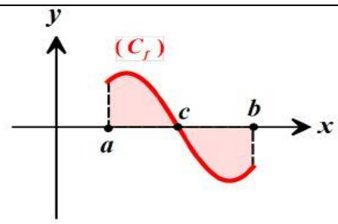
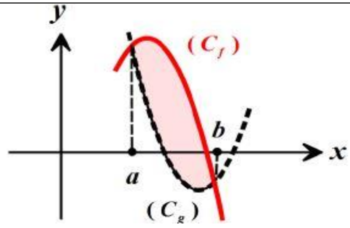
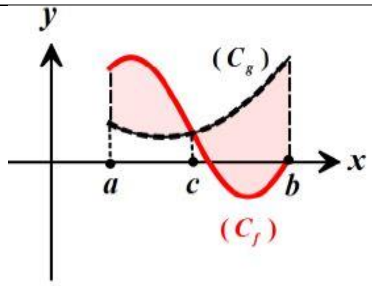
f(x)	F(x)
a	$ax+k$
x	$\frac{x^2}{2}+k$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^n}+k$
$U'.U$	$\frac{U^2}{2}+k$
$U'.U^n$	$\frac{U^{n+1}}{n+1}+k$
$\frac{U'}{U^2}$	$-\frac{1}{U}+k$
$\frac{U'}{U^n}$	$-\frac{1}{(n-1)U^{n-1}}+k$
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U}+k$
$U'\cos(U)$	$\sin(U)$
$U'\sin(U)$	$-\cos(U)$
$U'e^U$	e^U+k
$\frac{U'}{U}$	$\mathrm{Ln}\lvert U\rvert+k$

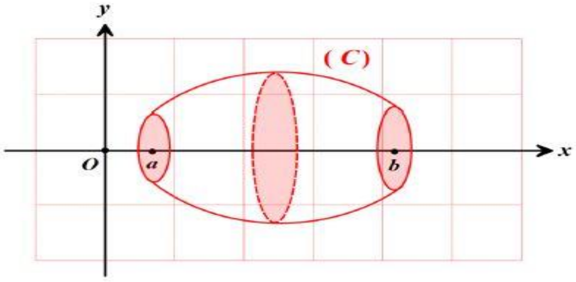


4) الحساب التكاملي:

التكامل المحدود		$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
التكامل الغير محدود		$\int f(x)\,dx = F(x) + k$
علاقة شال		$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
المكاملة بالتجزئة	المحدودة	$\int_a^b U.V'dx = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\,dx$
	الغير محدودة	$\int U.V'\,dx = U.V - \int U'.V\,dx$
القيمة المتوسطة على المجال		$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

5) حساب المساحات والحجوم:

المساحات S	التمثيل البياني لها
$S = \int_a^b f(x)\,dx$	
$S = \int_a^b -f(x)\,dx$	
$S = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b -f(x)\,dx$	
$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$	
$S = \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$	

الحجوم V	التمثيل البياني لها
$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$	

__ملاحظة:__ كل المساحات يجب أن تضرب في الوحدة ua : $ua = ||\vec{i}||.||\vec{j}||$

سلسلة التماريـن

التمرين الأول: عين الدوال الأصلية F للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = x.e^{x^2}$$
$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$f(x) = \frac{1}{x.Ln(x)}$$
$$f(x) = \tan(x)$$
$$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+8)^2}$$
$$f(x) = 1 - x + \frac{x}{(x^2+1)^3}$$
$$f(x) = \frac{12x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f(x) = \cos(2x) - \frac{\sin(x)}{2}$$
$$f(x) = 2x + 3 - \frac{4}{x+1} + \frac{2}{(5x-1)^2}$$

التمرين الثاني:

f دالة عددية ذات المجهول x حيث : $f(x) = \frac{x^3-8x^2+22x-3}{(x-3)^2}$

1) عين الأعداد الحقيقية $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ حيث:

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-3} + \frac{\lambda}{(x-3)^2}$$

2) عين الدالة الأصلية F للدالة f التي تنعدم من أجل x=4

التمرين الثالث:

f دالة عددية ذات المجهول x حيث :

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$$

عين الأعداد الحقيقية a, b وc حيث الدالة g المعرفة على R بـ: $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين الرابع:

1) عين الدوال الأصلية F للدالة f بالتكامل بالتجزئة الغير محدود في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = xLn(x)$$
$$f(x) = x^2.Ln(x)$$
$$f(x) = Ln(x)$$

$$f(x) = x\sin(x)$$
$$f(x) = x^2\cos(x)$$
$$f(x) = xe^x$$

2) أحسب الدالة الأصلية لـ$(Ln(x))^2$ و $(Ln(x))^3$ ثم استنتج F في حالة $(Ln(x))^4$

3) أحسب مساحة $(Ln(x))^4$ على المجال [2 ;5]

