التمرين:

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+1}{1-x}$ ، حيث α و β عددين حقيقين، و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

◆ عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند الـ "0" والنقطة $A(2;-3)$ تنتمي إليه

II) نضع فيما يلي: $\alpha=1$ و $\beta=-1$:

❶ احسب: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا

❷ احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❸ أ/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{1-x}$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

❹ أ/ بيّن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها

❺ أ/ عيّن إحداثيات ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=1$

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

❻ ارسم كل من (Δ) و (C_f)

❼ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين $\dfrac{1}{1-x}=x+m\ldots(E)$ و $f(x)+x=m\ldots(E')$

III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $h(x)=f(|x|)$

❶ ادرس شفعية الدالة h

❷ وضّح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه.

◄حل مقترح:

I) تعيين α و β :

لدينا: f تقبل قيمة حدية عند 0 معناه: $f'(0)=0$

نعيّن أولا $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(2\alpha x+\beta)(1-x)-(-1)(\alpha x^2+\beta x+1)}{(1-x)^2}$$

لدينا: $f'(0)=0$ ومنه:

$$\frac{(2\alpha(0)+\beta)(1-0)-(-1)(\alpha(0)^2+\beta(0)+1)}{(1-0)^2}=0\Rightarrow \beta+1=0$$
$$\Rightarrow \boxed{\beta=-1}$$

ولدينا: $f(2)=-3$ ، ومنه:

$$\frac{\alpha(2)^2+\beta(2)+1}{1-2}=-3\Rightarrow 4\alpha+2\beta+1=3$$
$$\Rightarrow 4\alpha+2\beta=2$$
$$\Rightarrow 4\alpha=4$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

ومنه: $\boxed{f(x)=\frac{x^2-x+1}{1-x}}$

II) نضع فيما يلي: $\alpha=1$ و $\beta=-1$

❶ حساب: $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}} f(x)$:

- $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x=1$

- $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=1$

❷ حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)$
$=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=+\infty$

❸ أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x)=ax+b+\frac{c}{1-x}$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{1-x}$$
$$=\frac{(ax+b)(1-x)+c}{1-x}$$
$$=\frac{ax-ax^2+b-bx+c}{1-x}$$
$$=\frac{-ax^2+(a-b)+b+c}{1-x}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = -1 \\ b + c = 1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$ وعليه: $\boxed{f(x) = -x + \frac{1}{1-x}}$

ب/ استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[-x + \frac{1}{1-x} - (-x)\right]$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{1}{1-x}\right]$$
$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته : $y_{(\Delta)} = -x$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{1-x}$$

لدينا: $1 - x = 0$ معناه: $x = 1$ ومنه:

x	$-\infty$ $\quad$ 1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

❹ أ/ تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(1-x) - (-1)(x^2 - x + 1)}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{2x - 2x^2 - 1 + x + x^2 - x + 1}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(1-x)^2 > 0$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(2-x)$:

لدينا:

$$x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ 2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

ومنه:

- **جدول تغيرات الدالة f**

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

❺ أ/ ايجاد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$:

نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم (Δ): نجد $y = -1$

ومنه: $\omega(1; -1)$

ب/ تبيين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$

معناه: $x \in \left]-\infty;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$ **معناه:** $x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $(-x) > -1$ أو $(-x) < -1$ **معناه:** $(2(1)-x) > 1$ أو $(2(1)-x) < 1$

معناه: $(2(1)-x) \in \left]-\infty;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$ **معناه:** $(2(1)-x) \in D_f$

• **ولدينا:**

$$\begin{aligned} f(2(1)-x)+f(x) &= -(2-x)+\frac{1}{1-(2-x)}-x+\frac{1}{1-x} \\ &= -2+x+\frac{1}{-1+x}-x+\frac{1}{1-x} \\ &= -2-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x} \\ &= -2 = 2(-1) \end{aligned}$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x)+f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x)+f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

إذا وُجد مماس لـ (C_f) يشمل $\omega(1;-1)$ معناه يوجد $a \in \mathbb{R}-\{1\}$ يحقق:

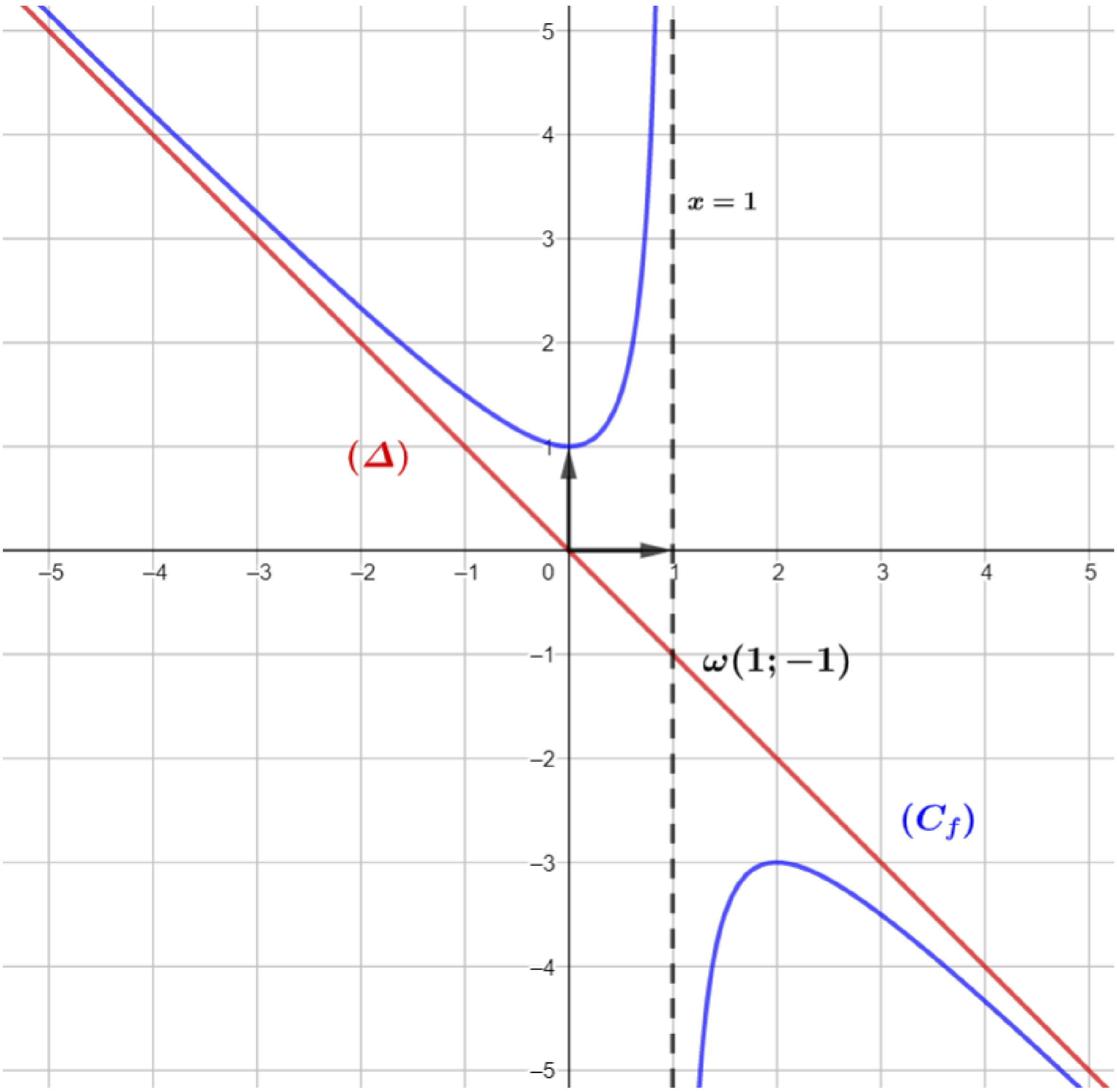
$$f'(a)(x_\omega - a)+f(a) = y_\omega$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(a)(x_\omega - a)+f(a) = y_\omega &\Rightarrow f'(a)(1-a)+f(a) = -1 \\ &\Rightarrow \frac{a(2-a)}{(1-a)^2}(1-a)+\frac{a^2-a+1}{1-a} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{a(2-a)}{(1-a)^2}-\frac{a^2(2-a)}{(1-a)^2}+\frac{a^2-a+1}{1-a} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{a(2-a)}{(1-a)^2}-\frac{a^2(2-a)}{(1-a)^2}+\frac{(a^2-a+1)(1-a)}{(1-a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{2a-a^2-2a^2+a^3+a^2-a^3-a+a^2+1-a}{(1-a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{-a^2+1}{(1-a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{1+a}{1-a} = -1 \\ &\Rightarrow 1+a = -1+a \\ &\Rightarrow 1 = -1 \end{aligned}$$

وجدنا $1 \neq -1$ وهذا تناقض، وعليه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

❻ رسم كل من (Δ) و (C_f) :



❼ **المناقشة البيانية:**

1) **المناقشة البيانية لحلول المعادلة (E):**

$$\frac{1}{1-x} = x + m \Rightarrow \frac{1}{1-x} - x = m$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = x$ ، وهي:

لما	$m \in]-\infty;-3[$	**للمعادلة حلان موجبان تماما**
لما	$m = -3$	**للمعادلة حل مضاعف موجب تماما**
لما	$m \in]-3;1[$	**المعادلة لا تقبل حلولا**
لما	$m = 1$	**المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما**
لما	$m \in]1;+\infty[$	**للمعادلة حل موجب تماما وحل سالب تماما**

