كل ما تحتاج في هذا المحور

1) اتــجاه تـــغير متـــتـــالــية:

الاثبـــات	اتــجــاه التغــير
$U_{n+1}-U_n>0$	متتالية متزايدة (U_n)
$U_{n+1}-U_n<0$	متتالية متناقصة (U_n)
$U_{n+1}-U_n=0$	متتالية ثابتة (U_n)

2) المــــحـــدودية:

- إذا كانت $U_n<a$ فإن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد a
- إذا كانت $U_n>a$ فإن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد a

3) تقـــارب متـــتـــالــية:

أ- متقاربة:

- إذا كانت (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى
- إذا كانت (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل
- إذا كانت: $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ حيث l عدد ثابت

ب- متباعدة: إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

4) الاستــــدلال بالتـــراجع:

نستعمل نظرية البرهان بالتراجع لإثبات صحة خاصية $P(n)$ حيث يكون $n\in\mathbb{N}$ أو $n\in\mathbb{N}^*$

- المرحلة الأولى: نأخذ أصغر قيمة للعدد n
- المرحلة الثانية: لإثبات صحة $P(n)$ يكفي أن نبرهن صحة $P(n+1)$ وذلك يكون بفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

المتتـــالـــيات العدديـــة				
المتتـــاليـــات هندسيـــة		**المتتـــاليـــات الحسابيـــة**		**طبيـــعة**
$U_{n+1}=U_n x q$		$U_{n+1}=U_n+r$		**تعريـــف**
q : الأساس الهندسي		r : الأساس الحسابي		**الأســـاس**
$U_\alpha=U_\beta \times q^{\alpha-\beta}$		$U_\alpha=U_\beta+(\alpha-\beta)r$		**علاقة بين حدين**
$U_n=U_0 \times q^{n-0}$: الحد الأول U_0		$U_n=U_0+(n-0)r$: الحد الأول U_0		**الحـــد العام U_n**
$U_n=U_1 \times q^{n-1}$: الحد الأول U_1		$U_n=U_1+(n-1)r$: الحد الأول U_1		
a, b و c ثلاث حدود متتابعة وسطها الهندسي : $axc=b^2$		a, b و c ثلاث حدود متتابعة وسطها الحسابي : $a+c=2b$		**الوســـط**
رتبة الحد الأخير – رتبة الحد الأول +1				**عدد الحـــدود**
$S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$				**المجمـــوع S_n**
$S_n=$ الحد الأول $\times \frac{q^{\text{عدد الحدود}}-1}{q-1}$		$S_n=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\times$(الحد الأول + الحد الأخير)		
$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$	$q>1$	$\lim_{n\to+\infty} nr = +\infty$	$r>0$	**النهـــايـــات**
$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$	$-1<q<1$	$\lim_{n\to+\infty} nr = -\infty$	$r<0$	
غير موجودة	$q<-1$	متتالية ثابتة	$r=0$	

سلسلة التمارين

التمرين الأول:

(U_n) متتالية عددية معرفة بـ N :

$$\begin{cases} U_0=\frac{5}{2} \\ U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+2 \end{cases}$$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي فإنه $U_n<6$ ثم ماذا نستنتج؟

التمرين الثاني:

I. (U_n) متتالية حسابية متزايدة تماما معرفة على N بـ:

$$\begin{cases} U_2+U_3+U_4=21 \\ U_2^2+U_3^2+U_4^2=165 \end{cases}$$

أحسب حدها الأول وأساسها r

II. (V_n) متتالية هندسية أساسها موجب حيث:

$$\begin{cases} V_0.V_2=\frac{25}{4} \\ V_0+V_1=\frac{-13}{2} \end{cases}$$

أحسب الحد الأول V_0 والأساس q علما أن الحد الأول $V_0>-5$

التمرين الثالث:

(U_n) متتالية عددية $n\in N^*$ بحيث: $S=U_1+U_2+U_3+ .. +U_{10}+U_{11}+U_{12}+ .. +U_n$

متتالية حسابية

متتالية هندسية

أحسب كلا من الأساسين علما أن أحدهما مقلوب الآخر حيث $U_{16}=\frac{1}{27}$ و $U_1=0$

