الاشـــــتـقاقـيـة

✠ **الاشتقاقية:** f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي x_0 و (C_f) تمثيلها البياني .

♠ اذا كانت $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$ أو $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$ $f'(x_0)=$ (حيث l عدد حقيقي) فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 ♠ التفسير البياني : المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلة هذا المماس هي من الشكل $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.
♠ اذا كانت $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ أو $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 ♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y=f(x_0)$
♠ اذا كانت $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ أو $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 ♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس يوازي حامل محور الترتيب معادلته $x=x_0$
♠ اذا كانت $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$ و $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$ وكان $l_1\neq l_2$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 ♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ وتدعى A نقطة زاوية .

✠ **مشتقات دوال مألوفة :**

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (k عدد حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n $(n\geq 2; n\in\mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

✠ **المشتقات و العمليات على الدوال :** f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي

الدالة	$f+g$	kf	$f\times g$	$g=\frac{1}{f}$ (مع $f\neq 0$)	$\frac{f}{g}$ (مع $g\neq 0$)	$g=\sqrt{f}$ (مع $f\geq 0$)
المشتقة	$f'+g'$	kf'	$f'\times g+g'\times f$	$g'=-\frac{f'}{f^2}$	$\frac{f'.g-g'.f}{g^2}$	$g'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

✠ **مشتقة بعض الدوال :**

الدالة	f^n	$f(x)=g(ax+b)$	$f(x)=\sin(ax+b)$	$f(x)=\cos(ax+b)$	$(g\circ f)(x)$
المشتقة	$nf'f^{n-1}$	$f'(x)=ag'(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$	$f'(x)\times g'(f(x))$

✠ نقطة الانعطاف :

اذا انعدمت المشتقة الثانية $f''(x)$ من أجل x_0 مغيرة إشارتها بجوار x_0 فإن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(x_0; f(x_0))$
♠ التفسير الهندسي : المماس (T) للمنحني (C_f) عند نقطة الانعطاف $A(x_0; f(x_0))$ يخترق المنحني (C_f) .

سلسلة تمارين الاشـــــتـقاقـيـة

✓ التمرين 01 ◄

♠ ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند x_0 ماذا تستنتج ؟ ثم فسر النتيجة هندسيا في كل حالة من الحالات التالية :

[1] ♦ $f(x) = x^2 - x$; $x_0 = -1$

[2] ♦ $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$; $x_0 = 0$

[3] ♦ $f(x) = \sqrt{x-2}$; $x_0 = 2$

[4] ♦ $f(x) = 2x|x-1|$; $x_0 = 1$

✓ التمرين 02 ◄

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كمايلي : $f(x) = |x| + \dfrac{4}{x+1}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في معلم .

[1] ♦ اكتب f دون رمز القيمة المطلقة .

[2] ♦ احسب $\lim\limits_{h \overset{<}{\to} 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ و $\lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟ ثم اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

[2] ♦ اكتب معادلتي المماسين $(\triangle_1)$ و $(\triangle_2)$ للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

✓ التمرين 03 ◄

♠ ادرس تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها (D_f) في كل حالة من الحالات التالية :

[1] ♦ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$; $D_f = \mathbb{R}$

[2] ♦ $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$; $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

[3] ♦ $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x+1}$; $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

[4] ♦ $f(x) = x - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$; $D_f =]-1; +\infty[$

♠ احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ في كل حالة من الحالات التالية :

[1] ♦ $g(x) = f(3x+1)$ [2] ♦ $g(x) = f(x^2)$ [3] ♦ $g(x) = f(x^3)$ [4] ♦ $g(x) = f(\dfrac{1}{x})$

✓ التمرين 04 ◄

♠ نعتبر الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي: $f(x) = a + \dfrac{b}{x-3}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

[1] ♦ عيّن العددين a و b اذا علمت أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها $\dfrac{4}{3}$ ويقبل المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب للمنحني (C_f) .

♠ نفرض فيما يلي أن : $a = 2$ و $b = 2$.

[2] ♦ ادرس تغيرات الدالة f

[3] ♦ عيّن احداثيات نقط تقاطع للمنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات .

[4] ♦ بيّن ان المنحني (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كلا منهما يساوي -2 .

✓ التمرين 05 ◄

♠ f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = ax^3 + bx + c$. حيث a, b, c أعداد حقيقية .

[1] ♦ عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c علما أنّ التمثيل البياني (C_f) الممثل للدالة f يشمل النقطة $A(1;-3)$ ويقبل في النقطة $B(0;1)$ مماسا يوازي المستقيم $(\triangle)$ الذي معادلته $y = -6x + 1$

♠ g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$. حيث a و b عددان حقيقيان.

[1] ♦ عيّن العددين a و b علما أنّ التمثيل البياني (C_g) الممثل للدالة g يقبل في النقطة $A(1;2)$ مماسا يوازي محور الفواصل .

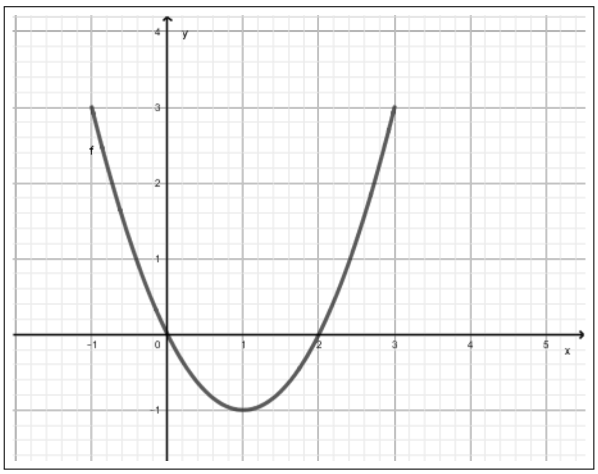
[2] ♦ بين أن للمنحنى (C_g) نقطة إنعطاف w يطلب تعيينها , ثم اكتب معادلة المماس لـ (C_g) عندها .

