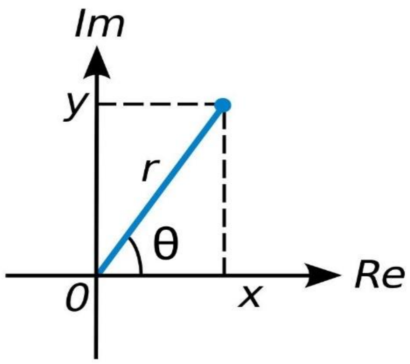
كل ما تحتاج في هذا المحور



I. عموميات حول الأعداد المركبة:

1) التعـريف:

$$\boxed{z = x + y.i}$$

- الجزء الحقيقي للعدد المركب هو $Re(Z)=x$
- الجزء التخيلي للعدد المركب هو $Im(z)=y$
- اللاحقة هي z و تعتبر أيضا صورة العدد المركب للنقطة $M(x\,;y)$

2) الخـــواص:

- إذا كان z معدوم: $x=0$ و $y=0$
- إذا كان z عدد حقيقي: $Im(z)=0$
- إذا كان z عدد تخيلي صرف (بحت): $Re(Z)=0$
- مرافق عدد مركب: $\mathbf{z = x + y.i}$ هو $\mathbf{\bar{z} = x - y.i}$

3) طويلة عدد مركب:

- حساب الطويلة:

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

- خواص الطويلة:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$
$$|z^n| = |z|^n$$
$$|\bar{z}| = |z|$$

4) عمدة عدد مركب:

- حساب العمدة:

$$\boxed{\theta = \mathrm{Arg}(z)}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

- خواص العمدة:

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$$
$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)$$
$$\mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}(z)$$
$$\mathrm{Arg}(\bar{z}) = \frac{1}{\mathrm{Arg}(z)} = -\mathrm{Arg}(z)$$

5) الكتابات:

الشكل الأسي	الشكل المثلثي	الشكل الجبري
$z = \lvert z\rvert e^{i\theta}$	$z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = x + y.i$

6) دستور موافر:

الشكل الأسي	الشكل المثلثي
$z^n = \lvert z\rvert^n e^{i\theta n}$	$z^n = \lvert z\rvert^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

7) **التفسيرات الهندسية:** A, B و C ثلاث نقاط لواحقها z_A, z_B و z_C على الترتيب:

المثلثات		الرباعيات	
ABC مثلث قائم في B	$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pm\pi}{2}$	ABCD مربع	$\left\lvert\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right\rvert=1$ و $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pm\pi}{2}$
ABC مثلث متساوي الساقين	$\left\lvert\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right\rvert=1$	ABCD مستطيل	$\left\lvert\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right\rvert\neq 1$ و $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pm\pi}{2}$
ABC متقايس الأضلاع	$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pm\pi}{3}$	ABCD معين	$\left\lvert\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right\rvert=1$ و $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)\neq\frac{\pm\pi}{2}$

خواص هندسية أخرى	الطريقة
الشعاع AB	$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$
النقاط A, B و C على استقامية	$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\in\mathbb{R}$ أو $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\pm\pi$
الشعاع AB و BC متعامدان	$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\in\mathbb{I}$ أو $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_A-z_B}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$
G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$	$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$
I منتصف القطعة [AB]	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

II. التحويلات النقطية:

1) **تعيين العناصر المميزة للتحويل انطلاقا من الكتابة المركبة:**

$$z'=az+b$$

$$M(z)\rightarrow M'(z')$$

الانسحاب		التحاكي		الدوران		التشابه المباشر	
a عدد حقيقي				a عدد مركب			
a=1		a ≠1		|a|=1		|a| ≠1	
لاحقته	b	نسبته	k=a	زاويته	$\theta=\mathrm{Arg}(a)$	نسبته	k=|a|
شعاعه	$\vec{V}(\mathrm{Re}(b);\mathrm{Im}(b))$	مركزه	$z_\Omega=\frac{b}{1-a}$	مركزه	$z_\Omega=\frac{b}{1-a}$	زاويته	$\theta=\mathrm{Arg}(a)$
						مركزه	$z_\Omega=\frac{b}{1-a}$