التمرين الرابع:

$$\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-\frac{9}{4} \end{cases}$$

نضع $V_n=2U_n+\alpha$ عين قيمة α حتى تكون V_n متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

التمرين الخامس:

1) برهن أن (V_n) متتالية حسابية ثم عين أساسها علما أن:

$$\begin{cases} U_{n+1}=\frac{9U_n-8}{2U_n+1} \\ V_n=\frac{2U_n+1}{U_n-2} \end{cases}$$

2) برهن أن (W_n) متتالية هندسية ثم عين أساسها علما أن:

$$\begin{cases} T_{n+1}=\frac{7T_n+2}{T_n+8} \\ W_n=\frac{T_n+2}{T_n-1} \end{cases}$$

التمريـن السادس:

أحسب المجموع: $S_n = 1 + e^{Ln3} + e^{2Ln3} + e^{3Ln3} + \cdots + e^{nLn3}$

التمريـن السابع:

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$$\text{Ln } U_3 + 2\text{ Ln}\sqrt{U_6} = 11$$
$$\text{Ln } U_3 = 1 + \text{Ln}U_2$$

1) أحسب الأساس q وحدها الأول U_0

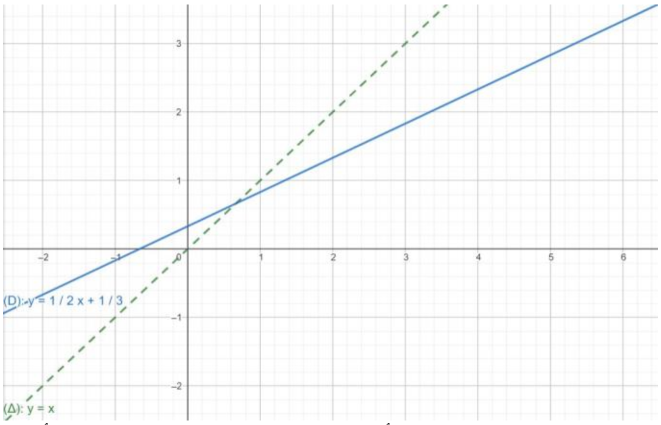
2) نضع $V_n = 3Ln(U_{n+1}) - Ln(U_n)$

أثبت أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين عناصر ها المميزة

التمريـن الثامن:

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتهما على الترتيب:

$$\begin{cases} (\Delta) : y = x \\ (D) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$



1) لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N بـ: $U_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n حيث :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{3}$$

أ- أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية: U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- عين احداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D)

جـ- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n)

2) أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n نجد $U_n > \frac{2}{3}$

ب- استنتج تغير المتتالية (U_n)

3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $V_n = U_n - \frac{2}{3}$

أ- بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

ب- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام (V_n) واستنتج عبارة Un بدلالة n

جـ- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = V_0 + V_1 + .. + V_n$ ثم استنتج المجموع :

$$S_n' = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$$

التمريـن التاسع:

(U_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول U_1 وأساسها q حيث: $\begin{cases} U_1+2U_2+U_3=32 \\ U_1.U_2.U_3=216 \end{cases}$

1) أ- أحسب U_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول U_1

ب- أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n

جـ- أحسب S_n حيث: $S_n = U_1+U_2+ \dots +U_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون المجموع يساوي 728

2) (V_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $\begin{cases} V_1=2 \\ V_{n+1}=\frac{3}{2}V_n+U_n \end{cases}$

أ- أحسب V_2 و V_3

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $W_n=\frac{V_n}{U_n}-\frac{2}{3}$

بين أن (W_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم أحسب W_1

جـ - أكتب W_n بدلالة n ثم استنتج V_n بدلالة n

التمريـن العاشر:

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1;2]$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على I

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x على المجال I تكون $f(x)$ تنتمي إلى I

2) (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على N كما يأتي :

$U_0=\frac{3}{2}$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n تكون U_n تنتمي إلى I

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^{n+1}}$

ب- عين نهاية $\lim_{n\to+\infty} U_n$

التمريـن الحادي عشر:

