كل ما تحتاج في هذا المحور

I. النهـــايـــات:

1) قوانين عامة:

$\infty \pm \text{عدد} = \infty$

$(\infty) \times \text{عدد} = \infty$

$\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$

$(\infty)^n = \infty$

$\frac{\text{عدد}}{0^{\pm}} = \infty$

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

2) حالات عدم التعيـــين:

$\frac{\infty}{\infty}$

$+\infty - \infty$

$\frac{0}{0}$

$\infty \times 0$

3) النهـــايات بالمــقارنة:

النظرية الأولى	النظرية الثانية	النظرية الثالثة
f, g و h ثلاث دوال: $g(x) \le f(x) \le h(x)$ إذا كانتا: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = l \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = l \end{cases}$ يستلزم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$	f و g دالتان: $f(x) \ge g(x)$ إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$ يستلزم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$	f و g دالتان: $f(x) \le g(x)$ إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$ يستلزم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$

II. المستقيمات المقاربة:

1) وجود مستقيم مقارب:

مستقيم مقارب عمودي	مستقيم مقارب أفقي	مستقيم مقارب مائل
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ يوجد مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = a$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ يوجد مستقيم مقارب عمودي معادلته $y = b$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته موجودة في العبارة الثانية لـf

2) الفرق بين برهنة وجود مستقيم مقارب والوضعية النسبية:

الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب y	برهنة أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب y
دراسة إشارة الفرق $[f(x) - y]$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - y] = 0$

III. الاستمراريـــة:

الحالة الأولى: قيمة مسموحة	**الحالة الثانية:** قيمة ممنوعة
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ومنه f دالة مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة x_0	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$ ومنه f دالة مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة x_0

IV. الإشتــــقاقية:

1) قابليـــة الاشتقاق:

الحالة الثانية: قيمة ممنوعة	الحالة الأولى: قيمة مسموحة
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l = f'(x_0)$ ومنه f دالة قابلة لاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة x_0	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l = f'(x_0)$ ومنه f دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة x_0

2) التفسير الهـــندسي:

التفسير	النتيجة	
(C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ذو المعادلة : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$	الحالة الأولى: قيمة مسموحة
(C_f) يقبل مماس يوازي محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة x_0	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$	
(C_f) يقبل مماس يوازي محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة x_0	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$	

التفسير	النتيجة	
(C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ذو المعادلة : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$	الحالة الثانية: قيمة ممنوعة
(C_f) يقبل نقطة زاوية عند النقطة $S(x_0; f(x_0))$ "أي عندما تكون f دالة غير قابلة لاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة x_0"	$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2 \end{cases}$ $l_1 \neq l_2$	

3) حساب المشــتقة:

المشتقة f'	الدالة f
0	a
a	ax+b
$n.x^{n-1}$	x^n
$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{x^n}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
-sin(x)	cos(x)
cos(x)	sin(x)
a.U'	a.U
U'+V'	U+V
U'.V+V'U	U.V
$\frac{U'.V-V'.U}{V^2}$	$\frac{U}{V}$
$n.U'.U^{n-1}$	U^n
$-\frac{n.U'}{U^{n+1}}$	$\frac{1}{U^n}$
$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$\sqrt{U}$
$-\frac{U'}{U^2}$	$\frac{1}{U}$
V'.U'(V)	U∘V=U(V)

V. نظرية القيـــم المتوســـطة:

الحـــــالتين	$f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $a < \alpha < b$	$f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا α حيث $a < \alpha < b$	
الشـــرط	الدالة f معرفة، مستمرة ورتيبة على المجال $[a ;b]$		
الاثبـــات	$f(a) \times f(b) < 0$	**متزايدة تماما**	$f(a) < k < f(b)$
		متناقصة تماما	$f(b) < k < f(a)$

ملاحظة: في بعض الأحيان يمكن أن يكون أحد العددين a أو b عبارة عن عدد مالانهاية $\pm\infty$ فلا يتغير أي شيء مما سبق

سلسلة التماريـن

I. النهـايات:

التمرين الأول: أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$$

التمريـن الثاني:

f دالة عددية حيث: $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما يكون لدينا: $\frac{3}{x+2}<f(x)<\frac{3}{x}$
2) استنتج: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

التمريـن الثالث:

f دالة عددية معرفة على المجال: $]0\,;+\infty[$ حيث: $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

1) تحقق أنه يمكن كتابة f على الشكل: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$
2) أثبت أنه: $\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$
3) استنتج نهاية f عند $+\infty$