♠ h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = \dfrac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$. حيث a و b عددان حقيقيان.

[1] ♦ عيّن العددين a و b علما أنّ التمثيل البياني (C_h) الممثل للدالة h يقبل في النقطة $A(0;3)$ مماسامعامل توجيهه 4 .

✓ التمرين 06 ◄

♠ f الدالة المعرفة على المجال $[-1;3]$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.



♠ بقراءة بيانية ♠

[1] ♦ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-1;3]$

[2] ♦ عيّن اشارة $f(x)$ على المجال $[-1;3]$.

[3] ♦ عيّن اشارة $f'(x)$ على المجال $[-1;3]$.

♠ نعتبر الدالة g المعرفة علة المجال $[-1;3]$ كما يأتي : $g(x) = [f(x)]^2$

[4] ♦ احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج اشارة $g'(x)$.

[5] ♦ شكل جدول تغيرات الدالة g .

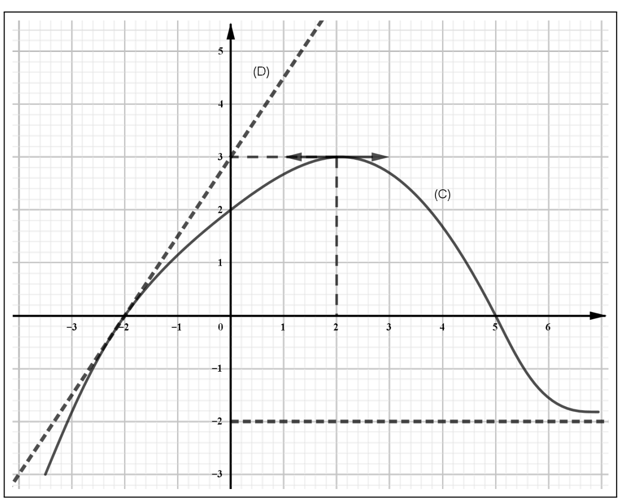
♠ نعتبر الدالة h المعرفة علة المجال $[-1;3]$ كما يأتي : $h(x) = [f(x)]^3$

[5] ♦ احسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج اشارة $h'(x)$.

[7] ♦ شكل جدول تغيرات الدالة h .

✓ التمرين 07 ◄

♠ المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$.



♠ بقراءة بيانية عيّن ♠

[1] ♦ $f(5) = ...$ $f(0) = ...$

[2] ♦ $f(2) = ...$ $f(-2) = ...$

[3] ♦ $f'(2) = ...$ $f'(-2) = ...$

[4] ♦ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ...$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ...$

[5] ♦ معادلة المماس (D) : $y = ...x + ...$

[6] ♦ وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

[7] ♦ حسب قيم x إشارة $f(x)$.

[8] ♦ حسب قيم x إشارة $f'(x)$.

[9] ♦ شكل جدول تغيرات الدالة f .

[10] ♦ حلول المعادلة : $f(x) = 2$.

[11] ♦ حلول المتراجحة : $f(x) \geq 2$.

[12] ♦ ناقش بيانيا حسب قيّم الوسيط الحقيقي : m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x) = m$.

المناقشة البيانية

- المعادلة من الشكل $f(x) = m$ ← المناقشة تكون أفقية موازية لمحور الفواصل
- المعادلة من الشكل $f(x) = mx + k$ حيث k ثابت و m وسيط حقيقي ← المناقشة تكون دورانية حول النقطة $A(0;k)$
- المعادلة من الشكل $f(x) = kx + m$ حيث k ثابت و m وسيط حقيقي ← المناقشة تكون مائلة موازية للمستقيم ذو المعادلة $y = kx$
- المعادلة من الشكل $f(x) = f(m)$ ← المناقشة تكون أفقية

الدالة الزوجية :

إذا كانت $f(x) = f(-x)$ نقول أن الدالة f زوجية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

الدالة الفردية :

إذا كانت $f(-x) = -f(x)$ نقول أن الدالة f فردية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمركز المعلم.

الدالة الدورية :

إذا كانت $f(x+p) = f(x)$ نقول أن الدالة f دورية وتمثيلها البياني يعيد نفسه عند كل مجال طوله p .

مركز التناظر :

إذا كانت $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل مركز تناظر هو النقطة $A(\alpha;\beta)$.

محور التناظر :

إذا كانت $f(2\alpha - x) = f(x)$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل محور تناظر هو المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$.

التقاطع مع محور الفواصل :

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ونجد فواصل هذه النقط مع العلم أن ترتيباتها معدومة.

التقاطع مع محور التراتيب :

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ ونجد ترتيبات هذه النقط مع العلم أن فواصلها معدومة.

استنتاج تمثيل بياني من آخر :

❶ إذا كانت $h(x) = |f(x)|$ فإن (C_h) منطبق على (C_f) لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل.
و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل.

❷ إذا كانت $h(x) = f(|x|)$ فإن (C_h) منطبق على (C_f) لما يكون $x > 0$.
و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب لما يكون $x < 0$.

❸ إذا كانت $h(x) = -f(x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

❹ إذا كانت $h(x) = f(-x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

❺ إذا كانت $h(x) = f(x+a) + b$ فإن (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{-a}{b}$.

❻ إذا كانت $h(x) = -f(-x)$ فإن (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمركز المعلم.