2) **المناقشة البيانية لحلول المعادلة (E'):**

$$f(x) + x = m \Rightarrow f(x) = -x + m$$

حلول المعادلة (E') هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -x + m$ ، وهي:

لما	$m \in]-\infty;-1[$	**للمعادلة حل موجب تماما**
لما	$m = -1$	**المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجب تماما**
لما	$m \in]-1;0[$	**للمعادلة حل موجب تماما**

لما	$m=0$	المعادلة لا تقبل حلولا
لما	$m\in\ ]0;1[$	للمعادلة حل سالب تماما
لما	$m=1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما
لما	$m\in\ ]1;+\infty[$	للمعادلة حل موجب تماما

(III

❶ دراسة شفعية الدالة h:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة h زوجية

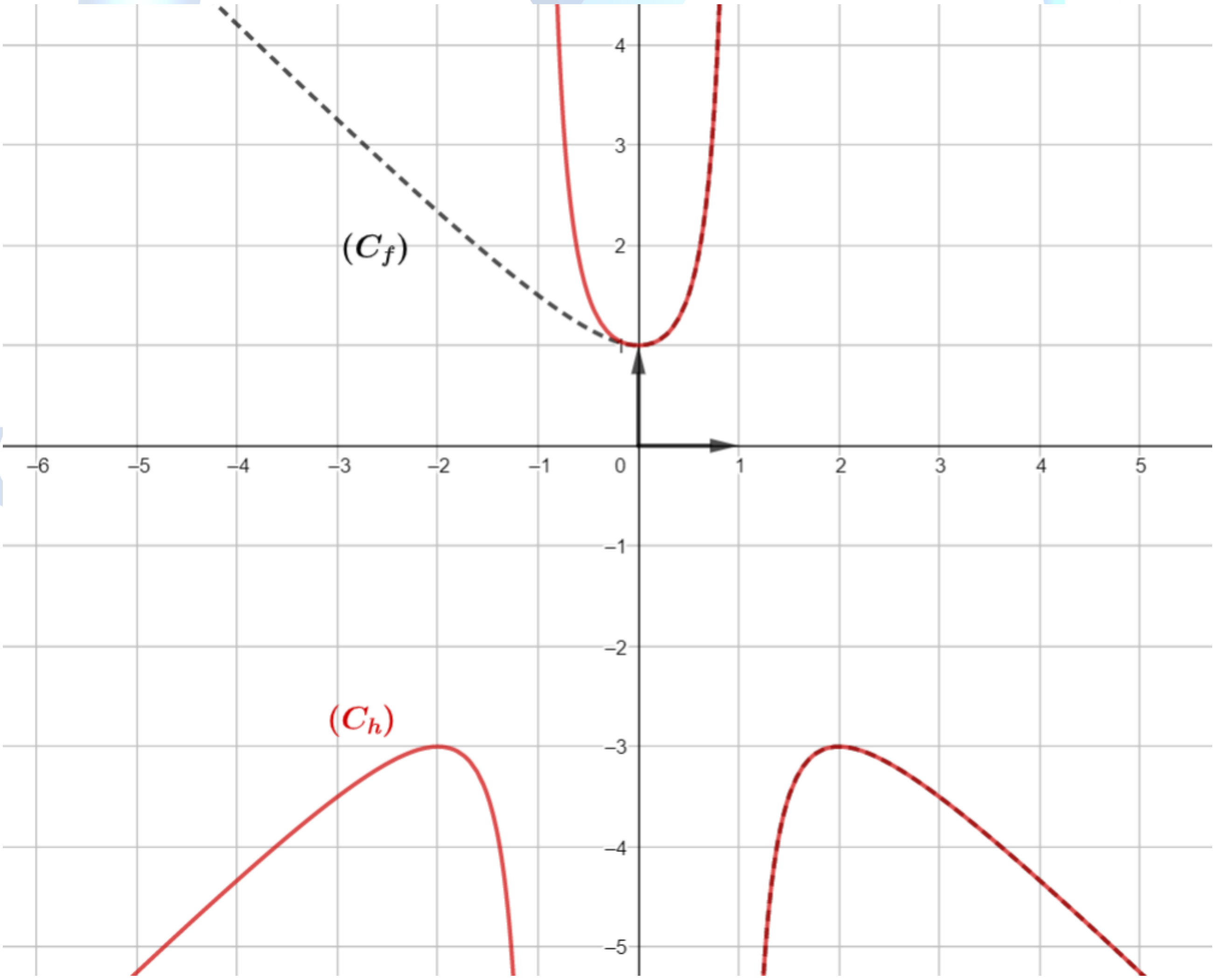
❷ **توضيح كيف يمكن المنحنى (C_h) :**

لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x\in[0;1[\,\cup\,]1;+\infty[\\ f(-x) & ; \quad x\in\,]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;0] \end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.



◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►