التمريـن الرابع:

f دالة عددية حيث: $f(x)=\frac{2x+\sin x}{3-\cos x}$

1) أوجد حصرا لـ f(x) من أجل كل: $x\in]\frac{1}{2}\,;+\infty[$
2) عين: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

II. المستقيمات المقاربة:

التمرين الخامس:

f دالة عددية ذات المتغير x حيث: $f(x)=\frac{2x^3-x^2-3x+2}{x^2-1}$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f
2) أحسب نهايات الدالة f على أطراف مجال التعريف
3) عين الأعداد الحقيقية α, β, γ و λ حيث: $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma x+\lambda}{x^2-1}$
4) بين أن المنحنى (C) الممثل لتغيرات الدالة f يقبل مستقيمان مقاربان يطلب تعيين معادلتهما
5) أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

III. الاستمــرارية:

التمرين السادس: f دالة عددية ذات المتغير x حيث:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - 12x^2 + 20x + 48}{16 - 4x} \quad ; x \in]-\infty; 4[\\ f(x) = \dfrac{2x - 5 - \sqrt{x+5}}{x^2 - 16} \quad ; x \in]4; +\infty[\\ f(4) = 7 \end{cases}$$

أدرس استمرارية الدالة f عند $x_0=4$

IV. الاشتــقاقية:

التمرين السابع: f دالة عددية ذات المتغير x حيث: $f(x) = |x-1| + \frac{3}{x+2}$

1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=1$
2) أوجد معادلة نصف مماس عند يمين $x_0=1$

التمريــن الثامن: f دالة معرفة بـ: $f(x) = \frac{2\sin(x)+3}{\sin(x)-1}$

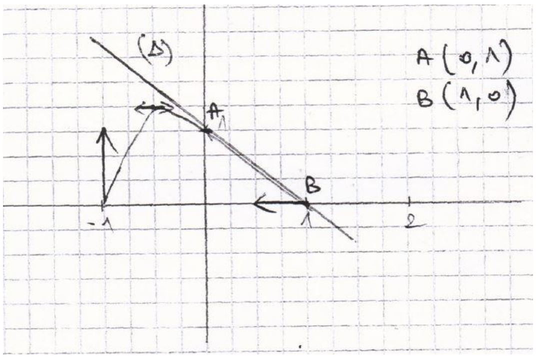
1) بين أن الدالة f هي مركب دالتين U وV يطلب تعيينهما
2) أحسب كل من U'(x) و V'(x)
3) استنتج مشتقة الدالة f

التمريــن التاسع:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي: $f(x) = (x+1)\sqrt{1-x^2}$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f
2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 1- وفسر النتيجة هندسيا
3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 1+ وفسر النتيجة هندسيا
4) أحسب مشتقة الدالة f ثم عين جدول تغيراتها

التمريــن العاشر:



1) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1- من اليمين؟ علل
2) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1+ من اليسار؟ علل
3) أحسب f'(0)
4) أوجد a وb علما أن f(x) تكتب من الشكل:

$$f(x) = (a+bx)\sqrt{1-x^2}$$

V. نظرية القيم المتوسطة:

التمرين الحادي عشر:

f دالة عددية ذات المجهول x حيث: $f(x) = \frac{-x^3-2x^2-x-4}{(x+1)^2}$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب نهايات الدالة f على أطراف مجال التعريف
2) عين العددين a وb حيث: $f(x) = ax + \frac{b}{(x+1)^2}$
3) بين أنه من أجل x من D_f حيث: $f'(x) = \frac{(1-x)(x^2+4x+7)}{(x+1)^3}$
4) شكل جدول تغيرات الدالة f
5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ)
6) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)
7) بين أن المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا α حيث $-\frac{5}{2} < \alpha < -2$
8) أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ بالوحدة 2cm على محول الفواصل و 1cm على محور التراتيب
9) حل وناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة f(x)=m أو y=m

VI. تمارين عامة:

التمريــن الثاني عشر:

I. لتكن الدالة g معرفة على R بـ: $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها
2) بين أن المعادلة g(x)=0 تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 \leq \alpha \leq 2{,}2$
3) استنتج إشارة g(x)