(U_n) متتالية عددية من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n معرفة كما يلي: $\begin{cases} U_0 = e^2 \\ U_n = \sqrt{\frac{U_{n-1}}{e}} \end{cases}$

(V_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي: $V_n=\frac{1}{2}\text{Ln}(U_n)+\frac{1}{2}$

1) بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم أحسب حدها الأول

2) أكتب V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n= V_0+V_1+\dots+V_n$

ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

4) أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n= U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$

ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} P_n$

التمريــن الثاني عشر:

(U_n) متتالية عددية معرفة بـ:
$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_1=3 \\ U_{n+2}=\frac{1}{2}\alpha^2 U_{n+1}+(\alpha-3)U_n \end{cases}$$
حيث α عدد حقيقي.

نضع $V_n=U_{n+1}-U_n$

1) من أجل $\alpha=2$:

أ- تحقق أن المتتالية (V_n) ثابتة

ب- استنتج طبيعة المتتالية U_n ثم عين أساسها و حدها الأول

جـ- عبر عن المجموع: $S_n=U_0+U_1+..+U_n$ بدلالة n

د- استنتج مجموعة الأعداد الفردية الأصغر من 100

2) من أجل $\alpha=-4$:

أ- برهن أن (V_n) متتالية هندسية ثم أوجد عبارة حدها العام V_n

ب- أحسب المجموع: $S_n'=V_0+V_1+..+V_n$

جـ - برهن أن $S_n'=U_{n+1}-1$ ثم استنتج أن U_n متباعدة

التمريــن الثالث عشر:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على N^* كما يلي:
$$\begin{cases} U_1=-1 \\ U_{n+1}=\frac{n}{2(n+1)}U_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in N^*$ فإن: $U_n\leq 3$
2) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (U_n) ثم استنتج تقاربها
3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على N^* كما يلي: $V_n=n(3-U_n)$
برهن أن (V_n) متتالية هندسية ثم عين أساسها وحدها الأول
4) عبر عن V_n و U_n بدلالة n
5) أحسب نهاية المتتالية U_n

التمريــن الرابع عشر:

(U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:
$$\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n-2n+\frac{5}{3} \end{cases}$$

لتكن (V_n) متتالية معرفة على N بـ : $V_n=U_n+\alpha n+\beta$ حيث : α و β عددان حقيقيان غير معدومان

1) عين α و β حتى تكون (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها
2) أكتب عبارتي V_n ثم U_n بدلالة n
3) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n=V_0+V_1+..+V_n$
4) استنتج المجموع Π_n حيث : $\Pi_n=U_0+U_1+..+U_n$

التمريـن الخامس عشر:

(U_n) متتالية عدد معرفة بحدها الأول $U_0 = \frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 3 + \sqrt{U_n - 3}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3 < U_n < 4$
2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n{}^2+7U_n-12}{\sqrt{U_n-3}-U_n-3}$

ثم بين أن (U_n) متزايدة تماما

3) برر لماذا (U_n) متقاربة
4) (V_n) المتتالية المعرفة على N بـ : $V_n = Ln(U_n - 3)$

أ- برهن أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم أحسب حدها الأول

ب- أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

ج- نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$P_n = (U_0 - 3)(U_1 - 3)(U_2 - 3) \dots (U_n - 3)$$

أكتب P_n بدلالة n ثم بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$

نتائج التمارين

التمرين الأول:

$\frac{5}{6} < 6$ ... $P(0)$ محققة

$U_{n+1}<6$... $P(n+1)$ صحيحة

إذن $P(n)$ صحيحة

التمرين الثاني:

$$\left.\begin{array}{l} U_2=U_0+2r \\ U_3=U_0+3r \\ U_4=U_0+4r \end{array}\right\} \Rightarrow U_0=7-3r$$

$r=3$; $U_0=-2$

$V_0+V_0q=\frac{-13}{2}$

$q=\frac{-5}{2V_0}$

$V_0=-4$; $q=\frac{5}{8}$

التمرين الثالث:

$U_{16}=U_{10}q^6$

$U_{10}=U_1+9r$

$r=3$; $q=\frac{1}{3}$

التمرين الرابع:

$V_{n+1}=U_n-\frac{9}{2}+\alpha$

$U_n=\frac{V_n-\alpha}{2}$

$V_{n+1}=\frac{V_n}{2}+(\frac{\alpha-9}{2}) \Rightarrow \alpha=9$; $q=\frac{1}{2}$; $V_0=13$

التمرين الخامس:

$V_{n+1}=\frac{4U_n-3}{U_n-2}$

$V_{n+1}=V_n+2 \Rightarrow r=2$

$W_{n+1}=\frac{9T_n+18}{6T_n-6}$

$W_{n+1}=\frac{3}{2}W_n \Rightarrow q=\frac{3}{2}$

التمرين السادس:

$S_n=3^0+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n$

$S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

التمرين السابع:

$$\left\{\begin{array}{l} U_3U_6=e^{11} \\ \frac{U_3}{U_2}=e \end{array}\right. \Rightarrow q=e \text{ ; } U_0=e$$

$V_{n+1}=3Ln(U_{n+1}e)-Ln(U_ne)=V_n+2$;

$V_0=5$

التمرين الثامن:

$M(\frac{2}{3};\frac{2}{3})$

تخمين (U_n) متناقصة، متقاربة ومحدودة من الأسفل بـ $\frac{2}{3}$

$6>\frac{2}{3}$ ... $P(0)$ محققة

$U_{n+1}>\frac{2}{3}$... $P(n+1)$ صحيحة

إذن $P(n)$ صحيحة

$U_{n+1}-U_n=-\frac{1}{2}U_n+\frac{1}{3}<0$ ومنه متناقصة

$$\left\{\begin{array}{l} V_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-\frac{1}{3} \\ U_n=V_n+\frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$$

$q=\frac{1}{2}$; $V_0=\frac{16}{3}$

$V_n=\frac{16}{3}(\frac{1}{2})^n$; $U_n=\frac{16}{3}(\frac{1}{2})^n+\frac{2}{3}$

$S_n=\frac{-32}{3}[(\frac{1}{2})^{n+1}-1]$

$S_n'=\frac{-32}{3}[(\frac{1}{2})^{n+1}-1]+\frac{2}{3}(n+1)$

التمرين التاسع:

$$\left.\begin{array}{l} U_2=6 \\ U_1=\frac{U_2}{q} \\ U_3=U_2q \end{array}\right\} \Rightarrow q=3 \text{ متتالية متزايدة}$$

$U_1=2$

$U_n=2(3)^{n-1}$

$S_n=(3)^n-1$

$S_n=728 \Rightarrow n=6$

$V_2=5$; $V_3=\frac{27}{2}$

$W_{n+1}=\frac{1}{2}W_n \Rightarrow q=\frac{1}{2}$; $W_1=\frac{1}{3}$

التمرين العاشر:

$f'(x)=\frac{6}{(-x+4)^2}>0 \Rightarrow f$ متزايدة تماما

$1\le x\le 2 \Rightarrow 1\le f(x)\le 2$ أي $f(x)\in[1;2]$

$1\le\frac{3}{2}\le 2$ ... $P(0)$ محققة

$1\le U_{n+1}\le 2$ ... $P(n+1)$ صحيحة

إذن $P(n)$ صحيحة

$U_{n+1}-U_n=\frac{(U_n-2)(U_n-1)}{-U_n+4}<0$

$\Rightarrow$ متتالية متناقصة و محدود من الأسفل بـ1 إذن متقاربة

$U_0=\frac{3}{2}$ ...$P(0)$ محققة

$U_{n+1}=\frac{U_n+2}{-U_n+4}=1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^{n+1}+1}$ ... $P(n+1)$ صحيحة

إذن $P(n)$ صحيحة

$\lim_{n\to+\infty} U_n=1$

التمرين الحادي عشر:

$V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n \Rightarrow q=\frac{1}{2}$; $V_0=\frac{3}{2}$

