كل ما تحتاج في هذا المحور

1) **قوانين عامة:**

احداثيات ومركبات نقطة في الفضـــاء	$M(x;y;z) \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
مركبات شعاع في الفضاء	$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$
طويلة شعاع في الفضاء	$\|\|\overrightarrow{AB}\|\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
منتصف قطعة	$I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
الجداء السلمي بين شعاعين	$\vec{U}.\vec{V} = xx' + yy' = \|\|\vec{U}\|\|.\|\|\vec{V}\|\|.\cos(\vec{U},\vec{V})$
توازي شعاعان	$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = k$ (في حالة استقامية يتوجب وجود نقطة مشتركة بين الشعاعين)
تعامد شعاعان	$x.x' + y.y' + z.z' = 0$
معادلة سطح كرة	$(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 + (z + \gamma)^2 = \lambda$ مركزها $\Omega(-\alpha ; -\beta ; -\gamma)$ قطرها $r = \sqrt{\lambda}$
المسافة بين نقطة ومستوي	$d((P);S) = \frac{\|a\alpha + b\beta + c\gamma + d\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \dots (P) \\ S(\alpha;\beta;\gamma) \end{cases}$
حجم رباعي الوجوه	$V = \frac{1}{3} \times S \times h$ S مساحة القاعدة (المثلث) و h ارتفاع حجم رباعي الوجوه

2) **المستوي في الفضاء:**

المعادلة الديكارتية لمستوي	التمثيل الوسيطي لمستوي
$\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$	$\begin{cases} \mathbf{x = at + a't' + \alpha} \\ \mathbf{y = bt + b't' + \beta} \\ \mathbf{z = ct + c't' + \gamma} \end{cases} \quad \{t,t'\} \in R$
له شعاع ناظمي $\vec{\mathbf{n}}(\mathbf{a} ; \mathbf{b}; \mathbf{c})$ يعامده ويشمل نقطة معلومة	حيث t و s وسيطان للمستوي ذو شعاعي توجيهه موازيان له $\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{a} ; \mathbf{b}; \mathbf{c})$ و $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{a'} ; \mathbf{b'}; \mathbf{c'})$ يشمل النقطة $\mathbf{I(\alpha;\beta;\gamma)}$
المستوي الذي يشمل النقطة A والشعاع $\vec{n}$ ناظمي له نفرض نقطة $M(x,y,z)$ تنتمي له: $\overrightarrow{\mathbf{AM}} \perp \vec{\mathbf{n}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{AM}}.\vec{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$	المستوي الذي يشمل النقطة A والشعاعين $\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{a} ; \mathbf{b}; \mathbf{c})$ و $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{a'} ; \mathbf{b'}; \mathbf{c'})$ توجيه له نفرض نقطة $M(x,y,z)$ تنتمي له $\overrightarrow{\mathbf{AM}} = \mathbf{t\vec{u} + t'\vec{v}}$

3) **المستقيم في الفضاء:**

التمثيل الوسيطي لمستقيم	المعادلة الديكارتية لمستقيم
$\begin{cases} \mathbf{x = at + \alpha} \\ \mathbf{y = bt + \beta} \\ \mathbf{z = ct + \gamma} \end{cases} \quad t \in R$	$\mathbf{\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c}}$
حيث t وسيط للمستقيم شعاع توجيهه الذي يوازيه $\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{a} ; \mathbf{b}; \mathbf{c})$ وشمل نقطة $\mathbf{I(\alpha;\beta;\gamma)}$	
المستقيم الذي يشمل النقطة A والشعاع $\vec{v}$ توجيه له نفرض نقطة $M(x;y;z)$ تنتمي له $\overrightarrow{\mathbf{AM}} // \vec{\mathbf{n}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{AM}} = \mathbf{t}.\vec{\mathbf{v}}$	انطلاقا من التمثيل الوسيطي نستخرج العبارات الثلاث لـt بدلالة كل من x وy وz ثم

4) **تقاطع مستويان:** نأخذ z=t ونعوضه في معادلتي المستويان لاستخراج x و y و z بدلالة t

$$\begin{cases} \mathbf{ax + by + cz + d = 0} \dots (\mathbf{P_1}) \\ \boldsymbol{\alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda = 0} \dots (\mathbf{P_2}) \end{cases}$$

5) **المرجــح في الفضــاء:** G مرجح النقاط A، B و C المرفقة بالمعاملات α، β و γ يمكن كتابتها:

- **كتابة جملة:** $\{(A\,;\alpha)\,;(B\,;\beta)\,;(C\,;\gamma)\}$
- **كتابة شعاعية:** $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- **الشرط:** $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ وإلا فإن المرجح G غير موجود
- **احداثيات المرجح:**

