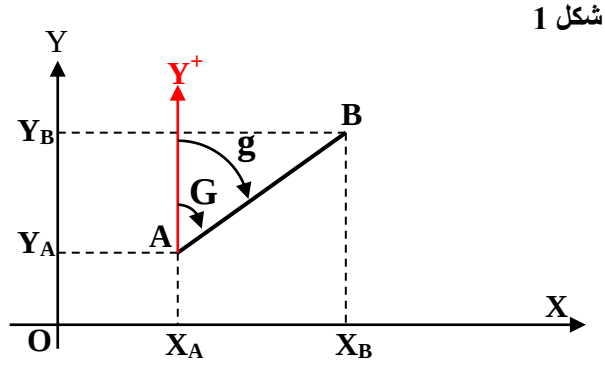
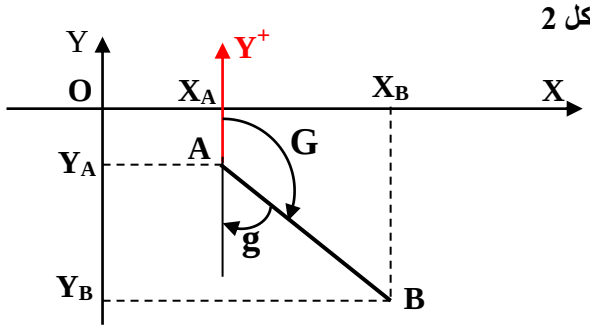
السمت الإحداثي

نشاط 01: لتكن الأشكال التالية:

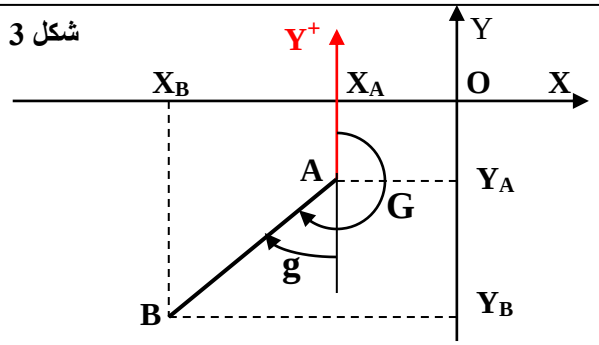
شكل 1



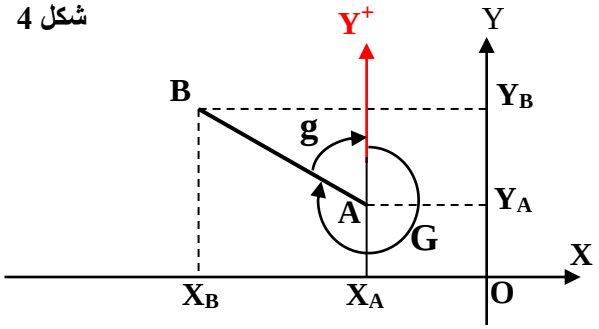
شكل 2



شكل 3



شكل 4



المطلوب:

1- عين لكل شكل من الأشكال إشارة ΔX_{AB} و ΔY_{AB}

2- أكتب g tg بدلالة | ΔX_{AB} | ، | ΔY_{AB} | في كل حالة.

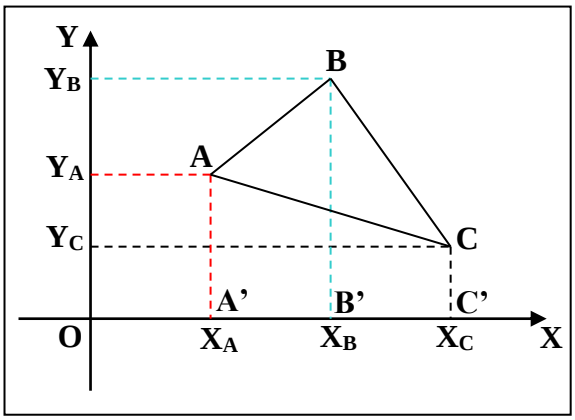
3- أكتب G^t بدلالة g مع العلم أن 100gr=90° في كل حالة.