2) **تعيين الكتابة المركبة للتحويل انطلاقا من العناصر المميزة:**

الانسحاب		التحاكي		الدوران		التشابه المباشر	
$z'=z+z_{\vec{V}}$		$z'=k(z-z_\Omega)+z_\Omega$		$z'=e^{i\theta}(z-z_\Omega)+z_\Omega$		$z'=\alpha(z-z_\Omega)+z_\Omega$	
شعاع الانسحاب	$\vec{V}$	نسبته	k	زاويته	θ	α عدد مركب	k طويلته
		مركزه	Ω	مركزه	Ω		θ زاويته
						مركزه	Ω

ملاحظة: هناك حالة أخرى لتعيين الكتابة المركبة لتحويل نقطي وذلك بجملة معادلتين:

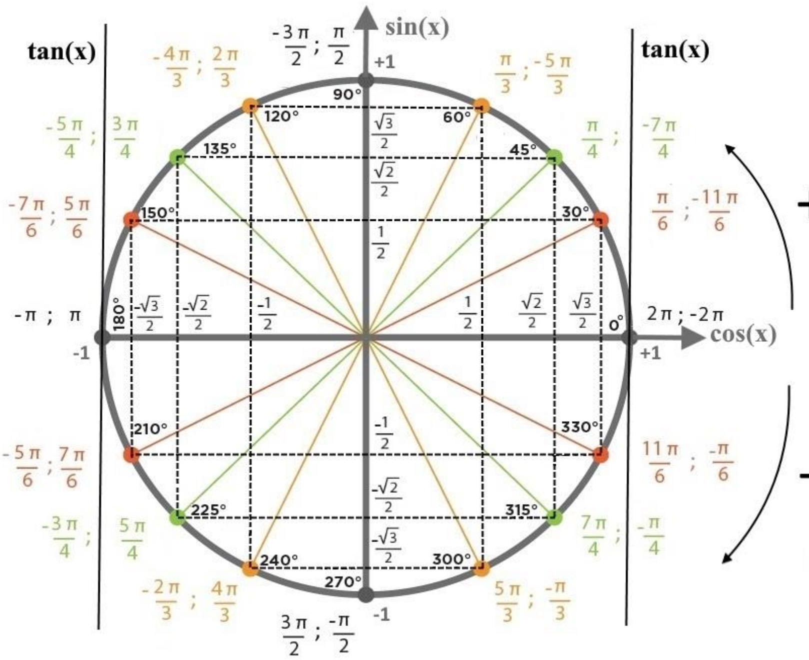
تحويل نقطي لنقطتين متحركتين	تحويل نقطي لنقطة متحركة ونقطة صامدة
$z_B = az_A + b$ $z_D = az_C + b$	$z_B = az_A + b$ $z_C = az_C + b$

III. تذكير حول الدوال المثلثية:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	0	-1
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	-1	0

الربع الأول
cos(x)>0
sin(x)>0
(+x)

الربع الثاني
cos(x)<0
sin(x)>0
(-x+ π)



الربع الثالث
cos(x)<0
sin(x)<0
(+x+ π)

الربع الرابع
cos(x)>0
sin(x)<0
(-x)

الشفعية	$\cos(-x) = \cos(x) \to$ زوجية	$\sin(-x) = -\sin(x) \to$ فردية
المحدودية	$\cos(x) \in [-1; 1]$	$\sin(x) \in [-1; 1]$
مجال التعريف	$x \in IR$	
اتجاه التغير	متناوبــة (التناوب بين التزايد والتناقص حسب المجال المحدد)	
الدورية	$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$	$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$
علاقة التحويل	$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	
علاقة التمديد	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
العلاقة بين جيب وجيب تمام	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
علاقة الجمع	$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$	$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
علاقة التضاعف	$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$	$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
علاقة الجداء	$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$	$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
	$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$	

$\mathbf{sin(x) = a}$	$\mathbf{sin(x) = sin(b)}$	$\mathbf{cos(x) = a}$	$\mathbf{cos(x) = cos\ (b)}$
$x = \sin^{-1}(a) + 2k\pi$ $x = \pi - \sin^{-1}(a) + 2k\pi$	$x = b + 2k\pi$ $x = \pi - b + 2k\pi$	$x = \cos^{-1}(a) + 2k\pi$ $x = -\cos^{-1}(a) + 2k\pi$	$x = b + 2k\pi$ $x = -b + 2k\pi$

<table>
<tr><th colspan="4">$\mathbf{acos(x) + bsin(x) = c}$</th><th></th></tr>
<tr><th colspan="2">الطريقة الثانية</th><th colspan="2">الطريقة الأولى</th><th></th></tr>
<tr><td>$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$</td><td>$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$</td><td>$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$</td><td>$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$</td><td>المرحلة الأولى:
إيجاد θ</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sin(x + \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$</td><td colspan="2">$\cos(x - \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$</td><td>المرحلة الثانية:
حل المعادلة</td></tr>
</table>