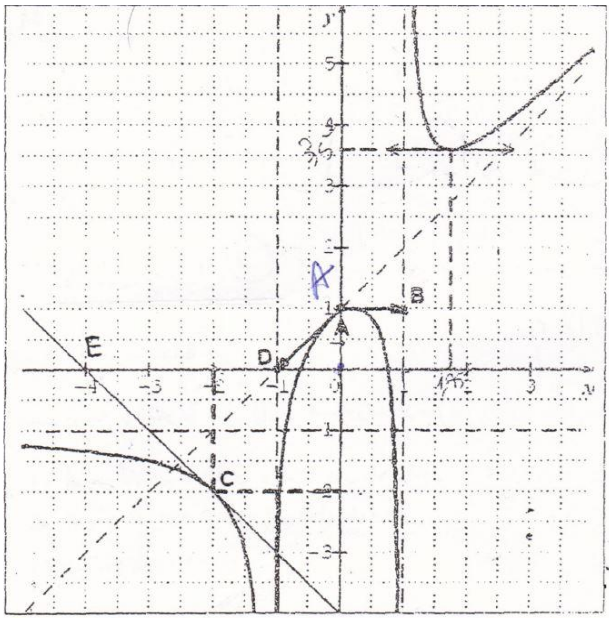
II. لتكن الدالة f المعرفة على $D_f=R-\{-1\ ;1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ذو الوحدة 2cm

1) أحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف
2) أ- عين الأعداد الحقيقية a, b, c و d حيث من أجل كل x من D_f : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$
ب- استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيينه
ج- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ)
3) بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين آخرين يطلب تعيينهما
4) بين أن من أجل كل x من D_f: $f(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$
5) أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها
6) بين أن: $f(\alpha) = \frac{3(\alpha+2)}{\alpha^2-1}$ ثم استنتج حصرا لـ$f(\alpha)$
7) عين معادلة المماس (d) لـ(C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2-
8) أرسم المماس (d) والمستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f)

التمريــن الثالث عشر:

الشكل المقابل (C_f) هو منحنى الدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$



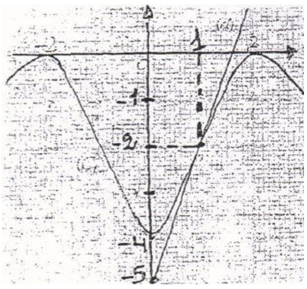
I. بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

1) عين مجموعة تعريف الدالة f
2) هل الدالة f مستمرة عند 0؟
3) أحسب $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}$ مع التعليل ثم عين المجالات التي تكون فيها الدالة f قابلة للاشتقاق
4) شكل جدول تغيرات الدالة f
5) أعط حصرا لحلول المعادلة f(x)=0 ثم استنتج إشارة f(x)
6) أكتب معادلة المماسين عند النقطتين اللذان فاصلتاهما 0 و 2- ثم أكتب معادلة المستقيم المائل
7) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة f(x)=x+m

II. g دالة معرفة كما يلي: $f(x) = x + m$
أحسب g'(x) ثم استنتج جدول تغيرات الدالة g

التمريــن الرابع عشر:

f دالة معرفة على المجموعة R و (C_f) تمثيلها البياني و(d) المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 كما هو مبين في الشكل:



ليكن الدالتين g و h المعرفتين بـ:

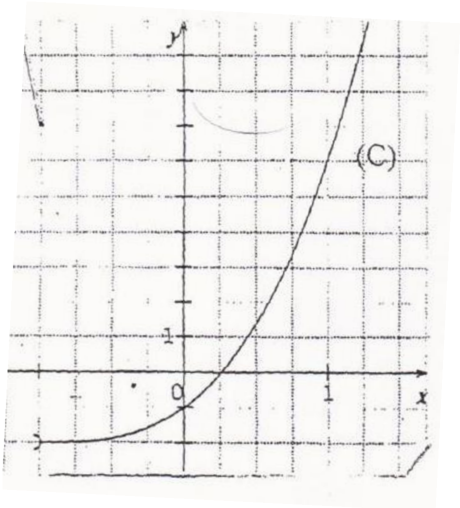
$$g(x) = f(x^2) \qquad h(x) = f \circ f(x)$$

1) عين $f(1)$, $f(-2)$, $f'(-2)$ و $f'(1)$

2) استنتج $g'(1)$ و $h'(1)$

التمريــن الخامس عشر:

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ كما يأتي:



$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1) أ- بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدد $g(0)$ واشارة $g(\frac{1}{2})$

ب- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $]0\,;\frac{1}{2}[$ يحقق $g(\alpha)=0$

ج- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1\,;+\infty[$

2) f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بما يأتي:

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب- عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسر النتيجة هندسيا

ج- أحسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وفسرهما بيانيا

د- شكل جدول تغيرات الدالة f

3) نأخذ $\alpha \approx 0{,}26$

أ- عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}

ب- أرسم المنحنى (Γ)