4- إذا سمينا G^t بالسمت الإحداثي، أعط تعريفا لهذه الزاوية.

G: إنها زاوية ذات اتجاه دوراني ثابت (مع عقارب الساعة)، وهي محصورة بين محور عمودي مرجعي موجب نحو الأعلى و اتجاه معيّن (AB).

نشاط 02:

ليكن المثلث ABC المعرّف بإحداثيات رؤوسه على الترتيب (X_A , Y_A)، (X_B, Y_B) ، (X_C , Y_C) و لتكن النقاط A' , B' , C' إسقاطات النقاط A, B, C على محور الفواصل.



1- اكتب عبارة مساحة المثلث ABC بدلالة مساحة أشباه منحرف (ACC'A')، (ABB'A')، (BCC'B')

2- اكتب عبارة مساحة المثلث ABC بدلالة إحداثيات النقاط.

3- اكتب عبارة مساحة المثلث ABC على شكل مجموع جداء الفواصل بفرق التراتيب.

الحل:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

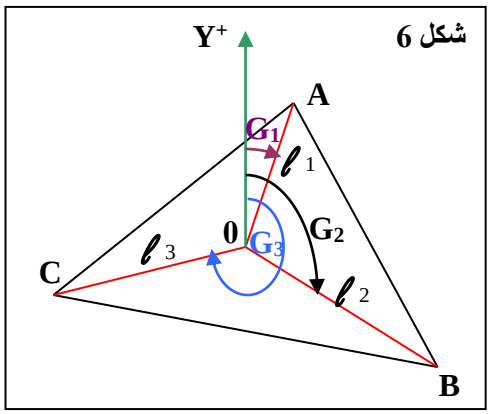
.....

.....

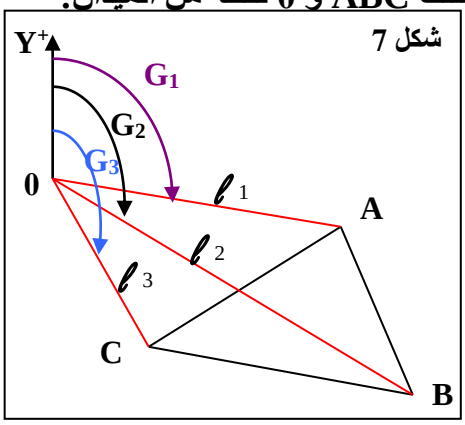
نشاط 03:

ليكن المثلث ABC و 0 نقطة من الميدان:

شكل 6



شكل 7



تعطى: المسافات $\ell_1 . \ell_2 . \ell_3$ والزوايا $G^t_1.G^t_2.G^t_3$

1- أحسب مساحة المثلث ABC بدلالة OCA.OBC.OAB في الحالتين.

2- أكتب مساحة المثلث ABC أطوال الأضلاع $\ell_1 . \ell_2 . \ell_3$ و $\text{Sin}(\Delta G^t)$ حيث ΔG^t هو فرق الزوايا.

تذكير: مساحة مثلث معرف بضلعين و زاوية محصورة بينهما تعطى بالعلاقة:

$$S = \frac{1}{2} \ell_1 . \ell_2 . \text{Sin}\ \alpha$$

S: مساحة المثلث ، ℓ_1: طول الضلع الأول، ℓ_2: طول الضلع الثاني

α: الزاوية المحصورة بين الضلعين.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

I) تعريف.