سلسلة التماريـن

I. عموميات حول الأعداد المركبة:

التمرين الأول: حل المعادلات التالية:

$$z^2 - 2z + 3 = 0$$
$$2iz + 3 = 4i + 5z$$
$$\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$$

التمرين الثاني: z_1 و z_2 عددان مركبان حيث:

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$$
$$z_2 = 1 - i$$

نضع: $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1) أكتب كل من z_1 , z_2 و Z على الشكل المثلثي ثم Z على الشكل الجبري
2) استنتج كل من $\cos\frac{\pi}{12}$ ثم $\sin\frac{\pi}{12}$
3) حل في R المعادلة: $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\text{cosx} + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\text{sinx} = 2$
   تعطى: $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
4) أحسب Z^{2004}

التمرين الثالث:

z, z', z'' ثلاث أعداد مركبة معرفة كما يلي :

$$z = (3 + \sqrt{3}) + (-3 + \sqrt{3})i \quad ; \quad z' = 3 + \sqrt{3}i \ ; \quad z'' = \frac{z}{z'}$$

حيث i عدد مركب طويلته 1 وعمدته $\frac{\pi}{2}$

1) أكتب z'' على الشكل الجبري
2) عين طويلة وعمدة كل من z' و z''
3) أحسب طويلة وعمدة z ثم استنتج $\cos\frac{-\pi}{12}$ و $\sin\frac{-\pi}{12}$
4) بين أن العدد $(z)^{1992}$ عدد حقيقي

التمريـن الرابع: المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

نعرف $P(z)$ حيث: $P(z) = \frac{z-3+i}{z+5-3i}$

1) حدد مجموعة التعريف $P(z)$
2) أكتب $P(z)$ على الشكل الجبري
3) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة:
   أ- $P(z)$ عدد حقيقي
   ب- $P(z)$ تخيلي صرف
   ج- $|P(z)|=1$
4) عين مجموعة النقط التي تحقق: $|\bar{z} - 3 + i| = 1$

التمريــن الخامس:

1) حل في C المعادلة: $\left(z-3+3\sqrt{3}\right)\left(z^2-6z+18\right)=0$

نسمي z_1 العدد الحقيقي و z_2 الحل الذي جزءه الخيلي سالب و z_3 الحل الآخر

2) النقط A, B وC صور الحلول z_1 , z_2 و z_3 على الترتيب:

أ- عين طويلة وعمدة العدد المركب z حيث: $z=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$

ب- ما طبيعة المثلث ABC

التمريــن السادس:

لتكن في C المعدلة (E) حيث: $z^3-12z^2+48z-128=0$

1) تحقق أن العدد 8 حل للمعادلة (E)
2) حلل المعادلة (E) إلى جداء عاملين
3) حل في C المعادلة (E) حيث:
   - Z_1 العدد المركب الذي جزءه التخيلي سالب
   - Z_2 العدد المركب الذي جزءه التخيل موجب
   - Z_3 الحل الآخر
4) أكتب كل من الأعداد المركبة: z_1 , z_2, z_3 على الشكل المثلثي والشكل الأسي
5) علم النقط A, B, C ذات اللواحق z_1 , z_2, z_3 على الترتيب
6) أوجد طويلة وعمدة العدد المركب: $z=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين السابع:

ليكن كثير الحدود: $F(z)=[(i-1)z+1][iz^2+(2+i)z+1-i]$

1) تحقق أن $z_1=i$ هو جذر للمعادلة $iz^2+(2+i)z+1-i=0$ ثم استنتج الجذر الثاني z_2
2) عين حلول المعادلة $F(z)=0$
3) أكتب كل من z_2 و z_3 على الشكل المثلثي
4) بين أن $\left(z_1^{2000}+z_2^{2000}+z_3^{2000}\right)$ عدد حقيقي
5) النقط A, B وC ذات اللواحق z_1, z_2, $2z_3$ على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس، أثبت أن النقاط الثلاث على استقامة واحدة
6) D نقطة من المستوي لاحقتها $z_4=2+3i$ أوجد H مرجح الجملة $\{(B\,;1)\,;(C\,;1)\,;(D\,;2)\}$
7) عين مجموعة النقط حيث: $|z-z_2|^2+|z-2z_3|^2+2|z-z_4|^2=14$