نتائج التمارين

I. النهايات

التمرين الأول:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{-10}{3}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}=3$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}=0$$

التمرين الثاني:

$$\frac{3}{x+2}<\mathrm{f(x)}<\frac{3}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=0$$

التمرين الثالث:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le \mathrm{f(x)}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=0$$

التمرين الرابع:

$$\frac{2x-1}{4}\le \mathrm{f(x)}\le\frac{2x+1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$$

II. المستقيمات المقاربة

التمرين الخامس:

D_f=R-{-1 ;+1}

$\lim_{x\to -\infty}f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$ احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

$\lim_{\substack{x\to -1\\<}}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to -1\\>}}f(x)=-\infty$ يوجد مستقيم مقارب عمودي معادلته x=-1

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\>}}f(x)=\frac{1}{2}$$

$$\alpha=2;\beta=-1;\gamma=-1;\lambda=1$$

$$f(x)=(2x-1)+\frac{-x+1}{x^2-1}$$

$\lim_{x\to -\infty}f(x)-y=0\Rightarrow y=2x-1$ م.م.م

$$f(x)-y=\frac{-x+1}{x^2-1}$$

x	$-\infty$	-1	+1	$+\infty$
f(x)-y	+	-	-	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

III. الاستمرارية

التمرين السادس:

$\lim_{\substack{x\to 4\\<}}f(x)=7\Rightarrow$ الدالة f مستمرة عند يسار $x_0=4$

$\lim_{\substack{x\to 4\\>}}f(x)=\frac{11}{48}\Rightarrow$ الدالة f مستمرة عند يمين $x_0=4$

إذن الدالة f ليست مستمرة عند $x_0=4$

التمرين السابع:

$\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{-4}{3}\Rightarrow$ الدالة f قابلة للاشتقاق عند يسار $x_0=4$

$\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{2}{3}\Rightarrow$ الدالة f قابلة للاشتقاق عند يمين $x_0=4$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=4$ أي تقبل نقطة زاوية S(1 ;1)

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

التمرين الثامن:

$$U(x)=\frac{2x+3}{x-1};V(x)=\sin(x)$$

$$U'(x)=\frac{-5}{(x-1)^2};V'(x)=\cos(x)$$

$$f'(x)=\frac{-5\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}$$

التمرين التاسع:

D_f=[-1 ;+1]

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=0$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0=-1 والمنحنى (C_f) يقبل مماس يوازي محور الفواصل (xx’)

$$\lim_{x\to +1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0=+1 والمنحنى (C_f) يقبل مماس يوازي محور التراتيب (yy’)

$$f'(x)=f'(x)=\frac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1		$\frac{1}{2}$		+1
g’(x)		+	0	-	
g(x)	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

التمرين العاشر:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = +\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=-1$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

$f'(0) = -1$

$a = 1\,;b = -1$

IV. القيم المتوسطة

التمرين الحادي عشر:

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$

$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$

$a = -1; b = -4$

$$f'(x) = \frac{(-x+1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^3}$$

x	1/2		-1		2		+∞
f'(x)		-	‖	+		+	
f(x)	+∞	↘	−∞ ‖ −∞	↗	-2	↘	−∞

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = 0; y = -x$ م.م.م

$$f(x) - y = \frac{-4}{(x+1)^2}$$

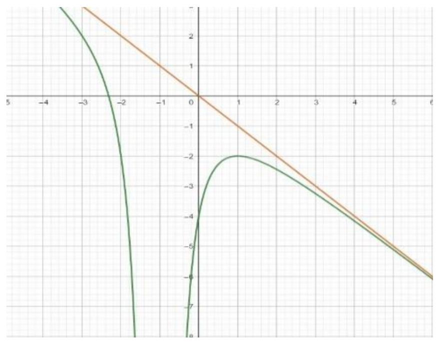
x	0		1		+∞
f(x)-y		+	‖	-	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	

$f\left(\frac{-5}{2}\right) \times f(-2) < 0$

يوجد ثلاث حلول: $m \in]-\infty; -2[$

يوجد حلين متمايزين: $m = -2$

يوجد حل وحيد: $m \in]-2; +\infty[$



V. تمارين عامة

التمرين الثاني عشر:

$g(x) = x^3 - 3x - 4$

$D_f =]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$g'(x) = 3x^2 - 3$

$g(2) \times g(2{,}2) < 0$

x	-∞		α		+∞
g(x)		-	0	+	

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$$

$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +1[\cup]+1; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$