لنعتبر النقطتين A و B من المستوي والمعرفتين في معلم متعامد متجانس $(O,\vec{OX},\vec{OY})$.

$$\Delta X_{AB} = X_B - X_A$$

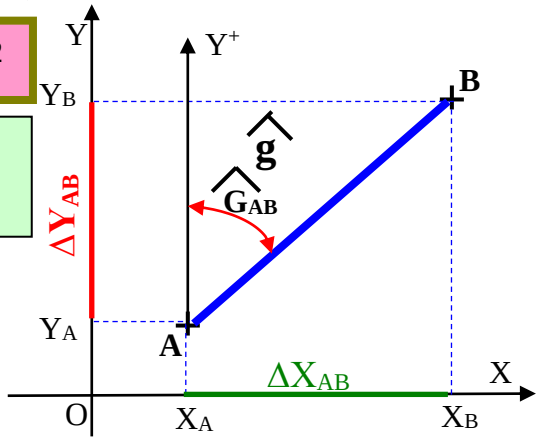
$$\Delta Y_{AB} = Y_B - Y_A$$

$$AB^2 = \Delta X_{AB}^2 + \Delta Y_{AB}^2$$

$$\text{Sin}(G^t_{AB}) = \Delta X_{AB} / AB$$
$$\text{Cos}(G^t_{AB}) = \Delta Y_{AB} / AB$$

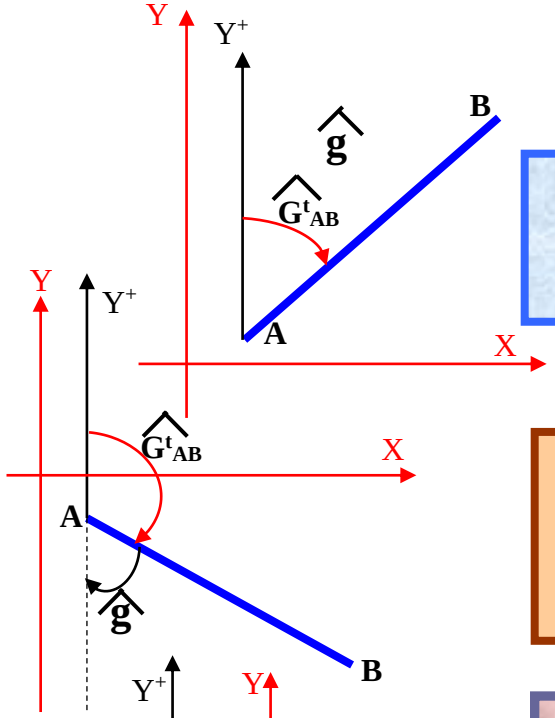
$$\text{Tan}\,\hat{g} = \left|\frac{\Delta X_{AB}}{\Delta Y_{AB}}\right|$$

(g): الزاوية المختصرة بين الاتجاه AB و أقرب محور التراتيب



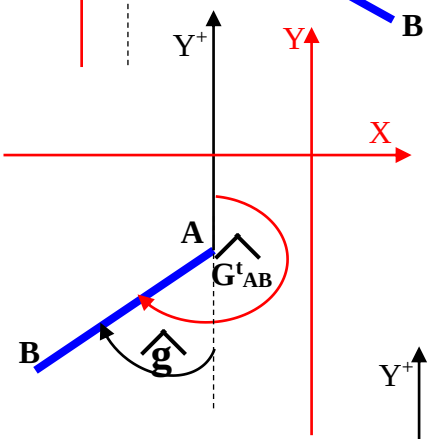
السمت الإحداثي (G) للحامل AB : هو الزاوية الأفقية المحصورة بين شمال لمبار (محور التراتيب(Y^+)) و الحامل AB في اتجاه دوران عقارب الساعة (موجب).