التمرين الثامن:

I. z عدد مركب حيث: $z=-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

1) أحسب z^2 ثم z^4
2) عين طويلة وعمدة العدد z^4
3) استنتج طويلة وعمدة العدد المركب z
4) استنتج قيمتي كلا من: $\cos\frac{25\pi}{24}$ ثم $\sin\frac{25\pi}{24}$

II. α عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi\,;+\pi[$

1) حل في C المعادلة ذات المجهول z حيث: $z^2-2\alpha\cos\theta.z+\alpha^2=0$
2) أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي
3) أحسب العدد A_n حيث: $A_n=z_1^{\,n}+z_2^{\,n}$

II. التحويلات النقطية:

التمرين التاسع: عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويلات النقطية التالية:

$$z' = z - 4 + 5i$$
$$z' = \frac{-3i}{2}z - 1 + 2i$$
$$z' = 3z - 1 + 2i$$
$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z + 4$$

التمرين العاشر:

- (T) دوران مركزه $A(2\,;-3)$ و زاويته $\theta = \frac{3\pi}{2}$
- (F) تحاكي مركزه $A(-1\,;3)$ و نسبته $k = 3$
- (H) تشابه مركزه $A(-3\,;0)$ و زاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ و نسبته $k = 4$

1) أوجد العبارة المركبة لكل تحويل نقطي
2) أوجد لاحقة S' صورة $S(4\,;5)$ بواسطة الدوران (T)
3) أوجد صورة المستقيم (Δ): $6x-3y=0$ بواسطة التحاكي (F)

التمرين الحادي عشر: المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط A, B, C وD التي لواحقها:

$$z_D = 3 + 2i \qquad z_C = -3 - \frac{1}{4}i \qquad z_B = \overline{z_A} \qquad z_A = \frac{3}{2} + 6i$$

$\vec{\omega}$ شعاع الذي لاحقته: $z_{\vec{\omega}} = -1 + \frac{5}{2}i$

1) عين z_Q لاحقة Q صورة B بالانسحاب (T) الذي شعاعه $\vec{\omega}$
2) عين z_R لاحقة R صورة D بالتحاكي (H) الذي مركزه C ونسبته $\frac{-1}{3}$
3) عين z_S لاحقة S صورة D بالدوران (R) الذي مركزه A وزاويته $\frac{-\pi}{2}$
4) أحسب النسبة $\frac{z_R - z_Q}{z_D - z_Q}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $DQRS$
5) تحقق أن النقط D، Q، R وS تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها ثم تعيين معادلتها

التمرين الثاني عشر:

نعتبر كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1) بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلين تخيليان صرفان z_A و z_B
2) أكتب $P(z)$ على شكل جداء عاملين من الدرجة الثانية
3) حل في C المعادلة $P(z)=0$
   - Z_A العدد المركب الذي جزءه التخيلي موجب
   - Z_B العدد المركب الذي جزءه التخيلي سالب
   - Z_C العدد المركب الذي جزءه التخيلي موجب
   - Z_D العدد المركب الذي جزءه التخيلي سالب
4) بين أن النقط A, B وC تنتمي إلى نفس الدائرة
5) أوجد احداثيتي E نظيرة D بالنسبة إلى O
6) أحسب النسبة $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ ثم عين طبيعة المثلث BEC
7) عين العبارة المركبة للدوران الذي يحول A إلى B ويحول C إلى D
8) عين العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه H ذو اللاحقة $z_H=-3$ ونسبته 2
9) عين C صورة E بواسطة الدوران بالاعتماد على السؤال السادس

التمرين الثالث عشر: المستوي منسوب إلى معلم $(O, \vec{U}, \vec{V})$ والنقاط A, B وC التي لواحقها:

$z_A = -i$ $\quad$ $z_B = 2 + 3i$ $\quad$ $z_C = -4 + i$

1) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب α حيث $\alpha = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

2) ما طبيعة المثلث ABC

3) (T) تحويل نقطة يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z, النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = iz - 1 - i$$

أ- عين طبيعة التحويل (T) وعناصره المميزة

ب- ماهي صورة النقطة B بالتحويل (T)