التمرين الخامس: أحسب المساحات التالية:

$$S_4 = \int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x}dx$$
$$S_5 = \int_1^2 \frac{x^2 - x + 1}{x^2+1}dx$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx$$
$$S_2 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$
$$S_3 = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$$

التمرين السادس:

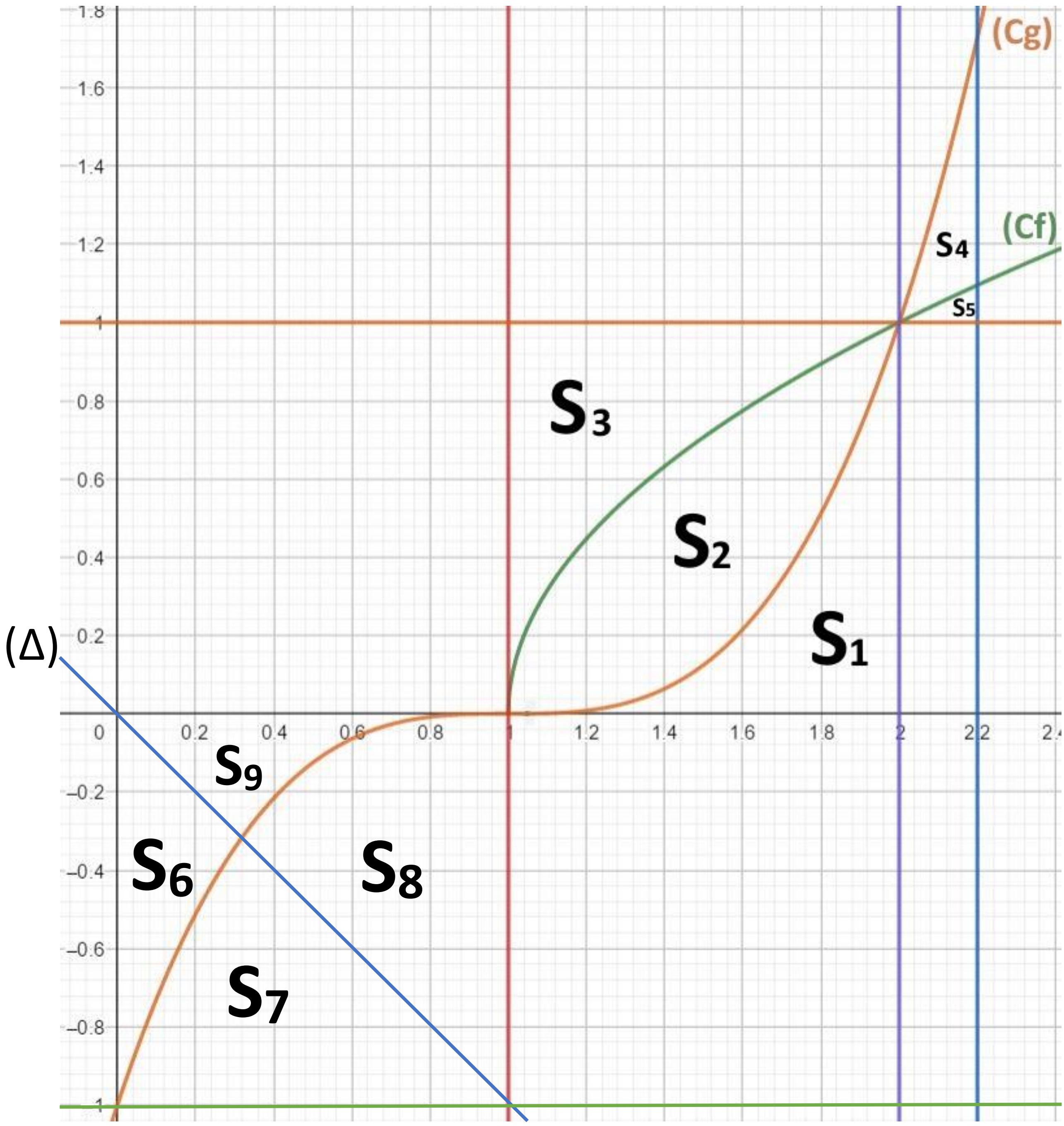
المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ نتعبر الدالتين المعرفتين كما يلي:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$y = -x$$

1) أحسب كل من الأحياز الموضحة في الشكل من S_1 إلى S_9
2) استنتج مساحة الحيز بين المنحنيين على المجال $[1\,;2{,}2]$
3) أحسب مساحة المنحنى (C_g) على المجال $[0\,;2{,}2]$
4) أحسب حجم المنحنى (C_f) على المجال $[1\,;2]$