II) حساب السمت الإحداثي (G): أربع حالات:

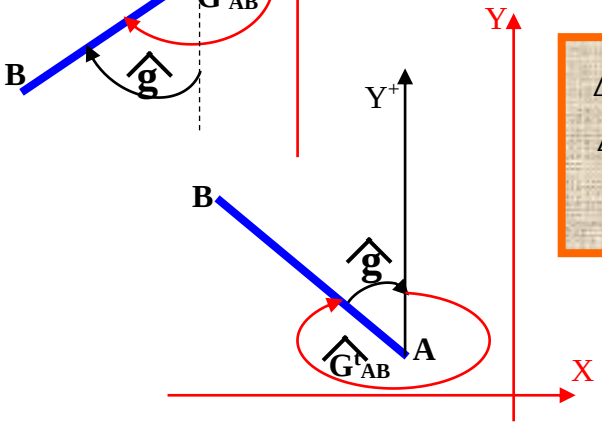


$$\left.\begin{array}{l}\Delta X = X_B - X_A > 0\\ \Delta Y = Y_B - Y_A > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Tan}\,G^t_{AB} = \frac{\Delta X}{\Delta Y}$$
$$G^t_{AB} = \hat{g} \text{ (grades)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta X = X_B - X_A > 0\\ \Delta Y = Y_B - Y_A < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Tan}\,\hat{g} = \left|\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right|$$
$$G^t_{AB} = 200 - \hat{g} \text{ (grades)}$$



$$\left.\begin{array}{l}\Delta X = X_B - X_A < 0\\ \Delta Y = Y_B - Y_A < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Tan}\,\hat{g} = \frac{\Delta X}{\Delta Y}$$
$$G^t_{AB} = 200 + \hat{g}$$



$$\left.\begin{array}{l}\Delta X = X_B - X_A < 0\\ \Delta Y = Y_B - Y_A > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Tan}\,\hat{g} = \left|\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right|$$
$$G^t_{AB} = 400 - \hat{g}$$

تمرين 1: احسب السمت الإحداثي G^t_{SA} ، G^t_{SB} حيث S(50, 60), B(10,30), A(80,80).

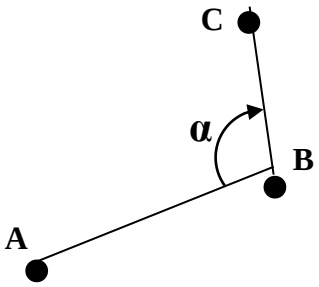
تمرين2: احسب G^t_{AB}

ΔX_{AB}(m)	ΔY_{AB}(m)	G_{AB} (gr)
$\Delta X>0$	$\Delta Y=0$	
$\Delta X=0$	$\Delta Y>0$	
$\Delta X<0$	$\Delta Y=0$	
$\Delta X=0$	$\Delta Y<0$	

تمرين 3:احسب السمت الإحداثي G^t_{AB} ، ثم استنتج السمت الإحداثي G_{BA}.

النقاط	X (m)	Y (m)	ΔX_{AB}(m)	ΔY_{AB}(m)	Tan g	الزوايا(غراد)
A	115,35	95,37				g =
B	527,83	317,92				G^t_{AB}=
						G^t_{BA}=

تمرين 4:



لتكن A, B, C ثلاث نقاط حسب الشكل المقابل.

إدا علمت أنّ: Y_A=70,00m, X_A=150,00m

Y_B=120,00m, X_B=180,00m, α=120gr

1- احسب السمت الإحداثي G^t_{AB} .

2- استنتج قيمة السمت الإحداثي G^t_{BC}.

تمرين5: احسب السمت الإحداثي G^t للتمارين الموالية:

النقاط	X (m)	Y (m)	ΔX_{AB}(m)	ΔY_{AB}(m)	Tan g	الزوايا(غراد)
A	126,264	236,365				g =
B	265,456	344,226				G^t_{AB}=

تمرين 6:

النقاط	X (m)	Y (m)	ΔX_{AB}(m)	ΔY_{AB}(m)	Tan g	الزوايا(غراد)
A	366,456	478,236				g =
B	526,127	264,435				G^t_{AB}=

تمرين 7:

النقاط	X (m)	Y (m)	ΔX_{AB}(m)	ΔY_{AB}(m)	Tan g	الزوايا(غراد)
A	262,108	206,154				g =
B	108,478	112,489				G^t_{AB}=