$V_n=\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n$

$U_n=e^{2V_n-1}=e^{3(\frac{1}{2})^n-1}$

$S_n=3-[(\frac{1}{2})^{n+1}-1]$

$\lim_{n\to+\infty} S_n=3$

$P_n=e^{2S_n+(n+1)(-1)}=e^{-6(\frac{1}{2})^{n+1}+5-n}$

$\lim_{n\to+\infty} P_n=0$

التمريـن الثاني عشر:

1) $\alpha=2$:

$V_{n+1}=V_n \Rightarrow$ متتالية ثابتة

$V_0=V_1=V_2=V_3=\ldots=V_n=2$

$U_{n+1}=U_n+V_0=U_n+2 \Rightarrow r=2$; $U_0=1$

$U_n=2n+1$

$S_n=(n+1)^2$

$U_0=1$

$U_n=2n+1=99 \Rightarrow n=49$

$S=1+2+5+\ldots+99=(49+1)^2=2500$

2) $\alpha=-4$:

$V_{n+1}=7V_n \Rightarrow q=7$; $V_0=2$

$V_n=2(7)^n$

$S_n'=\frac{7^{n+1}-1}{3}=-U_0+U_{n+1}=U_{n+1}-1$ (الحذف المتتالي)

$U_{n+1}=\frac{7^{n+1}+2}{3} \Rightarrow U_n=\frac{7^n+2}{3}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n=+\infty$

التمريـن الثالث عشر:

$-1 \leq 3 \ldots P(1)$ محققة

$U_{n+1} \leq 3 \ldots P(n+1)$ صحيحة

إذن $P(n)$ صحيحة

$U_{n+1}-U_n=(\frac{n+2}{n+1})(\frac{-1}{2}U_n+\frac{3}{2})$

$\frac{n+2}{n+1}>0$ و $\frac{-1}{2}U_n+\frac{3}{2}\geq 0 \Rightarrow U_{n+1}-U_n \geq 0$ متزايدة

$V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n \Rightarrow q=\frac{1}{2}$; $V_1=4$

$V_n=4(\frac{1}{2})^{n-1}$

$U_n=3-\frac{V_n}{n}=3-\frac{4}{n}(\frac{1}{2})^{n-1}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n=3$

التمريـن الرابع عشر:

$V_{n+1}=\frac{2}{3}V_n+(\frac{\alpha}{3}-2)n+(\alpha+\frac{\beta}{3}+\frac{5}{3})$

$\Rightarrow(\frac{\alpha}{3}-2)n+(\alpha+\frac{\beta}{3}+\frac{5}{3})=0 \Rightarrow \alpha=6$; $\beta=-23$

$\Rightarrow V_n=U_n+6n-23$; $q=\frac{2}{3}$; $V_0=-20$

$V_n=-20(\frac{2}{3})^n$

$U_n=-20(\frac{2}{3})^n-6n+23$

$\lim_{n\to+\infty} U_n=-\infty$

$S_n=60[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1]$

$\Pi_n=S_n+\frac{n+1}{2}(23+(-6n+23))$

$\Pi_n=60[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1]+(n+1)(-3n+23)$

التمريـن الخامس عشر:

$3\leq\frac{13}{4}\leq 4 \ldots P(0)$ محققة

$3\leq U_{n+1}\leq 4 \ldots P(n+1)$ صحيحة

إذن $P(n)$ صحيحة

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+7U_n-12}{\sqrt{U_n-3}-U_n-3}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{(-U_n+4)(U_n-3)}{\sqrt{U_n-3}-U_n-3}$$

$0<-U_n+4<1$

$0<U_n-3<1$

$\sqrt{U_n-3}-U_n-3>0$

$\Rightarrow U_{n+1}-U_n>0$ متتالية متزايدة

$V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n \Rightarrow q=\frac{1}{2}$; $V_0=-Ln(4)$

$V_n=-Ln(4)(\frac{1}{2})^n$

$U_n=e^{V_n}+3=e^{-(\frac{1}{2})^n Ln(4)}+3$

$\lim_{n\to+\infty} U_n=4$

$P_n=e^{V_0+V_1+V_2+\cdots+V_n}=e^{Ln(16)[(\frac{1}{2})^{n+1}-1]}$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n=\frac{1}{16}$$