4) لتكن D النقطة ذات اللاحقة: $z_D = -6 + 2i$

أ- بين أن النقط A, C وD على استقامة واحدة

ب- عين نسبة التحاكي (H) الذي مركزه A ويحول C إلى D

ج- عين العناصر المميزة للتشابه (S) الذي مركزه A ويحول B إلى D

نتائج التمارين

I. عموميات حول الأعداد المركبة:

التمرين الأول:

- $z_1 = 1+\sqrt{2}\,;\ z_2 = 1-\sqrt{2}$
- $z = \frac{23}{29} - \frac{14}{19}i$
- $z = \frac{15}{8} + \frac{8}{3}i\,;\ \bar{z} = \frac{15}{8} - \frac{8}{3}i$

التمرين الثاني:

$z_1 = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right))$

$z_2 = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right))$

$Z = 1(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right))$

$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$S=\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi; \frac{-\pi}{4} + 2k\pi\}\ ;\ Z^{2004} = -1$

التمرين الثالث:

$z'' = \frac{z}{z'} = 1 - i$

$|z'| = 2\sqrt{3}\ ;\ Arg(z') = \frac{\pi}{6}$

$|z''| = \sqrt{2}\ ;\ Arg(z'') = \frac{-\pi}{4}$

$|z| = 2\sqrt{6}\ ;\ Arg(z) = \frac{-\pi}{12}$

$Z = 2\sqrt{6}(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right))$

$\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{12}\ ;\ \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$Z^{1992} = (2\sqrt{6})^{1992}$

التمرين الرابع:

$(x;y) \neq (-5;3)$

$p(z) = \frac{x^2+y^2+2x-2y-18}{(x+5)^2+(y-3)^2} + \frac{4x+8y-4}{(x+5)^2+(y-3)^2}i$

$Im(p(z)) = 0 \Rightarrow (\Delta): 4x+8y-4 = 0$

مجموعة النقط M هي معادلة المستقيم (Δ) ماعدا النقطة $(-5;3)$

$Re(p(z)) = 0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-1)^2 = 20$

دائرة مركزها $\omega(-1;1)$ ونصف قطارها $r=\sqrt{20}$ ماعدا $(-5;3)$

$|p(z)| = 1 \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$

معادلة ديكارتية لمستقيم مجموعة نقطة M ماعدا $(-5;3)$

$|\bar{z} - 3 + i| = 1 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2 = 1$

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $S(3;1)$ ونصف قطارها $r=1$

التمرين الخامس:

$z_1 = 3 - 3\sqrt{3}\ ;\ z_2 = 3 - 3i\ ;\ z_3 = 3 + 3i$

$z = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|z| = 1\ ;\ Arg(z) = \frac{\pi}{3}$

المثلث ABC متقايس الأضلاع

التمرين السادس:

$Z = 8 \Rightarrow f(8) = 0$

$f(z) = (z-8)(z^2-4z+16)$

$z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i; z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i\ ;\ z_3 = 8$

$z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) = 4e^{\frac{-\pi}{3}i}$

$z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$

$z_3 = 8(\cos(0) + i\sin(0)) = 8e^0$

$z = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|z| = 1\ ;\ Arg(z) = \frac{\pi}{3}$

المثلث ABC متقايس الأضلاع

التمرين السابع:

$f(i) = 0$

$z_1 = i\ ;\ z_2 = -1 + i\ ;\ z_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$\left\{\begin{array}{l} {z_1}^{2000} = 1 \\ {z_2}^{2000} = 2^{2000} \\ {z_3}^{2000} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2000} \end{array}\right. \Rightarrow {z_1}^{2000} + {z_2}^{2000} + {z_3}^{2000} \in IR$$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -1 \in IR$

$z_H = \frac{z_B + z_C + 2z_D}{4} = 1 + 2i\ ;\ H(1;2)$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها H(1;2) ونصف قطارها r=1

التمرين الثامن:

$z^2 = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} + 2i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$z^4 = 8\sqrt{3} + 8i$

$|z^4| = 16\ ;\ Arg(z^4) = \frac{\pi}{6}$

$$\left\{\begin{array}{l} |z| = \sqrt[4]{16} = 2\ ;\ Arg(z) = 4\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \theta = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow S = \{\frac{\pi}{24}; \frac{13\pi}{24}; \boxed{\frac{25\pi}{24}}; \frac{37\pi}{24}\} \end{array}\right.$$

$z = 2\left(\cos\left(\frac{25\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{25\pi}{24}\right)\right)$

$z_1 = \alpha\cos(\theta) - \alpha\sin(\theta)i;\ z_2 = \alpha\cos(\theta) + \alpha\sin(\theta)i$

