كل ما تحتاج في هذا المحور

1) **عدد عناصر مجموعة Cardinal:** يكتب على الشكل:

$card(A)$ = عدد عناصر المجموعة A

2) **حســاب احتمــال حادثة:** من أجل المجموعة الشاملة E يكون لدينا من أجل كل حادثة A:

$$P(A)=\frac{card(A)}{card(E)}$$

3) **خواص الاحتــمــالات:**

الخاصــية	لـــغة الحــوادث
$0 \leq P(A) \leq 1$	A حادثة كيفية
$P(A)=1$	A حادثة أكيدة
$P(A)=0$	A حادثة مستحيلة
$P(\overline{A})= 1-P(A)$	$\overline{A}$ حادثة عكسية لـA
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)- P(A\cap B)$	A و B كيفيتان
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	A و B غير متلائمتان
$P(A\cap B)=P(A).P(B)$	A و B حادثتين مستقلتين

4) **الاحتمـــالات الشرطية (غير مقررة في برنامج التقني رياضي) :**

لتكن A حادثة من مجموع المخارج E حيث $P(A)\neq 0$ نعرف على E احتمالا جديدا يرمز له بالرمز $P(A)$ حيث من أجل كل حادثة B تكتب:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

حيث $P_A(B)$ يسمى الاحتمال الشرطي علما أن A محققة وتقرأ "احتمال B علما أن A محققة"

5) **المتـــغير العشـــوائي:**

- تعريفه: E المجموعة الشاملة لتجربة عشوائية حيث نسمي المتغير العشوائي X كل دالة عددية معرفة على I **(مجموعة قيم X)**
- قانون احتماله: هو الدالة المعرفة على I والتي ترفق بكل قيمة x_i يكون فيه الاحتمال $P(X=x_i)$ حيث $\mathbf{0 \leq P(X) \leq 1}$
- أمله الرياضياتي: $\mathbf{E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i}$
- تباينه: $\mathbf{V(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(x))^2 P_i = [\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 P_i] - E(x)^2}$
- انحرافه المعياري: $\mathbf{\sigma(x)=\sqrt{V(x)}}$

6) **مخطط الاحــتمــالات:** وهو شجرة الاحتمالات القائمة على مبدئين أساسيين:

- مجموع الأغصان المتقابلة هو 1
- نسبة احتمال الغصن هو جداء تفرع الأغصان التي سبقته

7) **العـــد:**

العد	التبديلة	القائمة	الترتيبة	التوفيقة
القانون	n!=nx(n-1)x…x2x1	n^p	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$
حالات خاصة	$1! = 1$ $0! = 1$	/	$A_1^0 = 1$ $A_1^1 = 1$	$C_n^n = C_1^0 = 1$ $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
الآلة الحاسبة	/	/	nPp	nCp
الهدف	عدد الوضعيات الممكنة لمجموعة معرفة	- لتشكيل أعداد (أرقام) تتكرر - السحب على **التوالي بإرجاع**	- تشكيل أعداد (أرقام) لا تتكرر - تشكيل لجان من مهام محددة - سحب من كيس على **التوالي دون ارجاع**	- تشكيل لجان من مهام غير محددة - سحب من كيس في **آن واحد**
الترتيب	يهم الترتيب			**لا يهم الترتيب**
العناصر	**كل العناصر مستعملة**	ليست كل العناصر مستعملة		
التكرار	لا يوجد تكرار للعناصر	يوجد تكرار للعناصر	لا يوجد تكرار للعناصر	

8) **دستور ثنائي الحد:** إذا كان a و b عددان حقيقيان غير معدومان و $n \in \mathbb{N}^*$ فإنه يكون:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

سلسلة التمارين

التمرين الأول: نرمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : "ظهور عدد زوجي"

B : "ظهور عدد فردي"

C : "ظهور عدد أولي"