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_c}{\alpha + \beta + \gamma}\ ;\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}\ ; z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

- **قانون لايبنز:** $\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}}$

ملاحظات: منتصف قطعة [AB] هو مرجح الجملة $\{(A\,;1)\,;(B\,;1)\}$

مركز ثقل المثلث ABC هو مرجح الجملة $\{(A\,;1)\,;(B\,;1)\,;(C\,;1)\}$

- **طبيعة مجموعة النقط في الفضــاء:**

$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = \alpha$			$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = \|\|\overrightarrow{MH}\|\|$
إذا كان $\alpha > 0$	**إذا كان $\alpha = 0$**	**إذا كان $\alpha < 0$**	مجموعة النقط M هي المستوي المحور للقطعة المستقيمة [GH]
مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $r = \alpha$	مجموعة النقط M هي نقطة وحيدة G	مجموعة النقط M مجموعة خالية	

سلسلة التماريـن

التمرين الأول: في الفضاء المزود بمعلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نسمي المستقيم (Δ) والمستوي (P) اللذان يحققان:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases} \quad t \in IR \qquad\qquad x + 2y - 3z - 1 = 0$$

اختر الجواب الصحيح في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

رقم السؤال	الجواب (A)	الجواب (B)	الجواب (C)
1	النقطة M(-1 ;3 ;2) تنتمي إلى (Δ)	النقطة N(2 ;-1 ;-1) تنتمي إلى (Δ)	النقطة R(3 ;1 ;-4) تنتمي إلى (Δ)
2	الشعاع $\vec{u}(1\,;2;-3)$ يمثل شعاع توجيه (Δ)	الشعاع $\vec{v}(-2\,;1;1)$ يمثل شعاع توجيه (Δ)	الشعاع $\vec{w}(3\,;1;-4)$ يمثل شعاع توجيه (Δ)
3	النقطة G ذات الاحداثية G(1 ;3 ;-2) تنتمي إلى المستوي (P)	النقطة G ذات الاحداثية G(1 ;3 ; 2) تنتمي إلى المستوي (P)	النقطة G ذات الاحداثية G(1 ;3 ;-1) تنتمي إلى المستوي (P)
4	المستوي الديكارتي (Q) ذو المعادلة: $x + 2y - 3z = 1$ عمودي على المستوي (P)	المستوي الديكارتي (Q) ذو المعادلة: $4x - 5y - 2z = -3$ عمودي على المستوي (P)	المستوي الديكارتي (Q) ذو المعادلة: $-3x + 2y - z = 1$ عمودي على المستوي (P)
5	المسافة بين النقطة T(-1 ;-3 ;2) و المستوي (P) هي $\sqrt{14}$	المسافة بين النقطة T(-1 ;-3 ;2) و المستوي (P) هي 14	المسافة بين النقطة T(-1 ;-3 ;2) و المستوي (P) هي $2\sqrt{3}$

التمرين الثاني:

المستوي المنسوب إلى الفضاء $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقط:

C(3 ;2 ;4) | B(-3 ;-1 ;7) | A(2 ;1 ;3)

1) أثبت أن النقط ليست على استقامة واحدة
2) ليكن (d) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x = 2t - 7 \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in IR$$

أ- أثبت أن (d) عمودي على المستوي (ABC)

ب- أعط المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)

3) لتكن H النقطة المشتركة بين (d) والمستوي (ABC)

أ- أثبت النقطة H هو مرجح الجملة: {(A ;-2) ;(B ;-1) ;(C ;2)}

ب- عين مجموعة النقط للمستوي التي يحقق الحالتين:

$$\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

$$|| - 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|| = \sqrt{29}$$

ج- نسمي (Γ) التي تمثل نقاط تقاطع الحالتين السابقتين، أثبت أن S(-8 ;1 ;3) تنتمي إلى هذه المجموعة

التمرين الثالث:

المستوي المنسوب إلى الفضاء $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقط:

$I(\frac{3}{5};4;\frac{-9}{5})$ | E(3 ;2 ;-1) | D(1 ;0 ;-2) | C(3 ;1 ;-3) | B(0 ;4 ;-3) | A(2 ;4 ;1)

أجب بنعم أولا عن الأسئلة التالية مع التعليل لكل جواب:

1) المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: 2x+2y-z=11
2) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)
3) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان
4) المستقيم (CD) معرف لتمثيل وسيطي كما يلي:

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - 1 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t\in IR$$

5) النقطة I تنتمي إلى المستقيم (AB)

التمرين الرابع:

في كل سؤال من الأسئلة التالية عين إن كان السؤال صحيحا أما خاطئا مع التعليل

في الفضاء المزود بمعلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تعطى النقاط:

C(2 ;0 ;0) | B(0 ;4 ;0) | A(0 ;0 ;2)

ولتكن I منتصف القطعة [BC]

G هي مرجح النقط المتساوية للنقط A, B و c

H المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (ABC)

1) النقط A, B وC على استقامة واحدة
2) مجموعة النقط M في الفضاء حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$ هي المستوي (AIO)
3) مجموعة النقط M في الفضاء حيث: $||\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}||$ هي الكرة التي قطرها [BC]
4) المستوي (ABC) له المعادلة الديكارتية: 2x+y+2z=4
5) إحداثيات النقطة H هي: $H(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9})$
6) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AG) يعطى بالجملة التالية

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad t\in IR$$

7) معادلة محور القطعة المستقيمة [BC] معرفة بالمعادلة x-3y+z-1=0

التمرين الخامس:
في الفضاء المزود بمعلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط:

C(3 ;-1 ;2) | B(1 ;2 ;1) | A(1 ;1 ;0)

1) بين أن النقط A, B وC تشكل مستوي
2) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)
3) نعتبر المستويان (P) و (Q) معرفين بالمعادلتين:

$$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \ldots (P) \\ 2x + 3y - 2z - 5 = 0 \ldots (Q) \end{cases}$$

4) أوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويان (P) و (Q)
5) أحسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)
6) حدد تقاطع المستويات (ABC) و (P) و (Q)

التمرين السادس:

نعتبر الفضاء المزود بمعلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن المستويان (P_1) و (P_2) المعرفين بالمعادلتين:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 7 = 0 \dots (P_1) \\ 2x + 2y - z + 5 = 0 \dots (P_2) \end{cases}$$

1) بين أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان
2) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع (P_1) و (P_2)
3) أحسب بعد النقطة $A(1\,;2\,;-1)$ عن كل من المستويين (P_1) و (P_2)
4) استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)
5) لتكن النقطة $M(t\,;-1-2t\,;3-2t)$ حيث t عدد حقيقي ولتكن f دالة معرفة على R حيث: $f(t)=AM^2$

أ- أكتب عبارة $f(t)$ بدلالة t

ب- استنتج قيمة العدد t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن

ج- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

التمرين السابع:

المستوي المنسوب إلى الفضاء $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن المستقيمان (Δ) و (Δ'):

$$\begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases} \dots(\Delta') \qquad \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} \dots(\Delta)$$

1) بين أن المستقيمان (Δ) و (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي
2) عين احداثيتي M وN حتى يكون المستقيم (MN) عموديا على (Δ) و (Δ') علما أن:

$M\in(\Delta)$ | $N\in(\Delta')$

التمرين الثامن:

في الفضاء المزود بمعلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط:

$C(2\,;2\,;2)$ | $B(0\,;4\,;0)$ | $A(3\,;0\,;0)$

1) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقاط A, B وC
2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (P’) مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ من الفضاء حيث: AM=BM
3) عين معادلة ديكارتية للمستوي (P’’) محور القطعة المستقيمة [AC]
4) بين أن (P’) و (P’’) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيينه
5) أحسب احداثيتي ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

التمرين التاسع:

في المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر m وسيط حقيقي حيث (S_m) مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ من الفضاء المعرفة بـ:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-1)x - 2my - 6z + 2m^2 - 2m + 1 = 0$$

1) بين أن (S_m) سطح كرة مهما كان m من R يطلب تعيين عناصرها المميزة ونسمي Ω_m مركزها
2) حدد مجموعة النقط Ω_m عندما يتغير m في R
3) ليكن المستوي (P) ذو المعادلة: $2x + 2y + z + 4 = 0$

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m يكون المستوي (P) مماسا لسطح الكرة (S_m)

ب- عين احداثيتي النقطة H نقطة تماس المستوي (P) مع سطح الكرة (S_0)

التمرين الـعاشر:

(P) المستوي الذي معادلته : $-4x-3y+1=0$ معادلة ديكارتية له و (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}k \\ z = \frac{3}{4}k - \frac{3}{4} \end{cases} \quad k \in IR$$

1) تحقق أن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P)

2) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1\,;1\,;0)$ و $\vec{u}(4;1;3)$ شعاع توجيه له

ب- عين احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ)

3) بين أن: $3x-4z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ)

4) $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من الفضاء:

أ- أحسب المسافة بين النقطة M وكل من (P) و (Q)

ب- أثبت أن مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي اتحاد مستويين (P_1) و (P_2) متعامدين يطلب تعيينهما