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = \alpha\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \alpha e^{-\theta i} \\ z_2 = \alpha\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \alpha e^{\theta i} \end{array}\right.$$

$A_n = 2\alpha^n\cos(n\theta)$

II. التحويلات النقطية:

التمريـن التاسع:

- $z' = 3z - 1 + 2i$

$a = 3$

$b = -1 + 2i$

$\begin{cases} k = 3 \\ z_\Omega = \frac{1}{2} - i\,;\ \Omega(\frac{1}{2}; -1) \end{cases}$ ⇐ إذن هو تحاكي

- $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z + 4$

$|a| = 1$

$z_\Omega = 2 - \left(2 + 2\sqrt{2}\right)i\,;$

$\begin{cases} \Omega(2; -2 - 2\sqrt{2}) \\ \theta = \arg(a) = \frac{-\pi}{4} \end{cases}$ ⇐ إذن هو دوران

- $z' = z - 4 + 5i$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 + 5i \end{cases}$

$\vec{V}(-4; 5)$ ⇐ إذن هو انسحاب

- $z' = \frac{-3}{2}iz - 1 + 2i$

$a = \frac{-3}{2}i$

$b = -1 + 2i$

$\begin{cases} |a| = k = \frac{3}{2} \neq 1 \\ z_\Omega = \frac{8}{13} + \frac{14}{13}i;\ \Omega(\frac{8}{13}; \frac{14}{13}) \\ \theta = \arg(a) = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ ⇐ إذن هو تشابه

التمريـن العاشر:

$(T): z' = -iz + (5 - i)$

$(F): z' = 3z + (2 - 6i)$

$(H): z' = 4iz + (12i - 3)$

$z_S{}' = 10 - 5i$

$2x' - y' - 10 = 0$

التمريـن الحادي عشر:

$z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i \Rightarrow Q(\frac{1}{2}; -\frac{7}{2})$

$z_R = -5 - i \Rightarrow R(-5; -1)$

$z_S = \frac{-5}{2} + \frac{9}{2}i \Rightarrow S(\frac{-5}{2}; \frac{9}{2})$

$\frac{z_R - z_Q}{z_D - z_Q} = i \Rightarrow |i| = 1; \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

$[DR]=[SQ]= |z_R - z_D| = |z_Q - z_S| = \sqrt{73}$

إذن إن الرباعي DQRS مربع

$(x + 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{73}{4}$

التمريـن الثاني عشر:

$z_A = \sqrt{3}i\,;\ z_B = +\sqrt{3}i$

$P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$

$z_C = 3 + 2\sqrt{3}i\,;\ z_D = 3 - 2\sqrt{3}i$

$\begin{cases} \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1; \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$

I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC (مركز ثقله/مرجح)

$z_I = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}i \Rightarrow I(1; \frac{2\sqrt{3}}{3})$

$z_E = -3 + 2\sqrt{3}i \Rightarrow E(-3; 2\sqrt{3})$

$\begin{cases} \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = 1; \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = \frac{-\pi}{3} \end{cases}$

المثلث BEC متقايس الأضلاع

عبارة الدوران: $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{-3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$

عبارة التحاكي: $z' = 2z + 3$

$z_C = e^{-\frac{\pi}{3}i}(z_E - z_B) + z_B$

E هي صورة C بواسطة الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{-\pi}{3}$

التمريـن الثالث عشر:

$\alpha = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i; |\alpha| = 1; \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2}$

المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

$\alpha^n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right))$

$\mathrm{Im}(\alpha^n) = 0 \Rightarrow \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow n = 2k + 1$

$z_I = -1 + 2i$

$||\overrightarrow{MI}|| = \frac{||\overrightarrow{CB}||}{4}$

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $r = \frac{CB}{4}$

$z' = iz - 1 - i;\ a = i; b = -1 - i$

$|a| = 1;\ z_\Omega = -i \Rightarrow \Omega(0; -1); \arg(a) = \frac{\pi}{2}$

(T) دوران مركزه $\Omega(0; -1)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$z'_B = -4 + i \Rightarrow B'(-4; 1)$

$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{2}{3} \in R$

$(H): z' = \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}i$

$(S): z' = \frac{3}{2}iz + \left(\frac{-3}{2} - i\right) \Rightarrow |a| = k = \frac{3}{2};$

$\theta = \frac{\pi}{2}; A(6; -1)$