هل الحوادث السابقة A و B مستقلة عن C ؟ و هل هي متلائمة؟

التمرين الثاني: إذا كانت A و B حادثتين مستقلتين حيث $P(A)=0,5$ و $P(B)=0,3$

(1 أحسب $P(A\cap B)$ و $P(A\cup B)$

(2 استنتج $P(\overline{B})$ و $P(\overline{A\cap B})$

التمريـــن الثالث: الجدول التالي يعطي توزيع 500 تلميذ في إحدى الثانويات:

التلميذ	ذكور	اناث
التلميذ يملك هاتف نقال	60	240
التلميذ لا يملك هاتف نقال	120	80

نختار تلميذا عشوائيا من الثانوية ونسمي الحوادث التالية:

H : "التلميذ المختار ذكر"

F : "التلميذ المختار أنثى"

S : " التلميذ يملك هاتفا نقالا"

$\overline{S}$: " التلميذ لا يملك هاتفا نقالا"

1) شكل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة

2) أحسب احتمال كل الحوادث التالية:

أ- التلميذ المختار أنثى وتملك هاتفا نقالا

ب- التلميذ المختار لا يملك هاتفا نقالا

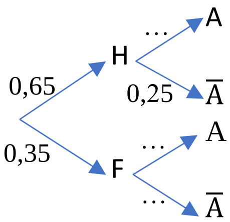
التمريـــن الرابع: يتكون مجتمع من 35% نساء و65% رجال حيث أن 45% من النساء يتحدثن لغة أجنبية و25% من الرجال أيضا. نختار عشوائيا شخصا من هذا المجتمع ونعتبر الحوادث التالية:

H : "الشخص المختار رجل"

F : "الشخص المختار امرأة"

A : "الشخص المختار يتحدث لغة أجنبية"

$\overline{A}$: "الشخص المختار لا يتحدث لغة أجنبية"



1) أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها

2) أحسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

أ- رجل يتحدث لغة أجنبية

ب- امرأة لا تتحدث لغة أجنبية

ج - شخص يتحدث لغة أجنبية

3) أحسب احتمال أن يكون الشخص المختار امرأة علما أنه يتحدث لغة أجنبية

التمريـــن الخامس: مصنع سيارات يشتغل بوحدتين A و B حيث ينتج نوعين من السيارات احداهما تسير بالبنزين يرمز إليها بـE وأخرى بغير البنزين $\overline{E}$.

ربع انتاج هذا المصنع هو الوحدة A

اشترى شخص سيارة من انتاج هذا المصنع، احتمال أن تكون هذه السيارة من صنع الوحدة A وتسير بالبنزين يساوي $\frac{1}{6}$

واحتمال أن تكون من صنع الوحدة B وتسير بالبنزين يساوي $\frac{3}{8}$

1) بين أن احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علما أنها من صنع الوحدة A يساوي $\frac{2}{3}$

2) أحسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علما أنها من صنع الوحدة B

3) أ- أحسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين
ب- علما أن السيارة تسير بالبنزين ما احتمال أن تكون من صنع الوحدة A؟
4) أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية
(تعطى كل النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال)

التمرين السادس:

كيس يحتوي على 12 كرة منها 3 حمراء, 4 خضراء و5 سوداء ثم نسحب عشوائيا 3 كريات على التوالي بإرجاع

1) أحسب عدد الحالات لهذا السحب
2) أحسب احتمال كل من الحوادث التالية:

A : "الحصول على 3 كريات من نفس اللون"
B : "الحصول على 3 كرات مختلفة اللون"
C : "الحصول على كريتين من نفس اللون"
D : "الحصول على الأقل كريتين حمراوين"
E : "الحصول على الأكثر كرة خضراء"

3) أعد كل الأسئلة السابقة إذا كان سحب الكريات الثلاث:
- على التوالي دون ارجاع
- في آن واحد

التمرين السابع:

الرقم السري لبطاقة بنكية عبارة عن عدد مكون من أربع أرقام مأخوذة من المجموعة $\{9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1\}$