تمرين 8:

النقاط	X (m)	Y (m)	ΔX_{AB}(m)	ΔY_{AB}(m)	Tan g	الزوايا(غراد)
A	406,652	556,325				g =
B	221,452	628,321				G^t_{AB}=

الحل للتمرين الأول: حساب السمت الإحداثي G^t_{SA} و G^t_{SB} :

$\Delta X_{SA}= X_A-X_S=80 - 50= 30m > 0$ } الربع الأول
$\Delta Y_{SA}= Y_A-Y_S=80- 60= 20m > 0$ } الأول

$\Rightarrow G^t_{SA}=g \Rightarrow$ **Tg (g) =** $\frac{\Delta X_{SA}}{\Delta Y_{SA}}$ **=30/20=1, 5** ✓

$\Rightarrow$ g=62,57gr=G^t_{SA}

$\Delta X_{SB}= X_B-X_S=10 - 50= - 40m < 0$ } الربع الثالث
$\Delta Y_{SB}= Y_B-Y_S=30- 60= - 30m < 0$ } الثالث

$\Rightarrow G^t_{SB}=200+g$

Tg (g) = $\frac{\Delta X_{SB}}{\Delta Y_{SB}}$ **= - 40/ - 30=1, 33$\Rightarrow$ g=59,03gr**

$\Rightarrow G^t_{SB}$= 259,03gr ✓

الحل للتمرين 2:

$\Delta X>0$	**$\Delta Y=0$**	**G^t_{AB}=100gr**
$\Delta X=0$	**$\Delta Y>0$**	**0**
$\Delta X<0$	**$\Delta Y=0$**	**300**
$\Delta X=0$	**$\Delta Y<0$**	**200**

1,5 ✓

الحل للتمرين 3 : حساب السمت الإحداثي G_{AB} .

$\Delta X_{AB}= X_B-X_A=527,83 - 115,35= 412.48m > 0$ } الربع الأول
$\Delta Y_{AB}= Y_B-Y_A=317,92- 95,37= 222,55m > 0$ } الأول

$\Rightarrow G^t_{AB}=g$

$Tg\ (g) = \frac{\Delta X_{AB}}{\Delta Y_{AB}}$ =412, 48/222, 55=1, 85$\Rightarrow$ g=68,5gr=G_{AB} ✓

G^t_{BA}= 200+g=200+68,5=268,5gr

*استنتاج السمت الإحداثي G^t_{BA} :

طريقة ثانية لحساب G^t_{BA}:

$\Delta X_{BA}= X_A-X_B=115,35 - 527,83= - 412.48m < 0$ } الربع الثالث
$\Delta Y_{BA}= Y_A-Y_B= 95,37 - 317,92= - 222,55m < 0$ } الثالث

$\Rightarrow G^t_{BA}=200+g$

$Tg\ (g) = \frac{\Delta X_{BA}}{\Delta Y_{BA}}$ =- 412, 48/- 222, 55=1, 85$\Rightarrow$ g=68,5gr $\Rightarrow$ G^t_{BA} = 268,5gr

الحل للتمرين 4 : حساب السمت الإحداثي G^t_{AB} .

$\Delta X_{AB}= X_B-X_A=180 - 150= 30m > 0$ } الربع الأول
$\Delta Y_{AB}= Y_B-Y_A=120 - 70= 50m > 0$ } الأول

$\Rightarrow G^t_{AB}=g$

$Tg\ (g) = \frac{\Delta X_{AB}}{\Delta Y_{AB}}$ =30/50=0, 6$\Rightarrow$ g=34,40gr=G_{AB} ✓

G^t_{BC} = 200+g+α=200+34,40+120=354,40gr ✓

*استنتاج السمت الإحداثي G^t_{BC} :

الحل للتمرين 5:

النقاط	X (m)	Y (m)	ΔX_{AB}(m)	ΔY_{AB}(m)	Tan g	الزوايا(غراد)
A	126,264	236,365	139,192✓	107,861✓	1,29✓	g = 58,03✓
B	265,456	344,226				G^t_{AB}= 58,03
A	366,456	478,236	159,671✓	- 213,801✓	0,74✓	g = 40,83✓
B	526,127	264,435				G^t_{AB}=159,17 ✓
A	262,108	206,154	- 153,63✓	- 93,665✓	1,64✓	g = 65,14✓
B	108,478	112,489				G^t_{AB}=265,14 ✓
A	406,652	556,325	- 185,2✓	71,996✓	2,57✓	g = 76,39✓
B	221,452	628,321				G^t_{AB}=323,61 ✓

III) حساب المساحات: هناك طريقتين

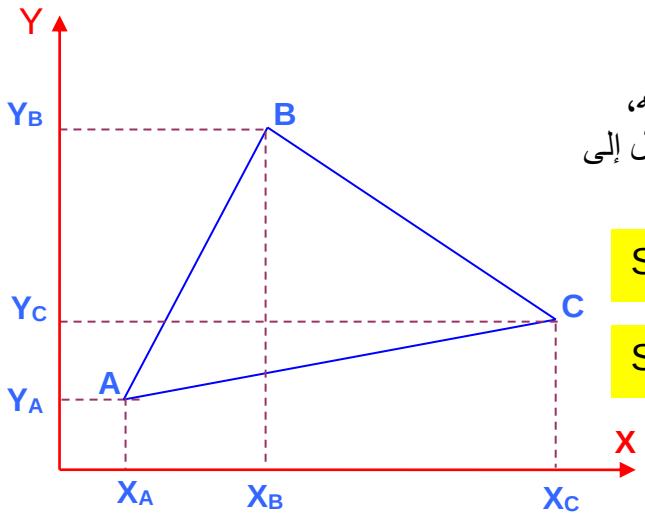
1 طريقة الاحداثيات القائمة

تحسب مساحة مضلع، معرف بالإحداثيات القائمة لرؤوسه، بتقسيمه إلى مساحات بسيطة (الشهيرة) و في النهاية نصل إلى هذه العلاقة:

$$S = \frac{1}{2} \Sigma X_n (Y_{n-1} - Y_{n+1})$$

$$S = \frac{1}{2} \Sigma Y_n (X_{n-1} - X_{n+1})$$

$$S + S' = 0$$



* تطبيق: احسب مساحة المثلث ABC حيث:
C (60, 60), B (40, 80), A (20, 20)

$$S = \frac{1}{2} [X_A (Y_C - Y_B) + X_B (Y_A - Y_C) + X_C (Y_B - Y_A)]$$

$$S = \frac{1}{2} [20 (60-80) + 40 (20-60) + 60 (80-20)] = 800m^2$$

الطريقة الثانية:

$$S' = (\frac{1}{2}) [Y_A (X_C - X_B) + Y_B (X_A - X_C) + Y_C (X_B - X_A)]$$

$$S' = (\frac{1}{2}) [20 (60 - 40) + 80 (20 - 60) + 60 (40 - 20)] = -800m^2$$

2- طريقة الإحداثيات القطبية :

نحسب بدلالة الزاوية و الضلع حيث الزاوية هي السمت الإحداثي و الضلع هو المسافة بين المحطة O و النقطة المصوبة

*اتجاه الدوران هو عقارب الساعة .

نسمي L_n : المسافة الرابطة بين المحطة O و كل رأس.