نتائج التماريـن

التمريـن الأول:

$$F(x)=\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+8)^2}\,dx=\frac{-1}{x^2+3x+8}+k$$

$$F(x)=\int 1-x+\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$=x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4(x^2+1)^2}+k$$

$$F(x)=\int \frac{12x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=12\sqrt{x^2+1}+k$$

$$F(x)=\int \cos(2x)-\frac{\sin(x)}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos x)+k$$

$$F(x)=\int 2x+3-\frac{4}{x+1}+\frac{2}{(5x-1)^2}\,dx$$

$$=x^2+3x-4\mathrm{Ln}|x+1|-\frac{2}{25x-5}+k$$

$$F(x)=\int x.e^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+k$$

$$F(x)=\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx=-\frac{1}{e^x+1}+k$$

$$F(x)=\int \frac{1}{x.\mathrm{Ln}(x)}\,dx=\mathrm{Ln}|\mathrm{Ln}(x)|+k$$

$$F(x)=\int \tan(x)\,dx=-\mathrm{Ln}|\cos(x)|+k$$

$$F(t)=\int \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\,dt=\mathrm{Ln}|e^t+e^{-t}|+k$$

التمريـن الثاني:

$$\alpha=1;\ \beta=-2;\ \gamma=1;\ \lambda=18$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}-2x+\mathrm{Ln}|x-3|-\frac{18}{x-3}+k$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}-2x+\mathrm{Ln}|x-3|-\frac{18}{x-3}+18$$

التمريـن الثالث:

$$f(x)=g'(x)\Rightarrow a=-1;b=1;c=0$$

$$g(x)=(-x^2+x)e^{-x}$$

التمريـن الرابع:

$$F(x)=\int x\sin(x)dx=\sin(x)-x.\cos(x)$$

$$F(x)=\int x^2\cos(x)\,dx$$

$$=(x^2-2)\sin(x)+2x.\cos(x)$$

$$F(x)=\int xe^x\,dx=(x-1)e^x$$

$$F(x)=\int x\mathrm{Ln}(x)dx=\frac{x^2}{4}(2\mathrm{Ln}(x)-1)+k$$

$$F(x)=\int x^2\mathrm{Ln}(x)\,dx=\frac{x^3(3\mathrm{Ln}(x)-1)}{9}+k$$

$$F(x)=\int \mathrm{Ln}(x)\,dx=x(\mathrm{Ln}(x)-1)+k$$

$$F(x)=\int [\mathrm{Ln}(x)]^2dx$$

$$=x\left[(\mathrm{Ln}(x))^2-2\mathrm{Ln}(x)+2\right]+k$$

$$F(x)=\int [\mathrm{Ln}(x)]^3dx$$

$$=x\left[(\mathrm{Ln}(x))^3-3(\mathrm{Ln}(x))^2+6\mathrm{Ln}(x)-6\right]+k$$

$$F(x)=\int [\mathrm{Ln}(x)]^4dx$$

$$=x\left[(\mathrm{Ln}(x))^4-4(\mathrm{Ln}(x))^3+12(\mathrm{Ln}(x))^2-24\mathrm{Ln}(x)+24\right]+k$$

$$S=\int_2^5 [\mathrm{Ln}(x)]^4dx=8{,}4$$

التمريـن الخامس:

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(x)dx=-[\mathrm{Ln}|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\mathrm{Ln}(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$S_2=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$$

$$S_3=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{6}\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{6}(2^{\frac{3}{2}}-1)$$

$$S_4=\int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x}dx=\left[e^{x^2+2x}\right]_0^1=e^3-1$$

$$S_5=\int_1^2\frac{x^2-x+1}{x^2+1}dx=\left[x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|x^2+1|\right]_0^1=\frac{1-\mathrm{Ln}(2)}{2}$$

التمريـن السـادس:

$$S_1=\int_1^2 g(x)dx=\frac{1}{4}$$

$$S_2=\int_1^2 [f(x)-g(x)]dx=0{,}42$$

$$S_3=\int_1^2 [1-f(x)]dx=0{,}33$$

$$S_4=\int_2^{2,2} [g(x)-f(x)]dx=0{,}06$$

$$S_5=\int_2^{2,2} [f(x)-1]dx=9{,}69.10^{-3}$$

$$S_6=\int_0^{0,32} [y-g(x)]dx=0{,}15$$

$$S_7=\int_0^{0,32}[g(x)-(-1)]dx+\int_{0,32}^1[y-(-1)]dx$$

$$=0{,}12+0{,}23=0{,}35$$

$$S_8 = \int_{0,32}^{1} [g(x) - y]dx = 0,4$$

$$S_9 = -\int_{0}^{0,32} y\,dx - \int_{0,32}^{1} g(x)dx = 0,05 + 0,05 = 0,1$$

$$\int_{1}^{2} [f(x) - g(x)]dx + \int_{2}^{2,2} [g(x) - f(x)]dx = S_2 + S_4 = 0,48$$

$$-\int_{0}^{1} g(x)\,dx + \int_{1}^{2,2} g(x)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{324}{625} = 0,77$$

$$V = \int_{1}^{2} \pi[f(x)]^2\,dx = \frac{\pi}{2}$$