1) كم من رقم سري يمكن تشكيله؟
2) الرقم السري مختار بطريقة عشوائية عن طريق الكمبيوتر، أحسب احتمال كل من الحوادث التالية:
- الحادثة A: "الرقم السري عبارة عن عدد زوجي"
- الحادثة B: "الرقم السري مكون من الأرقام الزوجية فقط"
3) إذا علمنا أن الرقم السري لإحدى الزبائن مكون من أربع أرقام مختلفة أحسب عدد الأرقام السرية المحتملة

التمرين الثامن:

نرمي قطعة نقدية غير مزيفة 3 مرات متتابعة وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بعدد ظهور الأوجه

1) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X
2) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X
3) أحسب الأمل الرياضياتي $E(x)$
4) أحسب التباين والانحراف المعياري للمتغير X

التمرين التاسع: نشكل مجلس استشاري مكون من 4 أعضاء مختارين بين 7 رجال و5 نساء

1) ما هو عدد المجالس التي يمكن تشكيلها
2) أحسب احتمال الحوادث التالية:
- الحادثة A:"المجلس مكون من الرجال فقط"
- الحادثة B:"المجلس مكون من امرأة فقط"
- الحادثة C:"المجلس مكون من امرأة على الأقل"
- الحادثة D:"المجلس مكون من أربعة أعضاء من نفس الجنس"

إذا كان اختيار الأعضاء يكون بطريقة عشوائية نعتبر المتغير العشوائي $X=4-\alpha$ حيث α يمثل عدد النساء في المجلس الاستشاري

3) جد قيم المتغير العشوائي X ثم عين قانون احتماله
4) أحسب الانحراف المعياري

التمرين العاشر: يحتوي كيس على 10 كرات منها 6 بيضاء تحمل الأرقام $\{7; 6; 5; 4; 3; 2\}$ و4 كرات حمراء تحمل الأرقام $\{8; 7; 6; 5\}$ ثم نسحب كريتين من الكيس في آن واحد

1) أحسب احتمال كل من الحادثتين:
- الحادثة A: "سحب كريتين من لونين مختلفين"
- الحادثة B: "سحب كريتين تحملان عددين زوجيين"
2) أحسب احتمال سحب كريتين بيضاوين علما أنهما تحملان عددين زوجيين

التمرين الحادي عشر: يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس منها 4 كريات بيضاء مرقمة بـ $\{1; 2; 2; 3\}$ وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ $\{2; 2; 3\}$ وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ $\{2; 3; 3\}$
نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق ونعتبر الحادثتين:

A : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني

B : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم"

1) أ- أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب

ب- بين أن $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا
عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني عشر: كيس به 7 كريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس منها 3 بيضاء و4 خضراء
نسحب كريتين عشوائيا على التوالي بإرجاع من الكيس

1) أ- أحسب احتمال الحادثة A: "سحب كريتين مختلفتين في اللون"

ب- أحسب احتمال الحادثة B: "سحب كريتين من نفس اللون"

2) نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب α DA فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على 100DA وإذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على 50DA أما إذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه. ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α

أ- بين أن قيم المتغير العشوائي هي $\{-\alpha ; 50-\alpha ; 100-\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله

ب- بين أن الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X بدلالة α هو: $E(x)=-\alpha+\frac{300}{7}$

ثم جد أكبر قيمة ممكنة لـα حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب

التمرين الثالث عشر: كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:
خمس كريات حمراء مرقمة بـ :1,1,2,2,2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ 3-,3,2 وكرية بيضاء مرقمة بـ 1-
نسحب عشوائيا 4 كريات على التوالي دون إرجاع

1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على أربع كريات من نفس اللون"

B : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر"

C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم"

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله

ب- أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

جـ- أحسب احتمال الحادثة: "$X^2-X>0$"

نتائـج التماريـن

التمريــن الأول:

$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{1}{2}$

التمريــن الثاني:

$P(A\cap B)= P(A).P(B) = 0,15$

$P(A\cup B)= P(A) + P(B) - P(A\cap B)=0,65$

$P(\bar{B})=1- P(B)=0,7$

$P(\overline{A\cap B})=1- P(A\cap B)=0,85$

التمريــن الثالث:

$P(F\cap S)= \frac{12}{25}$

$P(\bar{S})=P(H\cap \bar{S})+P(F\cap \bar{S})= \frac{2}{5}$

التمريــن الرابع:

$P(H\cap A)=0,1625$

$P(F\cap \bar{A}) =0,1925$

$P(A)= P(H\cap A)+P(F\cap A)=0,32$

$P_A(F) = \frac{P(A\cap F)}{P(A)} = \frac{63}{128}$

التمريــن الخامس:

$P(A)= \frac{1}{4}$; $P(B)= \frac{3}{4}$

$P(A\cap E)= \frac{1}{6}$; $P(B\cap E)= \frac{3}{8}$

$P_A(E) = \frac{P(A\cap E)}{P(A)} = \frac{2}{3}$

$P_B(E) = \frac{P(B\cap F)}{P(B)} = \frac{1}{2}$

$P(E)= P(A\cap E)+ P(B\cap E)= \frac{13}{24}$

$P_E(A) = \frac{P(E\cap A)}{P(E)} = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{4}{13}$

التمريــن السادس:

- التوالي بإرجاع:

$12^3=6561$

$P(A)= \frac{3^3 1!+4^3 1!+5^3 1!}{12^3} = \frac{1}{8}$

$P(B)= \frac{(3^1.4^1.5^1)3!}{12^3} = \frac{5}{24}$

$P(C)= \frac{(3^2 9)3+(4^2 8)3+(5^2 7)3}{12^3} = \frac{2}{3}=1-P(A)-P(B)$

$P(D)= \frac{(3^2 9)3+(3^3)1!}{12^3} = \frac{5}{32}$

$P(E)= \frac{(8^2 4)3+8^3 1!}{12^3} = \frac{20}{27}$

- التوالي دون ارجاع:

$A_{12}^3=1320$

$P(A)= \frac{A_3^3 1!+A_4^3 1!+A_5^3 1!}{A_{12}^3} = \frac{3}{44}$

$P(B)= \frac{(A_3^1.A_4^1.A_5^1)3!}{A_{12}^3} = \frac{3}{11}$

$P(C)= \frac{(A_3^2 A_9^1)3+(A_4^2 A_8^1)3+(A_5^2 A_7^1)3}{A_{12}^3} = \frac{29}{44}=1-P(A)-P(B)$

$P(D)= \frac{A_3^2 A_9^1 3+A_3^3 1!}{A_{12}^3} = \frac{19}{220}$

$P(E)= \frac{A_4^1 A_8^2 3+A_8^3 1!}{A_{12}^3} = \frac{42}{55}$

- في آن واحد:

$C_{12}^3=220$

$P(A)= \frac{C_3^3+C_4^3+C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{3}{44}$

$P(B)= \frac{C_3^1.C_4^1.C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{3}{11}$

$P(C)= \frac{C_3^2 C_9^1+C_4^2 C_8^1+C_5^2 C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{29}{44}=1-P(A)-P(B)$

$P(D)= \frac{C_3^2 C_9^1+C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{7}{55}$

$P(E)= \frac{C_4^1 C_8^2+C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{42}{55}$

التمريــن السابع:

$9^4=6561$

$P(A)= \frac{4}{9}$; $P(B)= \frac{256}{6561}$

$A_9^4=3024$

التمريــن الثامن:

$X \in \{0; 1; 2; 3\}$

$P(X=0)= \frac{1}{8}$; $P(X=1)= \frac{3}{8}$

$P(X=2)= \frac{3}{8}$; $P(X=3)= \frac{1}{8}$

$E(X)= \frac{3}{2}$; $V(X)= \frac{3}{4}$; $\sigma(X)= \frac{\sqrt{3}}{2}$

التمريــن التاسع:

$C_{12}^4 = 495$

$P(A)= \frac{C_7^4}{C_{12}^4} = \frac{7}{99}$

$P(B)= \frac{C_5^1 C_7^3}{C_{12}^4} = \frac{35}{99}$

$P(C)= \frac{C_5^1 C_7^3+C_5^2 C_7^2+C_5^3 C_7^1+C_5^4}{C_{12}^4} = \frac{92}{99}$