نسمي α : الزوايا المحصورة بين الأضلاع و هي زوايا مركزية

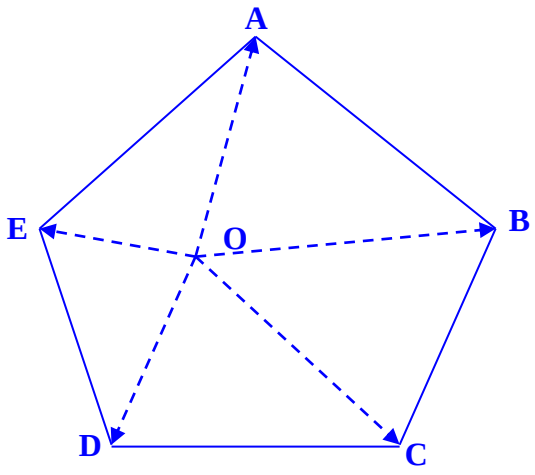
فيصبح القانون لحساب مساحة هذا المضلع:

$$S = \frac{1}{2} \Sigma L_n L_{n+1} \sin(G_{n+1} - G_n)$$

$$S = \frac{1}{2} \Sigma L_n L_{n+1} \sin(\alpha_n)$$

$$\alpha_{n-1} = G_n - G_{n-1}$$

$$\alpha_n = G_{n+1} - G_n$$



ملاحظة: إذا كانت المحطة O خارج المضلع فتطرح مساحة المثلث الأخير من المجموع من المساحتين السابقتين.

• تطبيق: ليكن المثلث ABC و O محطة خارج هذا المثلث حيث:

المطلوب: احسب مساحة المثلث ABC

G_{OA}=80gr OA=40, 00m

G_{OB}=150gr OB=70, 00m

G_{OC}=180gr OC=150, 00m

الحل: نطبق القانون: مساحة مثلث كيفي

$$S = \frac{1}{2} \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} [OA.OB.\sin(G_{OB} - G_{OA}) + OB.OC.\sin(G_{OC} - G_{OB}) - OA.OC.\sin(G_{OC} - G_{OA})]$$

$$= \frac{1}{2} [40x70x\sin(150 - 80) + 70x150x\sin(180 - 150) - 150x40x\sin(180 - 80)] = 630,86m^2$$

IV- تمارين :

التمرين 1: احسب مساحة قطعة أرض المعرفة بإحداثيات رؤوس نقاطها، **A(20,00m, 30,00m)**
D (80.00m, 10.00m), C (80.00m, 50.00m), B (35.00m, 50.00m)

التمرين 2: ليكن المضلع **ABCDE** و **O** محطة داخل هذا المضلع حيث:

G^t_{OA} = 53,12gr	L_{OA}=48,12m
G^t_{OB} = 100,03gr	L_{OB}=51.33m
G^t_{OC} = 147.41gr	L_{OC}=48,71m
G^t_{OD} = 261.53gr	L_{OD}=57.48m
G^t_{OE} = 380.37gr	L_{OE}=47.93m

المطلوب: احسب مساحة المضلع **ABCDE** :

التمرين3: ليكن المثلث ذو الرؤوس **ABC** المعرفة بالإحداثيات القائمة، حيث:

Y_A=220.70m	X_A=220.44m
Y_B=610.25m	X_B=440.30m
Y_C=450.70m	X_C=630.20m

المطلوب : احسب مساحة هذا المثلث.

التمرين 4: لتكن **C, B, A**، رؤوس مثلث و **O** محطة حيث:

النقاط	X	Y
O	**917959.0680**	**91811.5470**
A	**917996.6900**	**91817.6110**
B	**918001.7890**	**91836.5760**
C	**918027.9010**	**91830.9860**

1- احسب المسافات بين الرؤوس و المحطة **O**.
2- احسب السموت $G^t_{OC}, G^t_{OB}, G^t_{OA}$.
3- احسب مساحة المثلث **ABC** بطريقة الإحداثيات القطبية.