$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$

$x = -1$ م.م.ع

$\lim_{\substack{x \to +1 \\ <}} f(x) = -\infty$

$\lim_{\substack{x \to +1 \\ >}} f(x) = +\infty$

$x = +1$ م.م.ع

$a = 1; b = 0; c = 1; d = 2$

$$f(x) = x + \frac{x+2}{x^2-1}$$

$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - y] = 0; y = x$ م.م.م

$$(x) - y = \frac{x+2}{x^2-1}$$

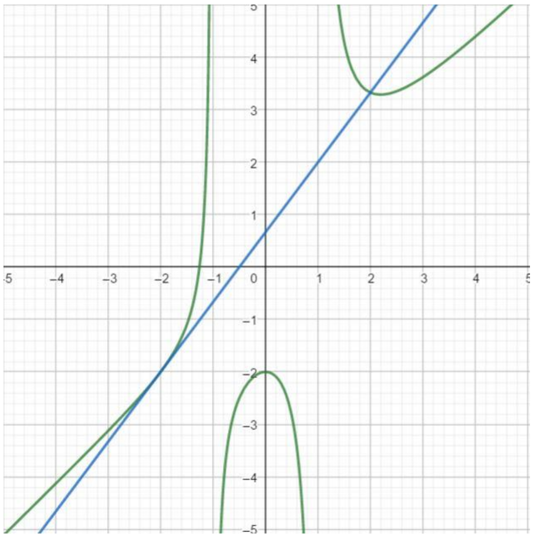
x	−∞		-2		-1		+1		+∞
f(x)-y		-	0	+	‖	-	‖	+	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)	

$$f'(x) = \frac{x \times g(x)}{(x^2-1)^2}$$

x	−∞		-1		0		+1		α		+∞
f'(x)		+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	−∞	↗	+∞ ‖ −∞	↗	-2	↘	−∞ ‖ +∞	↘	$f(\alpha)$	↗	+∞

$f(\alpha) = \frac{3(\alpha+2)}{\alpha^2-1}; 3{,}12 < f(\alpha) < 4{,}15$

$y = \frac{4}{3}x + \frac{3}{2}$



التمريـــن الثالث عشر:

D$_f$= $\mathbb{R} - \{-1; +1\}$

$\lim\limits_{x_0 \to 0} f(x) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$

f غير قابلة للاشتقاق عند x$_0$=0

x	$-\infty$	-1		0		+1		1,75	$+\infty$
f(x)	-1 ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3,5	↗ $+\infty$

$f(x) = 0 \to \; -1 < \alpha < -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2} < \beta < 1$

x	$-\infty$	-1		α		β		+1	$+\infty$
f'(x)	-	‖	-	0	+	0	-	‖	+

معادلتي نصف المماس عند 0 ... (AD) : $y = x + 1$; (AB) : $y = 1$

معادلتي نصف المماس عند -2 ... $y = -x - 4$

م.م.م $y = x + 1$

y=x+m	***y=m***
m∈]-∞;+1[ثلاث حلول	m∈]-∞;-1[ثلاث حلول
m∈]1; +∞[حلين	m=-1 حلين
	m∈]-1;+1[حلين
	m=1 حل وحيد
	m∈]1;$\frac{7}{2}$[لا يوجد حلول
	m=$\frac{7}{2}$ حل مضاعف
	m∈]$\frac{7}{2}$;+∞[حلين

$g'(x) = 2 \times f'(x) \times f(x)$

x	$-\infty$		-1		α		0		β		+1		1,75		$+\infty$
f'(x)		-	‖	+		+	0	-		-	‖	-	0	+	
f(x)		-	‖	-	0	+		+	0	-	‖	+		+	
g'(x)		+	‖	-	0	+	0	-	0	+	‖	-	0	+	
g(x)	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	12,25	↗	$+\infty$

التمريـــن الرابع عشر:

$f(1) = -2\,;\ f(-2) = 0$

$f'(-2) = 0\,; f'(1) = 3$

$g'(x) = 2x \times f'(x^2); g'(1) = 6$

$h'(x) = f'(x) \times f'[f(x)]; h'(1) = 0$

التمريـــن الخامس عشر:

$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

x	-1		$+\infty$
g(x)	-1	↗	$+\infty$

$g(0) = -1\,; g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

$g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow g(\alpha) = 0$

x	-1		α		$+\infty$
g(x)		-	0	+	

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

x	-1		α		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = 0 \Rightarrow$ مماس عند α يوازي م.ف

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty \Rightarrow$ x=-1 م.م.ع

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = 0; y = x + 1 \;\Rightarrow$ م.م.م

$f(\alpha) = \dfrac{3}{(\alpha+1)^2} \approx 1{,}88$