$P(D)= \frac{C_7^4+C_5^4}{C_{12}^4} = \frac{8}{99}$

$X \in \{0 ;1 ;2 ;3 ;4\}$

$P(X=0)= \frac{C_5^4}{C_{12}^4} = \frac{1}{99}$

$P(X=1)= \frac{C_5^3 C_7^1}{C_{12}^4} = \frac{14}{99}$

$P(X=2)= \frac{C_5^2 C_7^2}{C_{12}^4} = \frac{14}{33}$

$P(X=3)= \frac{C_5^1 C_7^3}{C_{12}^4} = P(B) = \frac{35}{99}$

$P(X=4)= \frac{C_7^4}{C_{12}^4} =P(A) = \frac{7}{99}$

$E(X)= \frac{7}{3}$; $V(X)= \frac{70}{99}$; $\sigma(X)=\sqrt{\frac{70}{99}} = \frac{\sqrt{770}}{33}$

التمريـن العاشر:

$C_{10}^2=45$

P(A)= $\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$

P(B)= $\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9}$

$$P_B(C)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=\frac{\frac{C_3^2}{C_{10}^2}}{\frac{C_5^2}{C_{10}^2}}=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$$

التمريـن الحادي عشر:

$C_{10}^3=120$

P(A)= $\frac{C_4^1C_3^1C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$

P(B)= $\frac{C_5^3+C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{60}$

P(A ∩ B)= $\frac{C_2^1C_2^1C_1^1+C_1^1C_1^1C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$

$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{6}$

P(A∪B)= $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{11}{30}$

X ∈{0 ;1 ;2 ;3}

P(X=0)= $\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$

P(X=1)= $\frac{C_5^1C_5^2}{C_{12}^4}=\frac{5}{12}$

P(X=2)= $\frac{C_5^2C_5^1}{C_{12}^4}=\frac{5}{12}$

P(X=3)= $\frac{C_5^3}{C_{12}^4}=\frac{1}{12}$

E(X)= $\frac{3}{2}$

التمريـن الثاني عشر:

$7^2=49$

P(A)= $\frac{3^1 4^1\times 2!}{7^2}=\frac{24}{49}$

P(B)= $1-P(A)=\frac{3^2\times1+4^2\times1}{7^2}=\frac{25}{49}$

X ∈{100-α ;50-α ;-α}

P(X=100-α)= $\frac{3^2\times1}{7^2}=\frac{9}{49}$

P(X=50-α)=P(A)= $\frac{3^1 4^1\times 2!}{7^2}=\frac{24}{49}$

P(X=-α)= $\frac{4^2\times1}{7^2}=\frac{16}{49}$

E(X)= $\frac{-49\alpha+2100}{49}=-\alpha+\frac{300}{7}$

E(X)>0→ $0<\alpha<\frac{300}{7}$

التمريـن الثالث عشر:

$A_9^4=3024$

P(A)= $\frac{A_5^4\times1}{A_9^4}=\frac{5}{126}$

P(B)= $\frac{A_1^1A_8^3\times4+A_8^4\times1}{A_9^4}=1$

P(C)= $\frac{A_1^1A_1^1A_4^2\times12+A_1^1A_1^1A_1^1A_2^1\times4!}{A_9^4}=\frac{4}{63}$

X ∈{0 ;1 ;2 ;3}

P(X=0)= $\frac{A_3^3A_6^1\times4}{A_9^4}=\frac{1}{21}$

P(X=1)= $\frac{A_3^2A_6^2\times6}{A_9^4}=\frac{5}{14}$

P(X=2)= $\frac{A_3^1A_6^3\times4}{A_9^4}=\frac{10}{21}$

P(X=3)= $\frac{A_6^4\times1}{A_9^4}=\frac{5}{42}$

E(X)= $\frac{5}{3}$

X^2-X>0→ X ∈{2 ;3}

P(X^2-X>0)=P(X=2)+P(X=3)= $\frac{25}{42}$