الحل للتمرين 1:

$$S=\frac{1}{2}[X_A(Y_D-Y_B)+X_B(Y_A-Y_C)+X_C(Y_B-Y_D)+X_D(Y_C-Y_A)]$$

$$S=\frac{1}{2}[20(10-50)+35(30-50)+80(50-10)+80(50-30)]=1650m^2$$

الحل للتمرين 2:

$$S=\frac{1}{2}[L_{OA}.L_{OB}.\sin(G^t_{OB}-G^t_{OA})+L_{OB}.L_{OC}.\sin(G^t_{OC}-G^t_{OB})+L_{OC}.L_{OD}\sin(G^t_{OD}-G^t_{OC})+L_{OD}.L_{OE}.\sin(G^t_{OE}-G^t_{OD})+L_{OE}.L_{OA}.\sin(400-G^t_{OE}+G^t_{OA})]$$

$$=\frac{1}{2}[48,12x51.33\times\sin(100,03-53,12)+51,33x48,71\times\sin(147,41-100,03)+48,71x57,48\times\sin(261,53-147,41)+57,48x47,93\times\sin(380,37-261,53+47,93x48,12\times\sin(400-380,37-53,12]=\quad m^2$$

الحل للتمرين 3:

$$S=\frac{1}{2}[X_A(Y_C-Y_B)+X_B(Y_A-Y_C)+X_C(Y_B-Y_A)]$$

$$S=\frac{1}{2}[220,44(450,70-610,25)+440,30(220,70-450,70)+630,20(610,25-220,70)]$$

$$=54527,104m^2$$

الحل للتمرين 4:

حساب السموت $G^t_{OC}, G^t_{OB}, G^t_{OA}$:

1) $\Delta X_{OA}=X_A-X_O=917996.6900-917959.0680=37,622m>0$
$\Delta Y_{OA}=Y_A-Y_O=91817.6110-91811.5470=6,064m>0$
} الربع الأول $\Rightarrow G^t_{OA}=g$

$$Tg(g)=\frac{\Delta X_{OA}}{\Delta Y_{OA}}=37,622/6,064=6,20\Rightarrow g=89,83gr=G_{OA}$$

2) $\Delta X_{OB}=X_B-X_O=918001.7890-917959.0680=42,721m>0$
$\Delta Y_{OB}=Y_B-Y_O=91836.5760-91811.5470=25,029m>0$
} الربع الأول $\Rightarrow G^t_{OB}=g$

$$Tg(g)=\frac{\Delta X_{OB}}{\Delta Y_{OB}}=42,721/25,029=1,71\Rightarrow g=66,26gr=G_{OB}$$

3) $\Delta X_{OC}=X_C-X_O=918027.9010-917959.0680=68,833m>0$
$\Delta Y_{OC}=Y_C-Y_O=91830.9860-91811.5470=19,439m>0$
} الربع الأول $\Rightarrow G^t_{OC}=g$

$$Tg(g)=\frac{\Delta X_{OC}}{\Delta Y_{OC}}=68,833/19,439=3,54\Rightarrow g=82,48gr=G_{OC}$$

2- حساب المسافات:

$$L_{OA}=\sqrt{(\Delta X_{OA})^2+(\Delta Y_{OA})^2}=\sqrt{(37.622)^2+(6.064)^2}=38.11m$$

$$L_{OB}=\sqrt{(\Delta X_{OB})^2+(\Delta Y_{OB})^2}=\sqrt{(42.721)^2+(25.029)^2}=49.51m$$

$$L_{OC}=\sqrt{(\Delta X_{OC})^2+(\Delta Y_{OC})^2}=\sqrt{(68.833)^2+(19.439)^2}=71.53m$$

$$S=0,5[L_{OA}.L_{OB}.\sin(G^t_{OB}-G^t_{OA})+L_{OB}.L_{OC}.\sin(G^t_{OC}-G^t_{OB})+L_{OC}.L_{OA}.\sin(G^t_{OA}-G^t_{OC})]$$

$$=0,5[38.11x49.51x\sin(66,26-89,83)+49.51x71.53x\sin(82,48-66,26)+71.53x38.11x\sin(89,83-82,48)]=523,28m^2$$